

**Zeitschrift:** Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

**Band:** 85 (1987)

**Heft:** 5

**Artikel:** Über die Rotation der Erde

**Autor:** Bauersima, I.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-233447>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 11.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Über die Rotation der Erde (Schluss)

I. Bauersima

### Die Euler'sche Theorie der Rotation eines rotations-symmetrischen Starrkörpermodells der Erde

63. Im Zusammenhang mit der Rechtfertigung der Behauptung, dass ein rotations-symmetrisches Starrkörpermodell das einfachste Modell der Erde ist (s. 62), haben wir einige weitere Tatsachen vorweggenommen, die zum Zeitpunkt, in dem die Entwicklung der Theorie der Bewegung dieses Erdmodells in Angriff genommen wurde, noch nicht bekannt waren.

64. Das war im Jahre 1765, als der Basler Mathematiker Leonard Euler – von den drei Newton'schen Bewegungsgesetzen und dem Gravitationsgesetz ausgehend – die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers in einem äusseren Gravitationsfeld aufstellte. Diese Gleichungen enthalten im Sinne von 50.1) und 50.4) genau einen unbekannt Parameter, nämlich die sog. dynamische Abplattung der Erde

$$H = (C - A)/C.$$

Dies unter der Annahme, dass die Massen des Mondes und der Sonne und deren Bahnelemente bekannt sind. Hierbei sind C und A die sog. zentralen Hauptträgheitsmomente des starren rotationssymmetrischen Körpers.

65. So, wie die Masse ein Mass für die translatorische Trägheit eines Körpers ist, so ist auch das Trägheitsmoment ein Mass für die Rotationsträgheit um die diesem Trägheitsmoment entsprechende Achse.

66. Die Lösung der Euler'schen Bewegungsgleichungen eines starren rotationssymmetrisch aufgebauten Körpers kann auch in einer anderen – als in 51.1) bis 4) erwähnten – Form beschrieben werden: Nämlich durch die Bewegung der momentanen Rotationsachse gegenüber dem inertialen- und dem erdfesten Koordinatensystem und durch die in der Achse des maximalen zentralen Trägheitsmomentes C liegende Komponente  $\omega_3$  der momentanen Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$ .

67. Es zeigt sich dabei, dass  $\omega_3$  – als Folge der Rotationssymmetrie des Körpers – konstant ist.

68. Die Bewegung der Rotationsachse der Erde gegenüber dem Inertialsystem entsteht durch Überlagerung vieler erzwungener prograden (der Drehsinn der täglichen Bewegung der Himmelskugel ist definitionsgemäss prograd) periodischen Komponenten.

Die erste Komponente ist die Präzessionsbewegung der Rotationsachse der Erde. Sie erscheint an der Himmelskugel als eine nahezu gleichmässige prograde Bewegung des Rotationspols um den Ekliptikpol. Die entsprechende jährliche Verschiebung des

Frühlingspunktes entlang der Ekliptik wird die Präzession in Länge genannt. Durch Beobachtungen wurde ihr Wert p – gemäss dem Verfahren 51 – zu

$$p = 54''9/\text{Jahr}$$

bestimmt. Die übrigen Komponenten sind die sog. Nutationen der Rotationsachse der Erde. Sie erscheinen an der Himmelskugel als elliptische Bewegungen um den mittleren – d.h. nur die Präzessionsbewegung ausführenden – Rotationspol. Die kleinen Hauptachsen dieser Nutationsellipsen liegen auf dem Hauptkreis «mittlerer Rotationspol-Frühlingspunkt». Die grossen Halbachsen liegen auf dem Halbkreis «mittlerer Rotationspol-Ekliptikpol».

Die Perioden einzelner Nutationskomponenten sind identisch mit den verschiedensten Perioden in den orbitalen Mond- und Sonnenbewegungen. Die Hauptkomponente der Nutation hat eine Periode von 18,6 Jahren, was dem Zeitintervall entspricht, das der Mondbahnknoten braucht, um einmal die Ekliptik zu durchlaufen. Es folgen Komponenten mit halbjährigen und halbmonatlichen Perioden und Komponenten, deren Perioden bestimmte lineare Kombinationen der bereits erwähnten sind. Die grosse Halbachse der Hauptkomponente der Nutation wird die Nutationskonstante N genannt. Durch Beobachtungen wurde ihr Wert unabhängig von der Präzessionskonstanten p – gemäss dem Verfahren 51 – zu

$$N = 9''21$$

bestimmt.

