

**Zeitschrift:** Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

**Band:** 87 (1989)

**Heft:** 3

**Artikel:** Höhenbestimmung aus Schweremessungen : Rückblick und Ausblick

**Autor:** Embacher, W.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-234037>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 20.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Höhenbestimmung aus Schweremessungen, Rückblick und Ausblick

W. Embacher

Der Verfasser versucht, rückblickend auf seine Arbeiten der letzten Jahre, die grundsätzlichen neuen Gedanken noch einmal aufzuzeigen und die Höhenbestimmung aus Gravimetermessungen ausführlich zu erklären. Die Folgerungen aus den neuen Ideen werden aufgezeigt.

*S'appuyant sur ses travaux des dernières années, l'auteur tente de mettre en évidence les idées fondamentalement nouvelles et d'expliquer de façon détaillée la détermination d'altitudes à partir de levés gravimétriques. De plus il décrit les conséquences de ces nouvelles idées.*

## 1. Einleitung

Messen heisst vergleichen. Dazu gehören mindestens zwei reale Dinge, von denen eins praktisch unveränderlich oder konstant sein muss. Ist das nicht der Fall, wären einander widersprechende Aussagen möglich. Es gibt also keine eindeutige Messung ohne ideale Messungsbasis. Die Feststellung der idealen Konstanz muss nach dem Gesetz der «Pragmatischen Ordnung» [1] der Messung vorangehen.

Es ist sinnvoll, komplizierte Vorgänge oder Gebilde auf einfachere zu beziehen, d.h. in Bezug auf einfachere zu messen. In der Geodäsie zeichnet sich danach der Weg ab, Punkte der tatsächlichen, also der gestörten Niveaufläche, welcher verschiedene analytische Flächen angehören, auf eine gemeinsame ungestörte Fläche zu beziehen, die von der Natur vorgegeben und sowohl physikalisch, als auch mathematisch definiert ist. Diese Fläche wäre eine ideale Messungsbasis.

H. Bruns hat bereits vor 100 Jahren eine solche Fläche definiert. Er bestimmte die Funktion U als die angemessenste erste Approximation für die Kräftefunktion W [2]. Die numerischen Koeffizienten im Ausdruck U erhält man, wenn man mit Hilfe von U das «Clairaut'sche Theorem» ableitet. Je nach dem Grad der Annäherung in der Reihenentwicklung unterscheidet man Niveausphäroide n-ten Ranges. Die einzige notwendige Voraussetzung ist die, dass man die Störfunktion  $T = W - U = 0$  setzen darf. Irgendwelche Hypothesen über die Anordnung der Massen im Inneren der Erde sind nicht notwendig. Der Verfasser hat in seiner Arbeit: «Die Bestimmung der orthometrischen Korrektur des geometrischen Nivellements aus Lotabweichungen und aus dem Störpotential T» [3] gezeigt, wie man das Störpotential T an der physischen Erdoberfläche in Bezug auf U bestimmen kann. Bezeichnen wir den Abstand eines Punktes der physi-

schen Erdoberfläche von der oben definierten Modellfläche entgegengesetzt zur Richtung ihrer Lotlinie als Höhe dieses Punktes, so zeigt der Verfasser, wie man durch relative Schweremessungen diese Höhe erhält.

## 2. Grundlagen für das «Dynamische Nivellement»

Das Gravimeter dient zum Messen von Schwereunterschieden. Mit Hilfe eines Dynamometers, eines Beschleunigungsmessers, einer Masse in Verbindung mit einer Feder, wird die Erdbeschleunigung, bzw. die Schwere gemessen. Der Verfasser leitet aus Schwereunterschieden die Höhe über einer mathematisch-physikalisch definierten Bezugsfläche ab. Es wurde daher für diese Art der Höhenbestimmung der Name «Dynamisches Nivellement» gewählt.

Die ersten experimentellen und theoretischen Erkenntnisse für diese Art der Höhenbestimmung wurden im Zuge von Gradientenmessungen auf einem Gravimeterversuchsfeld in den sechziger Jahren auf dem Buschberg im nördlichen Niederösterreich gewonnen. Einige dieser Erkenntnisse aus der wissenschaftlichen Arbeit [4] seien hier angeführt.

Der innere und der äussere Horizontalgradient an der Trennfläche zweier Medien verschiedener Dichte sind entgegengesetzt gerichtet und stehen senkrecht auf den Linien gleicher Höhen. Der vertikale Störgradient, welcher durch die Wirkung der Topographie entsteht, hat längs einer Falllinie eines schrägen Hanges eine Nullstelle. D.h., dass an dieser Nullstelle der Freiluftgradient gleich dem Normalgradienten ist. Es muss also die Krümmung, welche vom Vertikalgradienten abhängig ist, an dieser Stelle gleich der normalen Krümmung sein. Das Störpotential T und damit der Abstand der gestörten von der

ungestörten Fläche im Oberflächenpunkt lassen sich berechnen. Es sei hier noch einmal auf die Arbeit [3] des Verfassers verwiesen.

Die Fundamentalgleichung der physikalischen Geodäsie lautet

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial h}\right) + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right) T = \Delta g. \quad 1)$$

Wie in der Arbeit des Verfassers: «Ein Versuch zur Bestimmung des gestörten Schwerevektors aus lokalen Gravimetermessungen» [5] gezeigt wird, kann aus Gleichung 1) unter Voraussetzung der Konstanz des anomalen vertikalen Schweregradienten in derselben Lotlinie die Gleichung

$$h_s = \frac{g - \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \cdot \zeta}{\frac{\partial g}{\partial h} - 2 \frac{\partial \gamma}{\partial h}}. \quad 2)$$

abgeleitet werden. Dies ist die Ausgangsgleichung für alle weiteren Überlegungen. Lässt man zunächst den Term von Bruns

$\frac{\partial \gamma}{\partial h} \zeta$  weg, so kann durch Messung der Schwere g und Berechnung des zugehörigen Wertes von  $\gamma_0$  auf dem Bezugsniveausphäroid die Höhe  $h_s$  über der Bezugsfläche nach Gleichung 2) berechnet werden, sofern der Bezugsgradient

$$\left(\frac{\partial g}{\partial h} - 2 \frac{\partial \gamma}{\partial h}\right) \text{ bekannt ist.}$$

Die Suche nach einer voraussetzungslosen Höhenbestimmung aus Schweremessungen muss also auf die Bestimmung des Bezugsgradienten aus lokalen Schwere- und Lagemessungen zurückgeführt werden.

