

**Zeitschrift:** Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

**Band:** 97 (1999)

**Heft:** 6

**Artikel:** GPS-Geometrie nach antikem Vorbild (2)

**Autor:** Deile, M.-L.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-235557>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 20.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# GPS-Geometrie nach antikem Vorbild (2)

Die zurückliegende Zweihundertjahrspanne lässt durchblicken, dass die Festsetzung des Urmeters durch die Französische Akademie am 10. Dezember 1799 (Jahr VIII des Republikanischen Kalenders) bereits alle Grundlagen für den Durchbruch aus der dreidimensionalen in die vierdimensionale Trigonometrie in sich barg. Nachfolgende Generationen bemühten sich jedoch dermassen den physikalischen Meter zu konkretisieren, dass man das Urmeter und seine mathematische Bedeutung darüber vergass.

*Les deux derniers centenaires font apparaître que la définition du mètre-étalon, par l'Académie française le 10 décembre 1799 (année VIII du Calendrier républicain), contenait déjà toutes les bases pour le passage de la trigonométrie tridimensionnelle à la trigonométrie quadridimensionnelle. Des générations descendantes étaient tellement occupées à concrétiser physiquement l'unité du mètre que l'on a oublié le mètre-étalon et sa signification mathématique.*

I due secoli scorsi hanno dimostrato che la fissazione del metro campione originale – avvenuta il 10 dicembre 1799 (Anno VIII del calendario repubblicano) da parte dell'Accademia francese – già racchiudeva tutti i presupposti per il passaggio dalla trigonometria tridimensionale a quella quadridimensionale. Le generazioni successive si sono talmente sforzate a concretizzare il metro fisico da dimenticare il metro campione originale e il suo significato matematico.

M.-L. Deile

## Das neo-antike Zahlengeheimnis, ein berechtigtes Tabu?

### Die zifferntraditionelle Gebundenheit der Meter-Einheit

René Descartes, einer der analytischsten Geister der modernen Menschheitsgeschichte, hatte an die Metaphysik der Zahlen geglaubt.

Viele unserer Zeitgenossen sehen in der Gegenüberstellung von

$$\frac{1}{4}\text{-Meridian-Zentrumswinkel} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ \text{ zu}$$

$$\frac{1}{4}\text{-Meridian-Kreis-Umfang} = \frac{40\,000}{4} \text{ km} = 100 \text{ hkm}$$

ein windschiefes, unrationales Verhältnis, das in unserem Zeitgeist keinen Platz mehr hat. Das GPS-Koordinaten-System arbeitet deshalb mit einem dreidimensionalen  $x/y/z$ -Koordinaten-System, was absolut berechtigt ist. Es erhebt sich lediglich die Frage, ob bei dieser Rationalisierung nicht eine wichtige Etappe übersprungen worden ist.

Die französische Übersetzung des Terminus «Kulturtechnik» lautet «Génie Rural». Sie lässt der Metaphysik noch einen knappen Türspalt offen, denn zwei eingreifende Ereignisse sind eng mit der französischen Geschichte verbunden:

- erstens, die Aufstellung der kartesischen Koordinaten durch René Descartes (1596–1650) und
- zweitens, die Definition des Urmeters durch die Französische Akademie am 10. Dezember 1799.

Die beiden vorangestellten Ereignisse fundieren, aus unserer Warte in Rückbetrachtung definiert, das neo-antike, geodätische Zahlengeheimnis. Es ist weder ein unergründliches, noch ein technisch überholtes, Enigma. Das sind die falschen Tabus. Doch das echte Tabu diktiert, dass

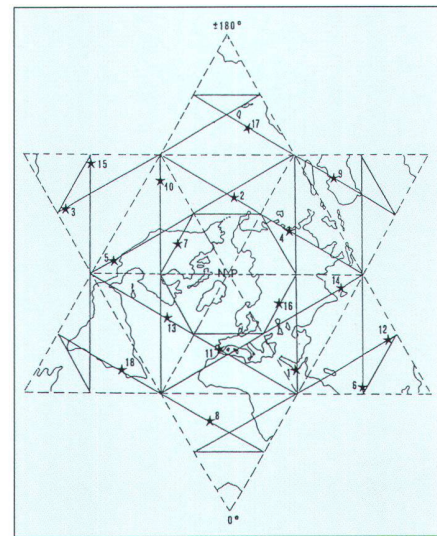


Abb. 1: Gnomischer Hexagramm-Welt-Chart mit GPS-Orbit-Bahnen und 18 Satelliten.