Da die Euler'schen Bewegungsgleichungen genau einen unbekannt Parameter – nämlich die dynamische Abplattung H – enthalten (s. 64), ergeben sich die Präzessionskonstante p, die Nutationskonstante N und die Amplituden aller übrigen Nutationskomponenten – als Konstanten der Lösung dieser Bewegungsgleichungen – zu bekannten Funktionen der dynamischen Abplattung H. Diese kann also sowohl aus der Präzessionskonstanten p, als auch aus der Nutationskonstanten N bestimmt werden. Aus den durch Beobachtungen – gemäss dem Verfahren 51 – unabhängig bestimmten Konstanten  $p = 54''9/\text{Jahr}$  und  $N = 9''21$  folgen also zwei dynamische Abplattungen. Wir stellen fest, dass diese um 2 (o/oo) differieren. Entsprechende Untersuchungen zeigen, dass diese Differenz nur durch einen flüssigen Erdkern erklärt werden kann.

69. Die Bewegung der Rotationsachse der Erde gegenüber dem erdfesten Koordinatensystem setzt sich aus zwei Komponenten zusammen.

Die erste Komponente – freie Nutation genannt – hängt nur von den Anfangsbedingungen – d.h. von der Lage der Rotationsachse relativ zu den orthogonalen Achsen der drei zentralen Hauptträgheitsmomente (A, A, C) und von der Geschwindigkeitskom-

ponenten  $\omega_3$  im bestimmten Anfangsaugenblick  $t_0$  ab. An dem mit der Erde fest verknüpften Trägheitsellipsoid erscheint dann die freie Nutation als eine retrograde (die tägliche Bewegung der Himmelskugel ist definitionsgemäss prograd) gleichmässige Kreisbewegung des Rotationspols um den Pol der Achse des maximalen zentralen Trägheitsmomentes mit der Periode von

$$P_E = \frac{2\pi}{\omega_3 H} = 303,6 \text{ Tage}$$

wobei die zweite dynamische Abplattung  $H' = C - A)/A$  aus der Präzessionskonstante zu

$$H' = \frac{H}{1-H} = \frac{C-A}{A} = 1/305,44$$

bestimmt wurde.

Die zweite Komponente ist sehr klein. Ihre Amplitude ist von der Grössenordnung  $0''02$ . Sie wurde die Oppolzer'sche Nutation genannt und ist eine erzwungene prograde Bewegung um den momentanen mittleren – d.h. nur die freie Nutation ausübenden – Rotationspol. Sie setzt sich aus vielen Kreisbewegungen mit quasi täglichen Perioden zusammen.

### Die Polschwankung

70. Wir kehren nun zum interessantesten Thema, nämlich zu der bereits erwähnten freien Nutation, zurück.

Wir wiederholen:

Die Existenz der freien Nutation ist ausschliesslich, d.h. unabhängig vom äusseren Gravitationsfeld, durch die gleichzeitige Gültigkeit der folgenden Relationen bedingt:

$$H = \frac{C-A}{C} \neq 0, \omega_3 \neq 0, \gamma_0 \neq 0,$$

wobei  $\gamma_0$  der zu einem beliebigen Anfangsaugenblick durch die Rotationsachse und die Achse des maximalen zentralen Trägheitsmomentes C der Erde geschlossene Winkel ist.

Sind also diese Bedingungen in einem Augenblick erfüllt, bleiben sie es für alle Zeiten, so wie in 69 beschrieben.

71. Die Genauigkeit der astronomischen Messgeräte reichte noch lange nach Euler nicht aus, um eine freie Nutation des Erdkörpers zu entdecken. Der empirische Nachweis der freien Nutation liess genau 120 Jahre auf sich warten. Diesen Nachweis erbrachte 1884 der Bonner Astronom Küstner. Dieser verwendete für die Bestimmung der Aberrationskonstante die sog. Talkott-Methode. Die Observable dieser Methode ist eine bekannte Funktion der Aberrationskonstanten und der an die momentane Rotationsachse der Erde bezogenen geographischen Breite des Beobachtungsortes. Bei seinen Bemühungen, aus den sich über Jahre erstreckenden Beobachtungen die Aberrationskonstante zu bestimmen, stellte Küstner fest, dass er mit der Annahme, die geographische Breite sei konstant, nicht auskommt. Er musste zulassen, dass sich die geographische Breite von Epoche zu Epoche ändert und stellte somit seine Beobachtungsgleichungen für epochenabhängige Breiten und eine Aberrationskonstante auf. Die Auflösung dieser Gleichungen zeigte, dass die geographische Breite eine jährliche Variation mit einer Amplitude von ca.  $0''2$  aufwies. Dies deutete klar auf eine pe-

riodische Bewegung der Rotationsachse im Erdkörper um die Achse des maximalen zentralen Trägheitsmomentes, also auf die freie Nutation hin. Nur die Periode (1 Jahr) dieser Bewegung stimmte nicht überein mit der Periode von 303,6 Tagen, die Euler aus der Theorie vorhersagte.