Bekanntlich müssen im störungsfreien zunächst ruhend gedachten Erdmodell die Niveauflächen auch Flächen gleicher Dichte sein, d.h. eine Dichteänderung ist nur senkrecht zur Niveaufläche möglich. Es tritt also kein Horizontalgradient auf.

Aus der oben schon zitierten Arbeit [3] des Verfassers entnehmen wir die Gleichung für den Horizontalgradienten  $\frac{\partial g}{\partial s}$ :

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \left(\frac{\Delta g}{\Delta h} + \frac{\partial g}{\partial h}\right) \cdot \frac{\Delta h}{\Delta s} \quad 3)$$

Der Horizontalgradient ist Null, wenn

1.  $\frac{\partial g}{\partial h} = -\frac{\Delta g}{\Delta h}$ , oder wenn
2.  $\Delta h = 0$  ist, d.h. wenn das Gelände horizontal ist.

# Partie rédactionnelle

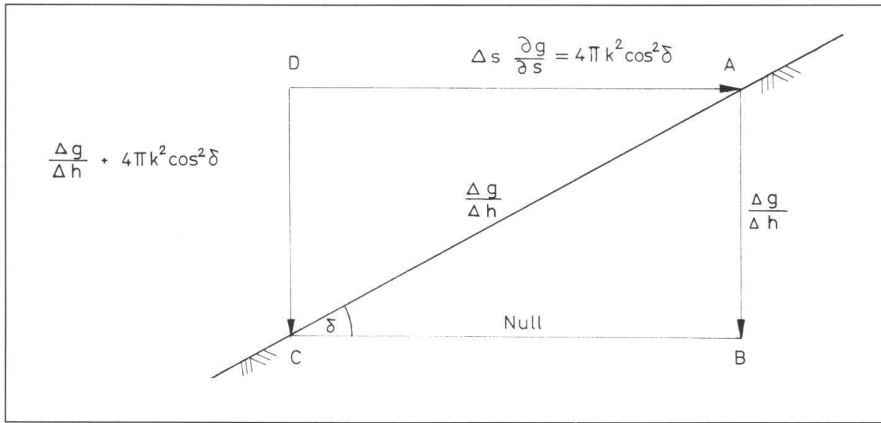


Abb. 1

Wir fassen in Abb. 1 die Linie AC als Schnitt eines Hanges auf, der sich senkrecht zur Zeichenebene von  $+\infty$  bis  $-\infty$  erstrecken soll, dessen Geländewinkel  $\delta$  oder dessen Dichte  $\sigma$  sei, während die Dichte ausserhalb der Linie AC Null ist. Die Entfernung  $AB = CD$  beträgt 1 m, also die Längeneinheit.

Nehmen wir an, der innere Horizontalgradient sei Null, dann ist nach Bruns der äussere Horizontalgradient

$$\frac{\partial g}{\partial s} = 4\pi k^2 \sigma \sin \delta \cos \delta \quad (4,1)$$

und die Zunahme der Schwerkraft von D nach A beträgt  $4\pi k^2 \sigma \cos^2 \delta$ , während die Zunahme der Schwerkraft innerhalb der Trennfläche

$$V_i = \frac{\Delta g}{\Delta h} \quad (4,2)$$

pro Meter sein muss.

Wie wir aus dem Dreieck ACD sehen, ist bei dieser Annahme die Vektorsumme  $\frac{\partial g}{\partial h}$

$$\frac{\partial g}{\partial h} = \frac{\Delta g}{\Delta h} + 4\pi k^2 \sigma \cos^2 \delta \quad (5)$$

Für unser Modell des schrägen Hanges können wir die Aussage treffen, dass im allgemeinen die Gesamtzunahme der Schwere an der Trennfläche

$$\frac{\partial g}{\partial h}, \text{ vermindert um } \frac{\Delta g}{\Delta h} \text{ und } 4\pi k^2 \sigma \cos^2 \delta$$

nicht Null ist, sondern gleich dem vernachlässigten unbekanntem inneren Horizontalgradienten, multipliziert mit der Cotangente des Geländewinkels.

### 3. Die gleichseitige Hyperbel als Bezugsgradientenlinie

Vernachlässigen wir in Glg. 2) den Term von Bruns, so erhalten wir die Gleichung:

$$h \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial h} - 2 \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right) = (g - \gamma_0) = \text{const.} \quad (2,1)$$

Dies ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, wenn man

$$\left( \frac{\partial g}{\partial h} - 2 \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right) \text{ und } h \text{ als Koordinaten, d.h.}$$

als Abstände ihrer Punkte von den zueinander senkrechten Asymptoten auffasst. In Abb. 2 wurde die gleichseitige Hyperbel für eine gegebene Messungsdifferenz  $(g - \gamma_0)$ , für angenommene Werte von

$$\left( \frac{\partial g}{\partial h} - 2 \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right) \text{ und zugehörige Werte von } h$$

gezeichnet. Das Bild der Funktion 2,1) bleibt eine gleichseitige Hyperbel, auch wenn die Ordinaten- und Abszisseneinheiten verschieden sind. Wir wählen als Ein-

heit für die x-Achse mgal.  $10^{-3}$  und für die y-Achse die Einheit für das Längenmass.

Nachdem  $\frac{\Delta g}{\Delta h}$  und der Geländewinkel  $\delta$

gemessen und die Dichte  $\sigma$  bestimmt wurde, wird der Bezugsgradient aus Glg. 5 berechnet und damit aus Glg. 2 die Höhe  $h'$  bestimmt und der Punkt P' aufgetragen.

Betrachten wir noch einmal Abb. 2:

Wir sehen, dass sich der Bezugsgradient aus dem doppelten konstanten Freiluftgradienten  $2 \frac{\partial \gamma}{\partial h}$ , der gemessenen Schwere-

zunahme  $\frac{\Delta g}{\Delta h}$  und der Grösse

$4\pi k^2 \sigma \cos^2 \delta$  zusammensetzt. Diese Grösse, nach Bruns die Differenz der Vertikalgradienten, stellt offenbar den Einfluss der Topographie auf den Bezugsgradienten dar. Es muss also noch der Einfluss der Differenz der Horizontalgradienten auf den Bezugsgradienten zur Bestimmung der Höhe  $h$  berücksichtigt werden. Es ist dies die Grösse  $P\bar{P}$  in Einheiten mgal.  $10^{-3}$ . Die Strecke  $P\bar{P}$  wird berechnet mit

$$P\bar{P} = 4\pi k^2 \sigma \sin \delta \cos \delta \tan \alpha, \quad (6)$$

wobei der Winkel  $\alpha$  genähert der Komplementärwinkel der Steigung der Hyperbel im Punkt P' ist.