man, im doppelten Sinn des Ausdrucks, nicht darauf verzichten soll stets mit ihm zu rechnen. Das will heissen, nie zu vergessen alle Eventualitäten ausgemerzt zu haben, die auf einen falschen Weg führen könnten. Der zurückliegende Weg lässt vermuten, dass der Ursprung des Zusammenwirkens der Einheiten von 90 und 100 in deren gemeinsamem Teilungsfaktoren  $\pi$  zu suchen ist. Die Kreis-Konstante  $\pi$  entstammt dem Sechziger-Zahlen-System, Sie wurde quasi aus der Zahl 180 geboren. Die sinnbildliche Bezeichnung «Geburt» wird ersetzt durch «Aktiv-Bestimmung».

Aktiv-Bestimmung von  $\pi$  aus der Meridian-Bogen-Strecke von 20 000 km:

$$\pi = \frac{180}{[\text{inv.cotg } 20\,000^\circ] \cdot 20\,000^2}$$

$$\pi = \frac{180}{57,295779}$$

$$\pi = \underline{\underline{3,1415926535}}$$

Das ägyptisch beeinflusste, antike Babylonien benützte zwei verschiedene Zahlensysteme, das Sechziger- und das Zehner-Zahlen-System. Das erstere diente für den Handel, das zweitere für die Wissenschaft.

Fortsetzung des Artikels «GPS-Geometrie nach antikem Vorbild – die Meter-Einheit in ihrer vierten Dimension praktisch dargelegt», VPK 10/98.

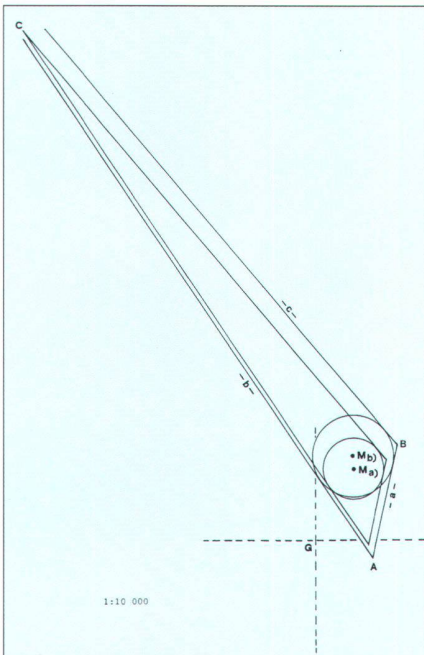


Abb. 2: Gnomisch projizierte Fehl-Dreiecke mit Radius-Zentren  $M_A$  und  $M_B$ .

Bis zum heutigen Tag sind die Halbkreis-Konstanten  $\pi$  und 180 für das Zehner-System Aussenseiter geblieben. Die Charakteristik der Halbkreiszugehörigkeit wurde bei der Urmeter-Gründung als stiller Teilhaber betrachtet. Man mass ihr keinen nennenswerten Einfluss auf die Geo-Vermessung bei. Auch machte man keinen Unterschied zwischen Erdumfangs- und Altituden-Meter-Formulierung. Die Satelliten-Zeit-Distanz-Vermessung lag in ferner Zukunft.

Das GPS-Konzept stellt erstmals die Dringlichkeit zutage  $\pi$  und 180° zu aktiven Teilhabern zu ernennen. Die Architektur seiner Orbitbahnen enthüllt eine eindeutige Choreographie des Sechziger-Zahlensystems:

Insgesamt 18 Satelliten, je 3 Satelliten auf 6 Orbitbahnen mit einer Äquator-Inklination von annähernd

$$\text{inv.cos} \frac{180}{100 \pi} = 55,043259^\circ$$

in konstantem Longituden-Intervall von 60°.

Die Abbildung 1 zeigt eine, aus zwölf gnomonischen Projektionen zusammen-

gesetzte Hexagramm-Darstellung der 6 GPS-Orbitbahnen.

Zur Bildung der Pseudo-Fehl-Dreiecke A-B-C, (Abb. 2) wurden die, auf Abbildung 1 eingetragenen, Orbit-Satelliten Nummern 11, 13 und 16 angepeilt.