Im Jahre 1888 berichtete Küstner am astronomischen Kongress in Salzburg über seine Entdeckung und schlug gleich vor, ein Experiment durchzuführen, das die Existenz der freien Nutation endgültig nachweisen sollte. Er schlug vor, gleichzeitige Breitenbestimmungen in Berlin und Waikiki zu führen. Da die Längendifferenz dieser zwei Stationen ungefähr  $180^\circ$  beträgt, müssten die an diesen Stationen registrierten Breitenschwankungen eine Phasenverschiebung von  $180^\circ$  aufweisen, wenn nur die gemeinsame Ursache dieser Schwankungen die freie Nutation wäre. Dieses Experiment fand im Jahre 1891 statt. Es zeigte sich dabei, dass die Phasenverschiebung der beiden Breitenschwankungen tatsächlich  $180^\circ$  war und dass die Amplitude der Schwankung der Differenz beider Breiten ungefähr  $0''{,}5$  betrug.

72. Durch Küstners Arbeiten und das soeben erwähnte Experiment angeregt, untersuchte der amerikanische Astronom Chandler alle seit Bradley durchgeführten, d.h. die sich über 200 Jahre erstreckenden Breitenbeobachtungen. Er stellte in der Folgen Breitenvariationen fest, die durch Überlagerung zweier Nutationen der Rotationsachse im Erdkörper mit Perioden

$$T_1 = 428 \text{ Tage}$$

$$\text{und } T_2 = 1 \text{ Jahr}$$

entstehen.

73. Dies alles führte 1899 zur Gründung des sog. Internationalen Breitendienstes (Polschwankungsdienstes). Dieser verfügt über fünf Stationen, die alle genau auf  $39^\circ 8'$  nördlicher Breite liegen. Dies hat zur Folge, dass diese Stationen mit der Talkott-Methode die gleichen Fixsterne in ungefähr gleichen Zenitdistanzen beobachten können. Dadurch kann der Einfluss systematischer Fehler in den Katalogpositionen der Fixsterne stark reduziert werden. Die Aufgabe des Breitendienstes wird heute immer mehr dem System der sog. VLBI Stationen anvertraut. Die Genauigkeit der durch dieses System gewonnenen Resultate ist etwa zwei Grössenordnungen höher als jene des klassischen Breitendienstes. Dabei ist jedoch der am Ende des Abschn. 59 geäußerte Vorbehalt zu beachten. Aus der spektralen Analyse der – sich bereits über eine Periode von 90 Jahren erstreckenden – Beobachtungsergebnisse des – inzwischen aus etwa 40 Stationen bestehenden – «Polbewegungsdienstes» ergeben sich die folgenden Nutationen im Erdkörper, die wir von nun an *Polschwankungen* nennen werden:

	Periode	Amplitude
Die Chandler'sche Polschwankung	$T_1 = 431 \text{ Tage}$	$\gamma_1 = 0''{,}15$
Saisonale Polschwankungen	$T_2 = 1 \text{ Jahr}$ $T_3 = \frac{1}{2} \text{ Jahr}$	$\gamma_2 = 0''{,}09$ $\gamma_3 = 0''{,}01$

Die saisonalen Polschwankungen sind erzwungene Komponenten. Ihr Ursprung liegt in saisonalen Bewegungen der Luftmassen, der Ozeane und des Grundwassers. Da nämlich der gesamte Drehimpuls der Erde erhalten bleibt, müssen Änderungen im Drehimpuls der Erdatmosphäre, der Ozeane und des Grundwassers entsprechende Änderungen im Drehimpuls der festen Erde hervorrufen. An der Oberfläche der letzteren werden dann die Polschwankungen registriert.