Damit ergibt sich die Höhe des Messungspunktes P mit:

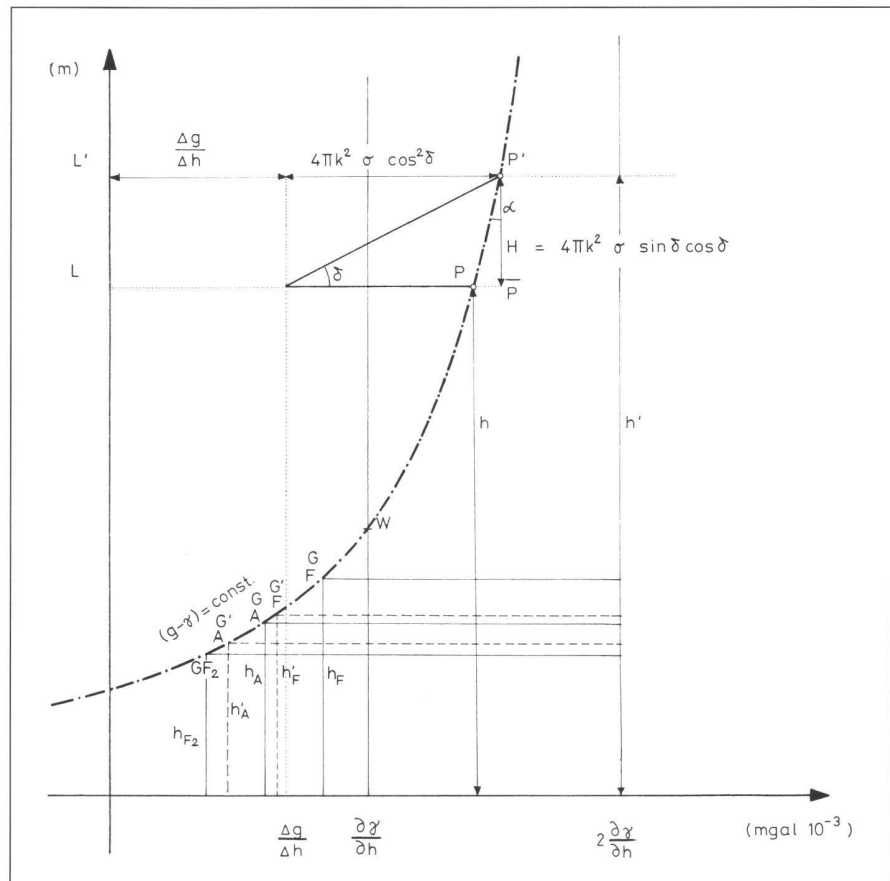


Abb. 2

$$h = \frac{(g - \gamma_0)}{L P - 2 \frac{\partial \gamma}{\partial h}} = \frac{(g - \gamma_0)}{\left( L' P' - 4 \pi k^2 \sigma \sin \delta \cos \delta \tan \alpha \right) - 2 \frac{\partial \gamma}{\partial h}} \quad 7)$$

Da wir den Höhenmassstab in m gewählt haben, ergibt sich die Höhe h auch mit

$$h = h' - 4 \pi k^2 \sigma \sin \delta \cos \delta. \quad 8)$$

Da durch den Punkt W der Hyperbel mit der Abszisse  $x = \frac{\partial \gamma}{\partial h}$  die Symmetrieachse der gleichseitigen Hyperbel verläuft, ist zur Berechnung von Höhen

$$h > \frac{g - \gamma_0}{\frac{\partial \gamma}{\partial h}}$$

der Nenner wie in Glg. 7) zu verwenden, für

$$h < \frac{g - \gamma_0}{\frac{\partial \gamma}{\partial h}}$$

ist als Nenner der Bezugsgradient, ohne Ergänzung auf den doppelten Freiluftgradienten, zu nehmen.

In der Arbeit: «Über den Einfluss der Schwere auf die Höhe» [6] sind auf Seite 358 zahlreiche Rechenbeispiele für diese Höhenbestimmung angeführt. Die in Spalte 9 aufgezeigten Differenzen zur Sollhöhe sind verhältnismässig gross. Der Grund hierfür ist in der Annahme zu suchen, dass der innere Horizontalgradient Null ist.

## 4. Ein Versuch, den Höhenunterschied zweier Punkte derselben Lotlinie zu bestimmen

Wir bilden nach Glg. 2) unter Weglassung des Terms von Bruns die Differenz der Höhen zweier Punkte der physischen Erdoberfläche

$$h_2 - h_1 = \frac{g_2 - g_1 + \Delta \gamma_0}{\frac{\partial g_2}{\partial h} - 2 \frac{\partial \gamma}{\partial h}} + \frac{\left( \frac{\partial g_1}{\partial h} - \frac{\partial g_2}{\partial h} \right) h_1}{\frac{\partial g_2}{\partial h} - 2 \frac{\partial \gamma}{\partial h}}$$

In der Arbeit «Das Dynamische Nivellement» [7] (Seite 120) hat der Verfasser gezeigt, dass bei bekannten Bezugsgradienten der Abstand des Folgepunktes von der Bezugsfläche auf cm-Genauigkeit berechnet werden kann.

Nehmen wir die beiden Messpunkte  $P_1$  und  $P_2$  in derselben Lotlinie an, wobei sich

$P_1$  an der Oberfläche befindet und der Punkt  $P_2$  an der Trennfläche des Mediums mit der Dichte  $\sigma_1$  und der Dichte  $\sigma_2$  (z.B. Sand und Fels), ergibt sich die Höhe  $h_2$  des Punktes  $P_2$  mit

$$h_2 = \frac{(g_1 - \gamma_0 - h_1 \left( \frac{\partial \gamma}{\partial h} - 4 \pi k^2 \sigma_1 \right))}{\frac{\partial g_1}{\partial h} - \left( \frac{\partial g_1}{\partial h} - \frac{\partial g_2}{\partial h} \right) - \left( \frac{\partial \gamma}{\partial h} - 4 \pi k^2 \sigma_1 \right)} \quad 10)$$

Multiplizieren wir obige Gleichung mit dem Nenner und berücksichtigen wir die Topographieeffekte, so geht die Glg. 10) über in Glg.