Es scheint so, als ob  $\pi = 3,1415926535...$  durch ein konstantes Verhältnis ziffernmässig an den Halbkreiswinkel von 180° gebunden wäre. Mit anderen Worten ausgedrückt,  $\pi$  liesse sich nicht von einem anders bezifferten, kompletten Halbkreiswinkel ableiten. Laut nachstehenden Gleichungen ist  $\pi$  eine Kotangens-Funktion der Zahl 180:

$$\pi = \frac{180}{360^2 \cdot [\text{inv.cotg } 360^2]} = 3,1415926536...$$

$$2 \pi = \frac{2 \times 180}{360^2 \cdot [\text{inv.cotg } 360^2]} = 6,2831853072...$$

Die aktive  $\pi$ -Bestimmung führt zur Definition der beiden Aktiv-Meter  $m^4$ :

1. Zeit-Distanz-Aktiv-Meter  $m^4_{\text{error}}$
2. Altituden-Intervall-Aktiv-Meter  $m^4_{\Delta R_G-CM}$

Der Zeit-Faktor von  $[1800^2]$  wird in die Gleichung der provisorischen  $m^4_{\text{error}}$ -Bestimmung eingesetzt.

Der Altituden-Faktor von  $[\pi]$  wird in die

Gleichung der Aufstellung des individuellen Operativ-Halbkreises  $O_{op}$ . eingesetzt. Praktische Konsequenz der theoretischen Definition der beiden Aktiv-Meter:

1. Zeit-Aktiv-Meter  $m^4_{\text{error}}$
2. Altituden-Aktiv-Meter  $m^4_{\Delta R_G-CM}$

Die beiden Aktiv-Meter können autarkere Rollen übernehmen, als die, die man dem bisherigen Meter eingeräumt hatte. Sie erfüllen auf abstrakte Weise die Rollen der Atom-Beobachter-Uhr und des Altimeters im Laufe der Orbit-Satelliten-Distanz-Ortung.

### Rückblickender Vergleich mit dem Korrektur-Verfahren:

#### «Geodätisches Halbkreis-Filter zur GPS-Pseudo-Distanz-Analyse» (Abbildung 1, 1. Teil)

Das Halbkreis-Fehl-Distanz-Ausfällungsverfahren mit graphischer Ablesemöglichkeit aus dem, im Oktober 1998 veröffentlichten, ersten Teil dieser Abhandlung könnte dem Platonischen Prinzip zugeschrieben werden. Als initialer Wegweiser dienend bewirkt es Abstand zu gewinnen von der Vorstellung des Meterstabes, indem es aufzeigt, dass das Zeitalter der Relativität dem Meter eine erweiterte Daseinsform zudenkt. Diese Figur entstand aus intuitivem Suchdrang nach einem

1. Zeit-Distanz-Aktiv-Meter  $m^4_{\text{error}}$  mit eingerahmtem Zeit-Faktor  $[1800^2]$ :

$$1 m^4_{\text{error}} = \frac{1}{\left[ \text{tg} \left( \frac{0,01}{180 \pi} \right)^\circ \right] \cdot [1800^2]} m^4$$

$$1 m^4_{\text{error}} = \frac{1}{3,0864 \cdot 10^{-7} \cdot 3\,240\,000} m^4$$

$$1 m^4_{\text{error}} = 1 m^4$$

2. Altituden-Intervall-Aktiv-Meter  $m^4_{\Delta R_G-CM}$  mit eingerahmtem Altituden-Faktor  $[\pi]$ :

$$1 m^4_{\Delta R_G-CM} = \frac{1}{[\text{inv.cotg } 180^2] \cdot 180 [\pi]} m^4$$

$$1 m^4_{\Delta R_G-CM} = \frac{1}{0,0017683 \cdot 180 \cdot 3,1415926535} m^4$$

$$1 m^4_{\Delta R_G-CM} = 1 m^4$$

neuen Weg zur Meisterung eines aktuellen Problems ohne dabei Rücksicht genommen zu haben auf Formfehler, wie die aufgetretene Inversion der Masseinheiten. Ihr wesentlicher Zweck gilt dem Beweis der Durchführbarkeit der angestrebten Berechnung. Bedauerlicherweise bietet sie keinen ausreichenden Beweis um das hinterlassene Enigma aufklären zu können.

Vom formalistischen Standpunkt aus betrachtet, würde diese Art von Lösung als logisch unvertretbar abgelehnt werden. Zur Behebung dieses Mangels genügt es die, im ersten Teil der Abhandlung beschriebene, Halbkreisfigur zu variieren. Zur Unterstreichung der Kreisgrundlage werden die vollen Kreise gezeigt.