74. Die Chandler'sche Polschwankung kann nichts anderes als die freie Nutation der Erde sein. Denn man findet keine äussere Anregung mit einer Periode von 431 Tagen. Warum unterscheidet sich aber die Chandler'sche Periode ( $T_1 = 431 \text{ Tage}$ ) so stark (40%) von der Euler'schen ( $T_E = 303,6 \text{ Tage}$ )? Die Antwort auf diese Frage kam bald. Nachdem Chandler seine Entdeckungen publizierte, gab Newcomb (1892) eine qualitative Erklärung der Differenz zwischen diesen zwei Perioden  $T_1$  und  $T_E$ . Er zeigte, dass diese Differenz eine Folge der Elastizität der Erde und der Existenz der Ozeane ist.

75. Die Verlängerung der Euler'schen Periode  $T_E$  als eine Folge elastischer Deformationen der Erde kann anschaulich etwa wie folgt erklärt werden:

1) Die Tatsache, dass die Rotationsachse der Erde mit der Achse des maximalen zentralen Trägheitsmomentes der Erde nicht zusammenfällt, ruft eine Deformation der Erde hervor. Diese besteht aus einem – durch die Zentrifugalkraft erzeugten – Deformationswulst, der dem äquatorialen Wulst der ungestörten Erde überlagert wird.

2) Man kann zeigen, dass dadurch die dynamische Abplattung der Erde nicht geändert wird, wohl aber der Abstand zwischen dem momentanen Rotationspol und dem *Figurenpol* – d.h. dem Pol der Achse des maximalen zentralen Trägheitsmomentes der deformierten Erde. Dieser Abstand wird nun etwa 1,4 mal kürzer als im Falle der ungestörten Erde. (Diese Angaben können – unter Verwendung der aus seismischen Beobachtungen gewonnenen Werten der Elastizitätskonstanten [Schub- und Kompressionsmodul] im Erdinneren – aus der Lösung des entsprechenden Randwertproblems der Elastizitätstheorie hergeleitet werden [Herglotz, Love, u.a.]).

3) Die Euler'sche Starrkörpertheorie der freien Nutation kann somit auch auf den elastischen Körper angewandt werden, wenn nur die Bewegung der Rotationsachse der Erde gegenüber der *momentanen* – d.h. der der deformierten Erde entsprechenden – Figurenachse in sehr kurzen Zeitintervallen betrachtet wird.

4) Da gemäss 2) die Abplattung  $H' = (C-A)/A$  auch nach der Deformation unverändert bleibt, bewegt sich in diesem sehr kurzen Zeitintervall der Rotationspol um den momentanen Figurenpol mit der *Winkelgeschwindigkeit*

$$2 \pi / T_E$$

wobei  $T_E$  die Euler'sche Periode ist. Die *Länge des Bogens*, den der Rotationspol dabei

am Trägheitsellipsoid der Erde umschreibt ist gleich dem Produkt

$$\overline{C'P} \cdot 2 \pi / T_E$$

wobei  $\overline{C'P}$  der Abstand des Rotationspols P vom momentanen Figurenpol C' ist. Betrachtet man diesen Bogen, als ob er durch die Bewegung des Rotationspols P um den Figurenpol C der ungestörten Erde entstanden wäre (was im übrigen auch stimmt, da ja C, C' und P stets auf einer Geraden liegen) und bezeichnet die entsprechende *Winkelgeschwindigkeit* mit

$$2 \pi / T_1$$

so muss dann sein

$$\overline{C'P} \cdot 2 \pi / T_1 = \overline{C'P} \cdot 2 \pi / T_E$$

und hieraus folgt schon, dass

$$T_1 / T_E = \overline{C'P} / \overline{C'P} = 1,42.$$

Setzt man hier  $T_E = 303,6 \text{ Tage}$  ein, ergibt sich für  $T_1$  der Wert 431 Tage, was genau die Chandler Periode ist.

76. Diesem Resultat haften jedoch von Anfang an weitere Zweifel an. Diese beruhen auf der allgemein bekannten Tatsache, dass es in der Natur keinen *ideal elastischen Körper* geben kann.

77. Der letztere wird wie folgt definiert: Wenn an einem ideal elastischen Körper eine mechanische Deformationsarbeit geleistet wird, dann wird sie in diesem Körper ausschliesslich in Form der potentiellen Deformationsenergie (Spannung x Deformation), nicht aber in Form der Wärmeenergie gespeichert.

78. In jedem *reellen* Körper wird aber pro Zeiteinheit immer ein Teil der Deformationsenergie in die Wärmeenergie umgewandelt. Wir nennen dieses Phänomen kurz die *die Energiedissipation*.