$$h_2 = \frac{\left( |g_1 - \gamma_0| + |h_2 - h_1| \left( \frac{\partial \gamma}{\partial h} - 4 \pi k^2 \sigma_1 \right) + |T_2 - T_1| \right)}{\frac{\partial g_1}{\partial h} - \left( \frac{\partial g_1}{\partial h} - \frac{\partial g_2}{\partial h} \right)} \quad 10,1)$$

Die Differenz der Wirkung der Topographie ( $T_2 - T_1$ ) geht bei geringem Höhenunterschied gegen Null, so dass wir für den Zähler die unbekannte Schweredifferenz ( $g_2 - \gamma_0$ ) setzen können, wenn wir den Ausdr.

$$(h_2 - h_1) \left( \frac{\partial \gamma}{\partial h} - 4 \pi k^2 \sigma_1 \right)$$

als Reduktion der Schwere von  $P_1$  auf  $P_2$  auffassen, und wir erhalten für Höhen

$$h < \frac{g - \gamma_0}{\frac{\partial \gamma}{\partial h}}$$

(siehe Abschnitt 3) die Gleichung

$$h_2 = \frac{g_2 - \gamma_0}{\frac{\partial g_2}{\partial h}} \quad 10,2$$

In der Gleichung 10,1) kommt die unbekannte Höhe  $h_2$  auch rechts vor. Die Lösung erfolgt durch Iteration. Da die Diffe-

renz ( $h_2 - h_1$ ) gegenüber den Höhen  $h_1$  und  $h_2$  sehr klein ist, genügt meist eine dritte Durchrechnung.

Die Bestimmung des Gradienten  $\frac{\partial g_2}{\partial h}$

soll an Hand der Abb. 2 und Abb. 3 erfolgen.

Abb. 3 zeigt ein der Lage-, Höhe- und Schwere nach vermessenes im gleichen

Lage- und Höhenmassstab gezeichnetes Profil beim Brentenberg im Salzachtal an der Tauernautobahn.

Das Profil wurde vor dem Tunnelbau in der

Falllinie des Brentenberges etwa in der Gegend der linken Tunnelröhre angelegt. Die Punkte 1 bis 13 befanden sich auf der Aufschüttung über dem Fels, bei Punkt 14 war der anstehende Fels. Der Dichteunterschied Fels-Aufschüttung  $\Delta \sigma$  betrug etwa drei bis vier Zehntel.

Bei Punkt 10 wurde eine Tiefenbohrung durchgeführt, welche bei etwa 28 m auf Fels gestossen ist. Beim Tunnelvortrieb ergab sich die tatsächliche Felssohle etwa beim Punkt «S».

Da die Gradienten an den Messungspunkten mit den vorgegebenen Höhen berechnet wurden, müssen diese, nach dem oben gesagten, frei vom Einfluss der Differenz der Horizontalgradienten sein. Wir wollen diesen Einfluss mit  $LA_1$  bezeichnen. Im Abschnitt 3) wurde die Wirkung der Horizontalgradientendifferenz mit  $PP$  bezeichnet.

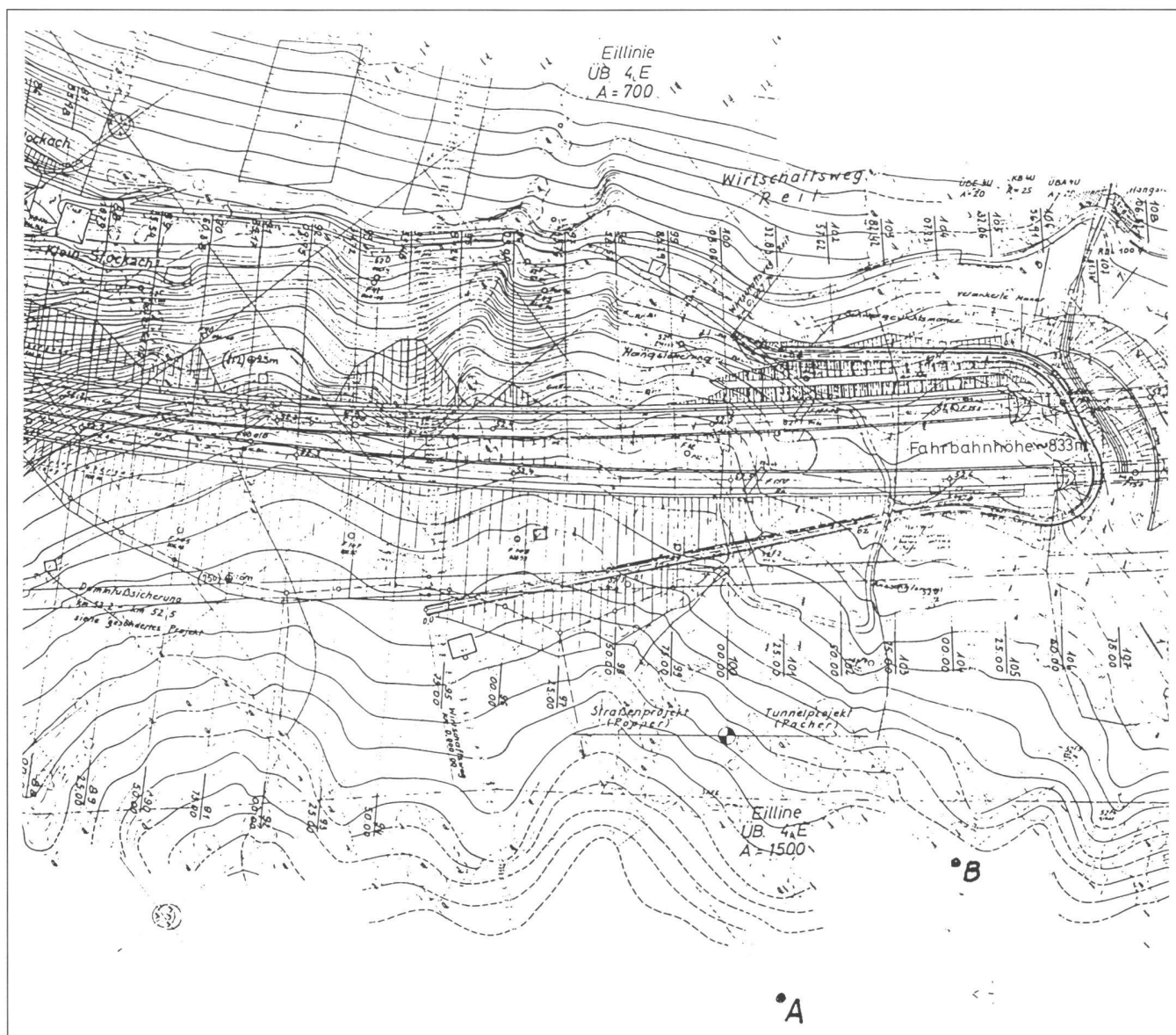
$$PP = 4 \pi k^2 \sigma \sin \delta \cos \delta \tan \alpha. \quad 6)$$