79. Verspannt man z.B. in einen massiven Metallblock eine Metallblatfeder und lässt dann diese im Vakuum frei schwingen, so klingen diese Schwingungen bald ab, da die in der Blatfeder im Augenblick ihres maximalen Ausschlages gespeicherte Deformationsenergie teilweise dissipiert – und somit von einer zur anderen Schwingung kleiner wird. Diese Energie ist es aber, die das Schwingen aufrecht erhält. Mit ihrem Verschwinden hört auch die Schwingung auf. Nur die Blatfeder und ihre Halterung werden am Schluss wärmer sein. Aber auch diese Wärme wird in Form von Strahlung (da Blatt im Vakuum!) an die Umgebung abgegeben.

80. Genauso verhält es sich auch mit der Erde. Die *freie* Nutation der Rotationsachse der Erde im Erdkörper ist nur ein *dreidimensionales* Analogon der *freien* Schwingungen unserer Blatfeder. Die Deformationsenergie der durch die freie Nutation hervorgerufenen Deformationen der Erde wird solange dissipiert, bis die freien Schwingungen – die hier eben freie Nutation heissen – aufhören. Die Rotationsachse fällt dann mit der Figurenachse der Erde zusammen und dieser Zustand ist stabil.

Die Astronomen mussten daher wohl oder übel die Frage stellen, warum die freie Nutation

tion – die wir nun die Chandler'sche Polschwankung nennen – nicht längst abgeklungen sei.

Die dissipativen Eigenschaften der Erde können durch den sog. Gütefaktor  $Q' = (Q/\pi)$  oder  $Q'' = (Q/2\pi)$  charakterisiert werden.  $Q'$  bzw.  $Q''$  gibt dabei die Anzahl der freien Schwingungen an, während deren sich die Amplitude bzw. die Energie dieser Schwingungen um den Faktor  $1/e \approx 0,37$  verringert.

Der Wert des Gütefaktors  $Q''$  ist aus den Beobachtungen grosser Erdbeben ermittelt worden. Denn ein Erdbeben ist nur eine andere Form (oder sog. Mode) der freien Schwingungen der Erde, die – zum Glück – auch abklingen. Der aus Erdbebenbeobachtungen gewonnene Wert des Gütefaktors  $Q''$  bewegt sich zwischen 250 bis 600 für den Erdmantel und ist grösser als 2000 für den Erdkern. Mit diesen Werten des Gütefaktors  $Q''$  hätte die Chandler'sche Polschwankung nach etwa 100 Jahren abklingen müssen. Das tat sie aber nicht und dies zumindest seit Bradleys Zeiten – wie Chandler zeigte. Warum? Das wissen wir bis heute nicht, obwohl diese Frage beinahe 100 Jahre lang intensiv studiert wurde. Die Existenz der Chandler'schen Polschwankung bleibt also vorläufig ein Rätsel.

## Unregelmässigkeiten der Rotation der Erde

**81.** Zum Schluss möchte ich noch einiges über die sog. säkulare Verlangsamung der Erdrotation infolge der Flutreibung sagen. Im Jahre 1932 fand Spencer Jones, dass die aus den orbitalen Bewegungen einzelner Sonnensystemkörper – als mit der Newton'schen Zeit parametrisierten (kotierte) Kurven – ermittelten Zeiten zwar untereinander gut übereinstimmten, aber von der aus der Rotation der Erde – mittels des Starrkörpermodells – abgeleiteten «Zeit» signifikant abwichen. Dies führte zur Entdeckung der sog. «Unregelmässigkeiten» der Rotation (Winkelgeschwindigkeit) der Erde und – für himmelsmechanische Zwecke – zur Annahme der sog. *Ephemeriden Zeit* (E.T.). Diese ist ein Analogon der schon früher erwähnten Kepler'schen Zeit (s. 12). Der Unterschied zwischen diesen beiden Zeiten liegt in dem physikalischen Modell des Systems (Sonnensystem), dem diese Zeiten durch seine Beobachtungen entnommen werden. Die Ephemeridenzeit hätte somit ebenso gut die Newton'sche Zeit genannt werden können.

**82.** Daraus ist ersichtlich, dass das Massenpunktmodell des Sonnensystems der Realität besser angepasst ist als das Starrkörpermodell der Erde. Dies deswegen, weil die Schwerpunkte der Sonnensystemkörper ein physikalisch gut isoliertes System repräsentieren, womit gemeint ist, dass die eigentliche Beschaffenheit der Sonne und der Planeten als endlicher Körper praktisch irrelevant für die relative Bewegungen ihrer Schwerpunkte ist. Wir haben diese Eigenschaften des Sonnensystems bereits für die Festlegung des Inertialsystems in Betracht gezogen (siehe 36 bis 38).