9) Führt man für den Horizontalgradienten Glg. 3) ein, so geht Glg. 6) über in

$$PP = LA_1 = \frac{\partial g}{\partial s} \tan \alpha = \left( \frac{\Delta g}{\Delta h} + \frac{\partial g}{\partial h} \right) \frac{\Delta h}{\Delta s} \tan \alpha. \quad 6,1)$$

Damit können die Werte der  $LA_1$  berechnet werden.

Um die Übersichtlichkeit in Abb. 2 nicht zu stören, wurden dort die am Brentenbergprofil berechneten Gradienten  $\frac{\partial g}{\partial h}$  mit G



**Bild 4a: Tauernautobahn A10, Baulos 9 «Reit». Lage- und Höhenplan (5 m Schichtenlinien) mit eingezeichneter Autobahntrasse, Punkte A und B ident zu A'B' in Abbildung 4b.**

bezeichnet. Der Index A und F unterscheidet Aufschüttung und Fels und mit einem zusätzlichen Strich seien die Gradienten mit dem Einfluss der Horizontalgradientendifferenz bezeichnet. Dann ist  $G_F$  und  $G'_F$  auf Punkt 14 (Abb. 3) bezogen,  $G_A$  und  $G'_A$  seien die Gradienten eines Aufschüttungspunktes und  $G_{F_2}$  sei auf den gesuchten Punkt bezogen. Analoges gilt für die Höhen  $h$ .

Um eine Beziehung zwischen den an der Oberfläche gemessenen Gradienten  $G_A$  und  $G_F$  und dem gesuchten Gradienten  $G_{F_2}$ , der sich auf der Trennfläche zwischen Aufschüttung und Fels befindet zu finden, benutzen wir wieder die Bezugsgradientenlinie. Von dieser ist bekannt, dass die Produkte aus Gradient und Höhe entlang der ganzen Linie konstant sind, nämlich  $(g - \gamma_0)$ . Wir lassen diese Schweredifferenz, die für den Aufschüttungspunkt gemessen wurde und die für  $G_A$  und  $G'_A$  gilt,

näherungsweise auch für den Felspunkt F und für den Gradienten  $G_{F_2}$  gelten, da die Schweredifferenz für diese Punkte unwesentlich von der im Aufschüttungspunkt abweicht. Dies ist die erste Näherung.

Unter obiger Voraussetzung sind die Rechtecke  $F_{F_2}$ ,  $F'_A$ ,  $F_A$  und  $F'_F$  bei  $G_{F_2}$ ,  $G'_A$ ,  $G_A$  und  $G'_F$  (siehe Abb. 2) flächengleich. Daher sind die Produkte

$$F_{F_2} \cdot F'_F = F_A \cdot F'_A = G_{F_2} \cdot G'_F \cdot h_{F_2} \cdot h'_F = G_A \cdot G'_A \cdot h_A \cdot h'_A \quad (11,1)$$

angenähert gleich.

Nun sei die zweite Näherung die Annahme, dass der Quotient  $\frac{h_A \cdot h'_A}{h_{F_2} \cdot h'_F}$  etwa gleich eins ist.

Eine Durchrechnung mit den Werten aus Tab. 1 für die Punkte 14 (Felspunkt) und Punkt 10 (mit der gegebenen Tiefe der Kontrollbohrung) und zahlreiche weitere

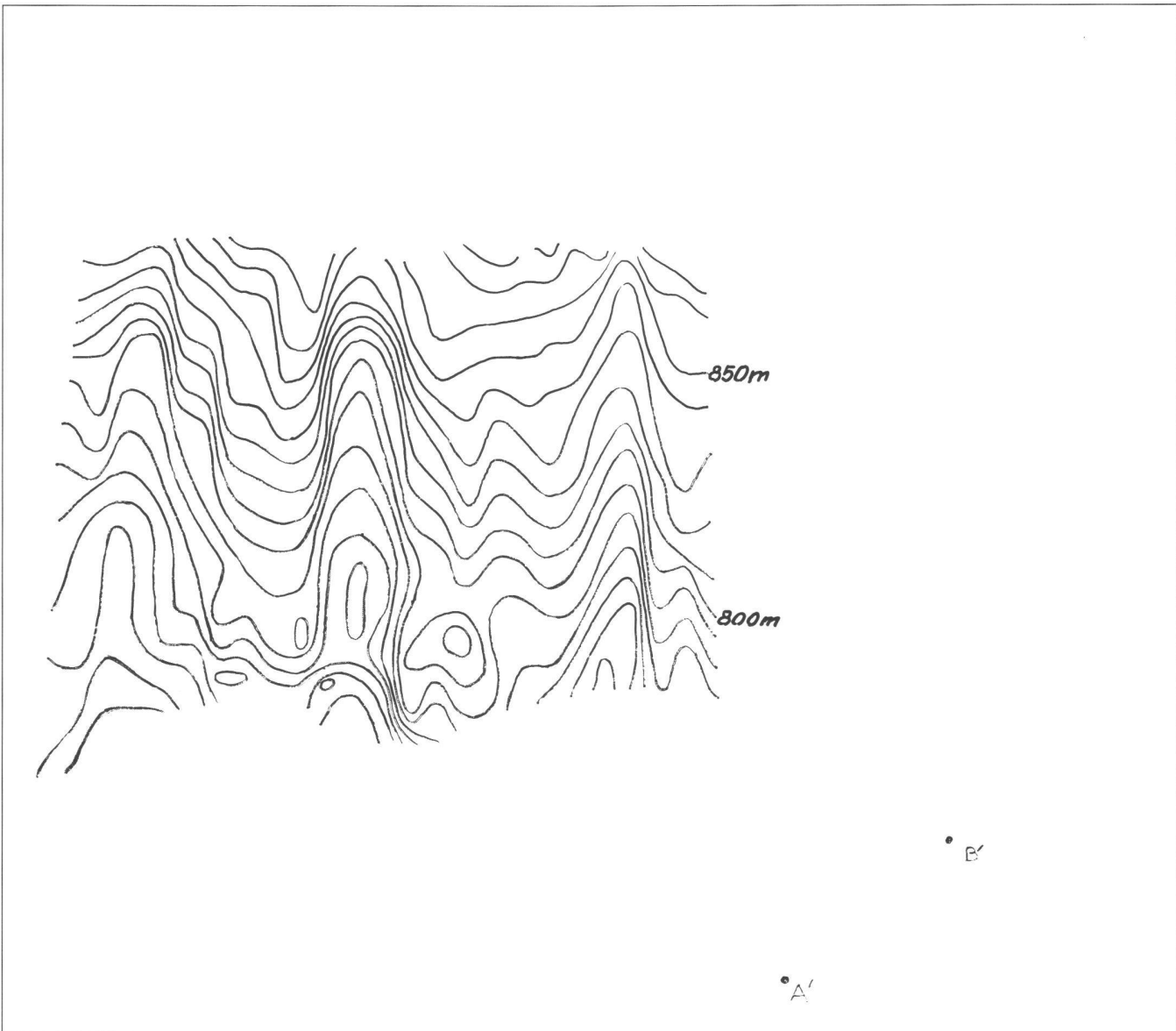
Kontrollmessungen und -Rechnungen, welche vom Verfasser durchgeführt wurden, bestätigen die zweite Näherung für einen begrenzten Vermessungsbereich.

Aus Glg. 11,1) folgt also

$$\frac{\partial g_2}{\partial h} = \frac{G_A \cdot G'_A}{G'_F} = \frac{\left(\frac{\partial g_A}{\partial h}\right)^2 + LA_A \frac{\partial g_A}{\partial h}}{\frac{\partial g_F}{\partial h} + LA_F} \quad (11,2)$$

Aus vergleichenden Messungen am Fels und auf der Aufschüttung ergibt sich eine noch wesentlich einfachere Bestimmungsgleichung für den gesuchten Gradienten

$$\frac{\partial g_2}{\partial h} = \frac{\partial g_A}{\partial h} \cdot \left( \frac{\partial g_A}{\partial h} + LA_A - \frac{\partial g_F}{\partial h} - LA_F \right) \quad (11,3)$$



**Bild 4b: Tauernautobahn A 10, Baulos 9 «Reit». Schichtenplan (10 m Abstand) zu der aus Schweremessungen gemuteten Felsregion. Punkte A'B' sind ident zu A und B in Abbildung 4a.**

Beide Gleichungen liefern dasselbe Resultat, denn setzt man auf der rechten Seite der Glg. 11,2) die Gradienten gleich und lässt die Horizontalgradienteneinflüsse LA gegen Null gehen, so sind die Glg. 11,2) und Glg. 11,3) ident.

Berechnet man mit den in nachfolgender Tabelle 1 angegebenen Grössen den Bezugsgradienten sowohl nach Glg. 11,2) als auch nach Glg. 11,3), so sieht man, dass die Resultate bis auf kleine Unterschiede in den letzten Stellen übereinstimmen, d.h. dass auch rein empirisch die aus Glg. 11,2) und Glg. 11,3) berechneten Gradienten im begrenzten Vermessungsbe- reich gleich gross sind.

## 5. Zwei Beispiele für Felsmutung aus Schweremessungen

|       |        |         |        |        |        |        |
|-------|--------|---------|--------|--------|--------|--------|
| 1     | 2      | 3       | 4      | 5      | 6      | 7      |
| 2     | 524,34 | 233,580 | 168,77 | 0,331  | 0,850  | 445,47 |
| 6     | 555,54 | 238,980 | 170,69 | 0,590  | 0,774  | 430,18 |
| 10    | 587,83 | 244,510 | 172,74 | 0,803  | 0,708  | 415,95 |
| 14    | 630,02 | 251,870 | 174,67 | 0,669  | 0,635  | 399,78 |
| 8     | 9      | 10      | 11     | 12     | 12'    |        |
| 0,81  | 473,84 | 492,95  | 484,17 | 481,72 | 481,03 |        |
| 7,42  | 449,87 | 531,22  | 524,06 | 521,94 | 521,32 |        |
| 16,16 | 430,15 | 568,43  | 562,45 | 560,61 | 560,07 |        |
| 18,13 | 399,78 | 630,02  | —      | —      | —      |        |

In der Tabelle werden die nach den Gleichungen 6,1), 11,3) und 10,1) bzw. 10,2)

Punkte 2, 6, 10 und 14 (Felspunkt siehe Abb. 3) aufgezeigt. Alle Höhen sind in Metern und die Schwerewerte in Einheiten