**83.** Die Unregelmässigkeiten der Rotation der Erde setzen sich aus drei physikalisch verschiedenen Komponenten zusammen:

1) Der *periodischen Komponente*, die eine Folge saisonaler atmosphärischer Bewegungen ist. Ihre Ursache ist also die gleiche wie jene der jährlichen Polschwankung. Die Periode dieser Komponente ist also 1 Jahr und die Amplitude beträgt etwa  $0^s,03$ .

2) Die zweite Komponente stellt *unregelmässige Schwankungen* der Winkelgeschwindigkeit der Rotation der Erde dar, die höchst wahrscheinlich durch elektromagnetische Kopplung des Erdmantels und des flüssigen Erdkerns hervorgerufen werden. Es ist durchaus wahrscheinlich, dass dies auch die Ursache der Unregelmässigkeiten in der Chandler'schen Polschwankungskurve ist und vielleicht sogar die diese Polschwankung aufrechterhaltende Ursache.

3) Die dritte Komponente ist eine *gleichmässige Verlangsamung* der Rotation der Erde oder anders ausgedrückt, Verlängerung der Tageslänge. Dieser Komponente widmen wir die letzten Betrachtungen dieses Aufsatzes.

## Die Flutreibung

**84.** Wären die Erde und der Mond zwei starre Kugeln, dann bliebe jeder der beiden *Eigendrehimpulse*  $E_1$  und  $E_2$  während der Bewegung konstant. Wählte man dazu noch als Koordinatennullpunkt den Schwerpunkt dieses Körpersystems, so bliebe auch jeder der beiden *Bahndrehimpulse*  $B_1$  und  $B_2$  konstant.

**85.** Lässt man nun zu, die beiden Körper seien elastisch, so erfahren sie – infolge der Inhomogenität der eigenen Gravitationsfelder – Gezeitendeformationen, deren Symmetrieachse (zumindest in erster Näherung) identisch mit der Verbindungsgeraden der Schwerpunkte dieser beiden Körper ist. Da diese Körper weiterhin rotieren und die Lagen der Deformationswülste durch die Verbindungsgerade beider Körper gegeben sind, wandern diese Wülste gegenüber den jeweiligen körperfesten Bezugssystemen mit der negativ genommenen Winkelgeschwindigkeiten der Rotationen dieser Körper *gegenüber* der erwähnten Verbindungsgeraden.

Der Deformationswulst erscheint dann vom kinematischen Standpunkt her als Ebbe und Flut, so wie wir sie auf der Erde beobachten.

**86.** Bei jedem Umlauf des Deformationswulstes wird ein Teil der Deformationsenergie dissipiert. Da diese aber stets durch die gravitationelle Wirkung des zweiten Körpers nachgeliefert wird (d.h. die Deformation wird erneuert) muss die Energiedissipation auf Kosten der Energie der Eigenrotation gehen.

**87.** Das heisst, die Eigendrehung der zeitlich deformierten Körper wird gebremst. Dadurch nehmen auch die Eigendrehimpulse  $E_1$  und  $E_2$  beider Körper ab. Da aber der gesamte Drehimpuls eines geschlossenen Systems erhalten bleibt (eine Folge der drei Newton'schen Bewegungsgesetze!), muss die Verminderung der Eigendrehimpulse  $E_1$  und  $E_2$  eine entsprechende Vergrösserung der Bahndrehimpulse  $B_1$  und  $B_2$  bewirken.

**88.** Als Folge des Anwachsens der Bahndrehimpulse  $B_1$  und  $B_2$  können die beiden Körper keine Kepler Ellipsen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt mehr beschreiben. Denn für diese sind ja  $B_1$  und  $B_2$  konstant. Die beiden Körper bewegen sich daher so, dass ihr Abstand mit der Zeit *zunimmt* (der Beweis wird unter 93 bis 98 erbracht). Dieser Vorgang hält so lange an, bis die zeitlichen Deformationswülste gegenüber den entsprechenden körperfesten Bezugssystemen ruhen und die beiden – nun konstant deformierten – Körper sich somit wie starre Körper verhalten. Dies ist aber nur dann möglich, wenn sie *synchron* mit dem orbitalen Umlauf rotieren. Die Bahnexzentrizität und die Bahnneigung zum Erdäquator werden daher auch «dissipiert» und beide Körper bewegen sich auf Kreisbahnen. Es wird von nun an kein Eigendrehimpuls mehr in den Bahndrehimpuls umgewandelt, und wir sagen dann, die beiden Körper befänden sich im *Rotationsgleichgewicht*.