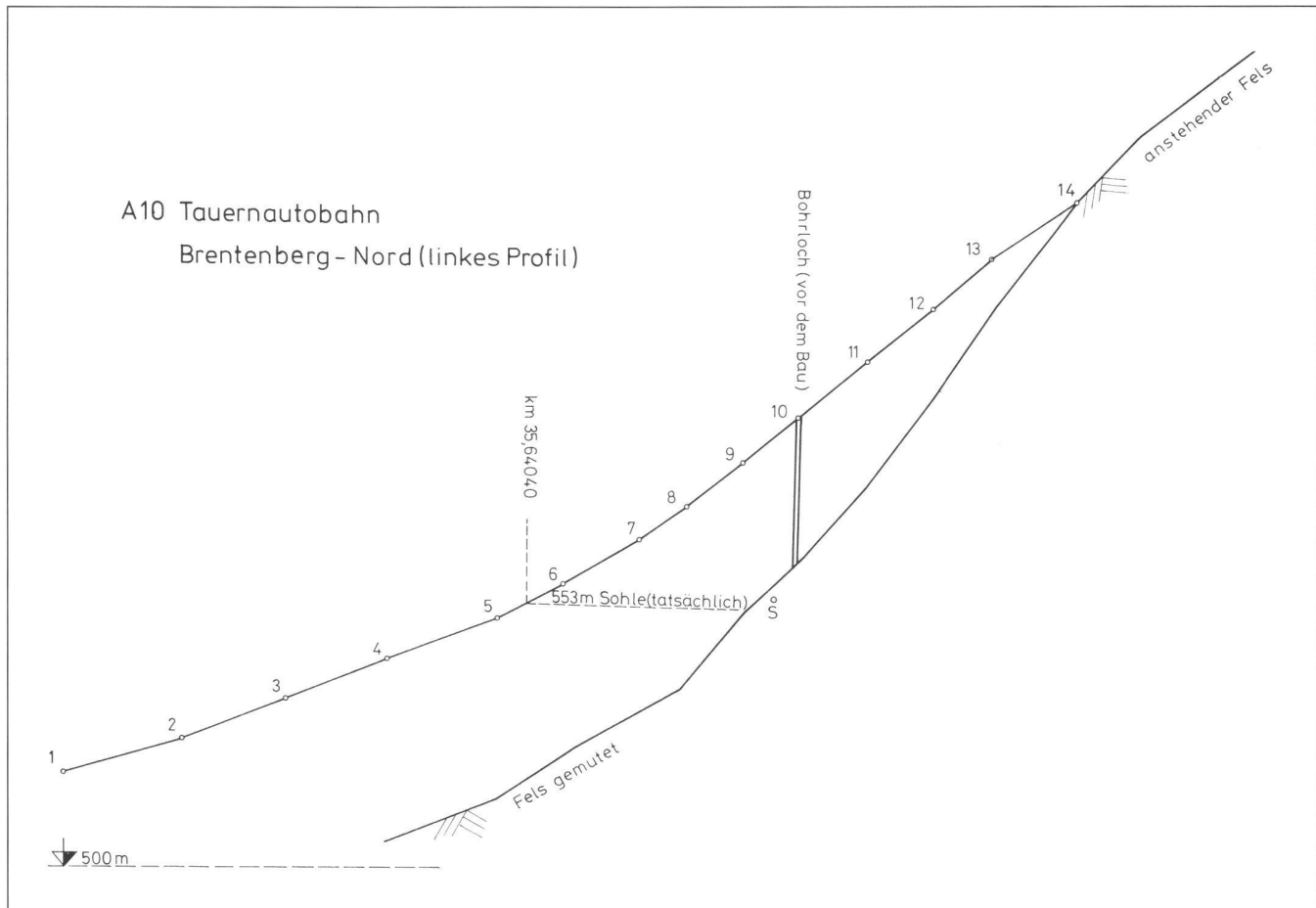


Abb. 3

mgal.  $10^{-3}$  ausgewiesen. Die Spalten 1 bis 12 haben folgenden Inhalt:

- 1) Punktnummer, 2) Höhe des Oberflächpunktes, 3) Schweredifferenz ( $g - \gamma_0$ ),
- 4) Schwerezunahme pro m  $\frac{\Delta g}{\Delta h}$ , 5) Tan-

gente des Geländewinkels  $\delta$  6)  $\tan \alpha$  (aus der Steigung der Hyperbel), 7) berechneter Bezugsgradient, 8) der Horizontalgradienteneinfluss LA, 9) Gradient am Felsen

$\frac{\partial g_2}{\partial h}$ , 10)  $H'$ , Höhe des Felspunktes (1. Näherung), 11)  $H''$  zweite Durchrechnung, 12) und 12') dritte und vierte Durchrechnung der Felspunkthöhen. Wir erkennen, dass die Differenz der vierten zur dritten Durchrechnung der Felspunkthöhen kleiner ist, als die Auswirkung der Messgenauigkeit des Gravimeters auf die Höhen. Ferner sehen wir, dass der Unterschied der berechneten Höhe des Punktes 10 zur Oberflächenhöhe mit dem Bohrergebnis, welches aus der Zeit vor dem Tunnelvortrieb stammt, fast übereinstimmt. Ein späterer Vergleich des gemuteten Felsverlaufs im Bereich des Brentenbergtunnel-Nordportals mit dem tatsächlichen Verlauf des Felsens, welcher im Zuge des Tunnelvortriebes festgestellt wurde, ergab eine grössere Klaffung (siehe Abb. 3). Der Grund hierfür ist darin zu suchen, dass sich

das gemessene Profil in der Falllinie und nicht exakt über der später festgelegten Tunnelröhre befand.

Ein weiteres Beispiel zur Anwendung der Bestimmungsgleichungen für Felsmutung sei noch angeführt:

Auf einem Rutschhang der Salzburger Südautobahn, die zwischen Bischofshofen und Hüttau in südöstlicher Richtung verläuft, wurden zwischen einer Hangbrücke und einem Tunnel auf einer Fläche von etwa 10 ha in Profilen in der Falllinie 300 Gravimeterpunkte eingemessen (Abb. 4a). Die Höhen der Felspunkte unter Tag wurden mit Hilfe der oben angeführten Gleichungen berechnet und damit ein Höhenschichtenplan angefertigt (Abb. 4b). Die Übereinstimmung der beiden Pläne erfolgt durch Überdeckung der Punkte A und B mit A' und B'. Der Schichtenplan der Felsregion war Grundlage für bautechnische Massnahmen, welche weitere Rutschungen stark eindämmten, bzw. verhinderten.

Am Rande sei hier noch ein interessantes Ergebnis angeführt: Auf dem Lageplan Abb. 4a sieht man bei Profil 95 einen alten Stadl (Holzbauwerk). Bei Überdeckung von Abb. 4a und 4b sieht man, dass sich unter dem Heustadl im Felsen eine Rückfallkuppe befindet. Von dem Stadl ist bekannt, dass in seinem Bereich keine Rutschung stattfand.

## 6. Eine Erweiterung der Bruns'schen Formeln und Ausblick

Keihen wir noch einmal zu Abschnitt 2) Abb. 1 zurück. Wir haben festgestellt, dass bei Vernachlässigung des inneren Horizontalgradienten die Glg. 5) gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial h} = \frac{\Delta g}{\Delta h} + 4\pi k^2 \sigma \cos^2 \delta \quad (5)$$

Wir setzen wieder, so wie Abb. 2 zeigt, den inneren Horizontalgradienten Null. Die Zunahme der Schwere von D nach A ist wiederum  $4\pi k^2 \sigma \cos^2 \delta$ .

Nun setzen wir von D nach C den gemessenen äusseren mittleren Vertikalgradienten  $V_a = \left(\frac{\Delta g}{\Delta h}\right)_a$  ein. (Siehe Arbeit [4], Seite 12). Von A Richtung B wirkt der Bezugsgradient, der nach Glg. 2)

$$\left(2 \frac{\partial \gamma}{\partial h} - \frac{\partial g}{\partial h}\right)$$

ist.