**89.** Der Mond, dessen Deformation viel grösser ist (da ja die Gezeitenkräfte der Erde viel grösser sind) und dessen maximaler zentraler Trägheitsmoment um viele Grössenordnungen kleiner ist als der der Erde (da ja seine Masse und sein Radius viel kleiner sind) hat längst den «Zustand des Rotationsgleichgewichtes» bezüglich Eigenrotation erreicht. Deswegen wendet er uns stets die gleiche Seite zu.

**90.** Andererseits wird auch die Erde infolge der Gezeitenreibung (Energiedissipation) in ihrer Eigenrotation gebremst. Ihr Eigendrehimpuls wird in den Bahndrehimpuls des Systems Erde, Mond transferiert, wodurch sich der Abstand Erde-Mond vergrössert (s. 93 bis 98). Dieser Vorgang verläuft sehr langsam und macht etwa *3,7 cm pro Jahr* aus.

**91.** Dieser Wert ist heute durch Laserentfernungsbeobachtungen zu den am Mond (während der Apollo-Mission) aufgestellten Retroreflektoren messbar. Dadurch kann der auf die Flutreibung zufallende Anteil der Unregelmässigkeiten der Rotation der Erde direkt gemessen werden. Ihm entspricht eine Verlängerung der Tageslänge von 2 Millisekunden in hundert Jahren oder eine relative Verringerung  $d\omega/\omega$  der Winkelgeschwindigkeit der Rotation der Erde von  $7,9 \cdot 10^{-13}$ .

**92.** Dieser kleine Wert konnte aus Aufzeichnungen *historischer* Sonnenfinsternisse gewonnen werden. Denn die alten Astronomen haben jeweils die Rotationszeit des Augenblicks der maximalen Verfinsternung notiert. Die diesem Augenblick entsprechende Ephemeridenzeit (oder Newton'sche Zeit: s. 81) kann hingegen aus den Bewegungsgesetzen des Mondes und der Sonne abgeleitet werden. Das Bewegungsgesetz des Mondes muss jedoch den Flutreibungsterm enthalten. Dieser äussert sich dann in der mittleren Länge des Mondes durch einen Term von der Form  $k \cdot (ET)^2$ . Der Wert des Faktors  $k$  ergibt sich dabei aus Beobachtungen zu  $k = -20,4 \text{ sec}/(100 \text{ Jahre})^2$ . Die zweier Finsternissen entsprechende Differenz  $(ET_1 - UT_1) - (ET_2 - UT_2)$ , dividiert durch das Zeitintervall  $(ET_2 - ET_1)$  zwischen ihnen, ergibt den Wert

der relativen Änderung der Winkelgeschwindigkeit der Eigenrotation der Erde.

93. Betrachten wir nun ein vereinfachtes Modell der Erde als eine homogene Kugel mit der Masse  $M_1$  und dem Radius  $R$ . Da dieses Modell «heute» mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = 2 \pi / \text{Tag}$$

rotiert, ergibt sich ihr Eigendrehimpuls  $E_1$  zu:

$$E_1 \cong \frac{2}{5} M_1 R^2 \Omega$$

94. Der Bahndrehimpuls des Systems Erde-Mond ist – wegen des grossen Verhältnisses  $M_1/M_2 \cong 83$  der Masse  $M_1$  der Erde zur Masse  $M_2$  des Mondes – praktisch identisch mit dem Bahndrehimpuls  $B_2$  des Mondes in Bezug auf die Erde. Daraus folgt, wenn  $r \cong 60 \cdot R$  die «heutige» Entfernung Erde-Mond und  $\omega \cong \Omega/28$  die «heutige» mittlere orbitale Winkelgeschwindigkeit (die sog. mittlere Bewegung) des Mondes ist, dass der «heutige» Bahndrehimpuls  $B_2$  des Mondes gleich

$$B_2 = M_2 r^2 \omega = \frac{M_1}{83} (60 \cdot R)^2 \frac{\Omega}{28} \cong 4 E_1$$

ist.

95. Für eine Kreisbahn folgt aber aus  $B_2 = M_2 r^2 \omega$  (mit  $G =$  Gravitationskonstante)

$$r = \frac{B_2}{M_2 (r\omega)} = \frac{B_2 \omega}{M_2 (r\omega^2)} = \frac{B_2 \omega}{M_2 (GM_1 / r^2)}$$

$$= \frac{B_2 (\omega r^2)}{GM_1 M_2} = \frac{B_2 (M_2 \omega r^2)}{GM_1 M_2^2}$$

und hieraus mit  $B_2 = M_2 r^2 \omega$

$$96. r = c (B_2)^2, \text{ wobei } c = 1/(GM_1 M_2^2).$$

97. Nehmen wir nun Einfachheit halber an, die Mondbahn liege in der Erdäquatorebene. Das erlaubt uns, anstelle der Vektoren  $\vec{E}_1$  und  $\vec{B}_2$  nur deren Beträge  $E_1$  und  $B_2$  zu betrachten. Durch die Übertragung des gesamten «heutigen» Eigendrehimpulses  $E_1$  der Erde auf den Bahndrehimpuls  $B$  des Systems Erde-Mond, erreicht daher dieser den Wert

$$B = B_2 + E_1 \cong B_2 + \frac{1}{4} B_2 = \frac{5}{4} B_2,$$

wobei hier 94 berücksichtigt wurde.

98. Das heisst aber, dass der Bahndrehimpuls des Systems Erde-Mond gegenüber seinem heutigen Wert  $B_2$  höchstens um den Faktor  $5/4 = 1,25$  zunehmen kann. Aus 96 und 97 folgt dann, dass dadurch der Abstand des Mondes von der Erde gegenüber seinem heutigen Wert  $r$  höchstens um den Faktor

$$r_{\max}/r = (B/B_2)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 1,6$$

zunimmt.

**Verdankungen:**

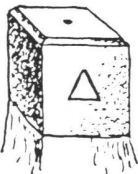
Für die sprachliche Korrektur möchte ich mich bei den Herren Prof. Schürer und Dr. Gurtner und für die Reinschrift des Manuskripts bei Frau Strickler herzlichst bedanken.

Adresse des Verfassers:

PD Dr. Ivo Bauersima  
Astronomisches Inst. der Universität Bern  
Sidlerstrasse 5, CH-3012 Bern



## GRANITECH AG MÜNSINGEN



Stegreutiweg 2  
3110 Münsingen  
Telefon 031/92 45 45

Depot Willisau  
Tel. 045/81 10 57

Wir liefern:

### Granit-Marchsteine

12 x 12 60–70 cm Fr. 11.80  
14 x 14 60–70 cm Fr. 12.50

### Kleinpflaster

8 x 11 cm  
1. Kl. grau-blau Fr. 275.– p. t.  
2. Kl. grau-blau Fr. 245.– p. t.  
2. Kl. gemischt Fr. 235.– p. t.

**Granit- und Marmorküchen-  
abdeckungen** ab Fr. 1900.–

grössere Mengen  
Spezialofferte verlangen

Eigener Steinbruchbetrieb  
Eigenes Verarbeitungswerk

Depuis le 1894

**GRANITI  
MAURINO**

Tel. 092/72 13 22/3  
Telex 846 453 masa ch

CH-6710 Biasca

**Tous les  
travaux en  
granit**

Brevet No 647 193



## La borne Maurino

L'expérience, la recherche et l'organisation nous permet de vous présenter de nouvelles bornes:

### Dimensions sur demande

Normale: tête 12 x 12; 13 x 13; 14 x 14 cm  
Hauteur 60 cm

Trou central ou croix gravée

Surface scié ou bouchardée fin, les premiers 3 ou 4 cm en haut des 4 façades sciés ou travaillés à la main, le restant brut.

Exécution en granit clair du Tessin 195,9 N/mm<sup>2</sup> (= 1998 Kp/cm<sup>2</sup>) – Degré d'absorption de l'eau 2,2 volume % – Densité 2653 kg/m<sup>3</sup>.

### Avantages de pose

La surface plate permet de bien utiliser le niveau d'eau.

La base plate permet une meilleure pose et une parfaite stabilité.

### Avantages après la pose:

La surface lisse ne retient pas la saleté de manière que la borne reste toujours bien visible même parmi d'autres pierres.

Les côtes brutes adhérent mieux au terrain donc difficulté de l'arracher.

La base plate permet une égale distribution des pressions mécaniques (voitures, tracteurs etc...) même dans les terrains marécageux.