Die Vektorsumme im Dreieck ACD beträgt dann

$$V_a \cdot \left( 2 \frac{\partial \gamma}{\partial h} - \frac{\partial g}{\partial h} \right) - 4 \pi k^2 \sigma \cos^2 \delta = 0 \quad 5,1$$

Setzen wir für  $\frac{\partial g}{\partial h}$  den Betrag aus Glg. 5) ein, so erhalten wir

$$\left( \frac{\Delta g}{\Delta h} \right)_a - \left( \frac{\Delta g}{\Delta h} \right)_i - 2 \frac{\partial \gamma}{\partial h} = 0 \quad 5,2$$

Im allgemeinen wird diese Vektorsumme nicht Null, sondern gleich dem doppelten inneren Horizontalgradienten mal der Seite  $\Delta s$  sein, denn wir haben zweimal, unter der Voraussetzung, dass der innere Horizontalgradient Null ist, nach Glg. 5) und Glg. 5,1) die Vektorsumme gebildet. Die Glg. 5,2) ist die Bestimmungsgleichung für den inneren Horizontalgradienten am schrägen Hang. Sie kann als Erweiterung der Bruns'schen Gleichungen angesehen werden.

Jeder schräge Hang in der Natur, welcher dem Modell, das zur Ableitung wie in Abb. 1) gezeigt wurde nahe kommt, kann zur Verifizierung der Gleichungen 5,2) und Glg. 7) dienen. So können auch die Messungen und Berechnungen der Punkte, welche auf schräge Hänge bezogen sind, als Ausgangswerte benützt werden. Es sind die Punkte: Aldrans, Planötzen und Hochtor in den Arbeiten [5] und [6] des Verfassers.

Durch Einführung des aus Glg. 5,2) bestimmten inneren Horizontalgradienten in die Glg. 5) kann der Bezugsgradient so verbessert werden, dass die Fehler der aus Glg. 7) abgeleiteten Höhen bei bekannter Dichte im cm-Bereich liegen.

Damit ist der Zirkel vom Niveausphäroid von Bruns oder einem solchen höheren Ranges bis zu den eindeutigen Höhen von Punkten der physischen Erdoberfläche über diese Flächen geschlossen.

In der Arbeit des Verfassers «Die Bestimmung der Absolutschwere des Punktes Kaulia (Nepal) aus lokalen Gravimetermessungen» [8] wurde der Weg zur Bestimmung der Absolutschwere richtig aufgezeigt, doch sind darin die Erkenntnisse dieser Arbeit noch nicht verwertet.

Weitere praktische Anwendungen der Methode der Höhenbestimmung aus lokalen Schweremessungen und der Bestimmung der Absolutschwere aus solchen Messungen sowie eine Erweiterung der Kenntnisse zur Bestimmung des Bezugsgradienten auf Kuppen und Bergspitzen werden diese Art der Höhenbestimmung zu einer allgemeinen, das Nivellement ergänzenden Methode für die Geodäsie gestalten.

#### Literatur:

- [1] B. Thüring: Die Gravitation und die philosophischen Grundlagen der Physik. Erfahrung und Denken, Band 26. Dunker und Humblot, Berlin 1967.

- [2] H. Bruns: Die Figur der Erde. Publication des königl. preussischen geodätischen Institutes Berlin 1878.

- [3] W. Embacher: Die Bestimmung der orthometrischen Korrektur des geometrischen Nivellements aus Lotabweichungen und aus dem Störpotential T. Ö.Z.f. V.u.Phot., Wien 1980.

- [4] W. Embacher: Die Lotkrümmung und das Gravimeterversuchsfeld am Buschberg. Ö.Z.f.V., Wien 1965.

- [5] W. Embacher: Ein Versuch zur Bestimmung des gestörten Schwerevektors aus lokalen Gravimetermessungen. Z.f.v. 1980.

- [6] W. Embacher: Über den Einfluss der Schwere auf die Höhe. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik (VPK) 10/83.

- [7] W. Embacher: Das Dynamische Nivellement. VPK 4/82.

- [8] W. Embacher: Die Bestimmung der Absolutschwere des Punktes Kaulia (Nepal) aus lokalen Gravimetermessungen. VPK 7/85.

Die umfassende Literatur zu dem vorstehenden Fachgebiet wurde in [6] angeführt.

Adresse des Verfassers:  
Prof. Dr. Wilhelm Embacher  
Ramseiden 60  
A-5760 Saalfelden

## Photomontagen im Hochbau

H. Kager, P. Loidolt

Die Herstellung von Photomontagen aus einer geometrisch exakten Grundlage findet erst seit kurzer Zeit häufigere Anwendung. Im Rahmen des Hochbaues wird die technische Realisierung mit Hilfe der Photogrammetrie sowie die Schnittstelle zum Auftraggeber beschrieben. Einige praktische Beispiele zeigen die Bedeutung dieser Anwendung für Denkmalschutz und Stadtplanung.

*La production de montages photographiques à partir de documents géométriques exacts est une méthode dont l'emploi multiplié est tout récent. Dans le cadre de la construction de bâtiments, cet article décrit sa réalisation technique à l'aide de la photogrammétrie, de même que son intersection avec le commettant. Quelques exemples pratiques donnent un aperçu de l'importance de ce procédé pour la sauvegarde des monuments et la planification urbaine.*

### Einleitung

Sowohl Architekten als auch Baubehörden verwenden Photomontagen zur ästhetischen Beurteilung von geplanten

Baumassnahmen. Die praktische Anwendung findet hauptsächlich im Bereich denkmalgeschützter Häuser und bei städtebaulich dominanten Bauvorhaben statt. Durch den Reichtum an Tonwerten und

Details in einer Photographie bieten Photomontagen auch bei nur geringem Aufwand in der Ausgestaltung gegenüber anderen Darstellungsarten einen wesentlich realistischeren Eindruck. Es werden hier mit relativ geringen Mitteln eine hohe Auflösung und differenzierte Möglichkeiten der graphischen Präsentation geboten.

### Anwendungsfälle

Warum sollen nun Photomontagen, die bisher meistens in den Aufgabenbereich des Architekten gefallen sind, von einem Vermessungsingenieur hergestellt werden? Die Antwort liegt in der Möglichkeit, mittels der Photogrammetrie eine exakte Geometrie bei gleichzeitig rationaler Arbeitsweise zu garantieren. Die Erfahrung hat gezeigt, dass Photomontagen einer Art Wahrheitsfindung gleichkommen, wenn es um die Verifikation behaupteter Sichtverhältnisse und um die Veranschau-