### Aktiv-Meter-Vergleichs-Kreise (Abb. 3)

Ausgangs-Daten: 3 GPS-Pseudo-Distanzen

Auswertung:

Dreieck a): Gnomonisch projiziertes Pseudo-Original-Fehl-Dreieck

Dreieck b): Gnomonisch projiziertes Pseudo-Relativ-Fehl-Dreieck

Zur Bildung des Dreiecks b) wurde jede der 3 gemessenen Pseudo-Distanzen um einen Konstantwert von 20 m in Natur verlängert. Die ausschlaggebenden Strecken sind die Radien  $r_a$  und  $r_b$  der Origin-

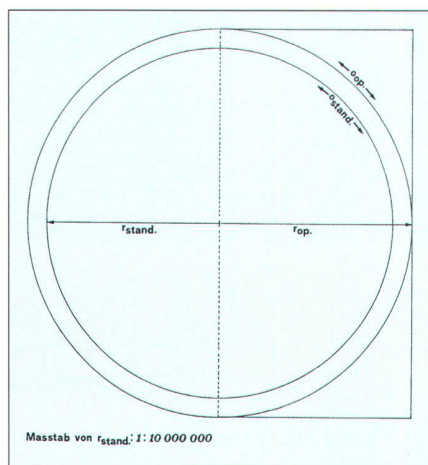


Abb. 3: Schema der relativen Aktiv-Meter-Kreise, Standard- und Operativ-Kreis.

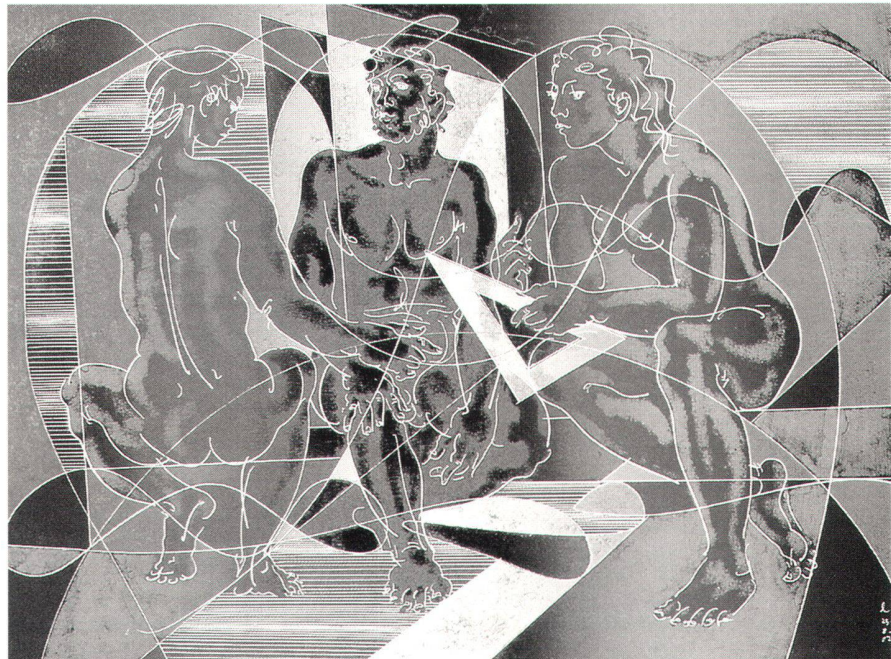


Abb. 4: Hans Erni: «Die drei Projektierenden».

nal- und Relativ-Dreiecke im Masstab von 1:10 000:

$$r_a) = 1,358707 \text{ cm}$$

$$r_b) = 1,79499 \text{ cm}$$

Kurzbezeichnungen:

C = gemeinsames Kreis-Zentrum von  $O_{\text{stand}}$  und  $O_{\text{op}}$ .

$r_{\text{stand}}$  = Radius des Standard-Kreises

$r_{\text{op}}$  = Radius des Operativ-Kreises

$O_{\text{stand}}$  = Umfang des Standard-Halbkreises

$O_{\text{stand}}$  = Umfang des Operativ-Halbkreises

Standard-Kreis-Radius =  $r_{\text{stand}}$ .

Standard-Kreis-Umfang =  $O_{\text{stand}}$ .

$$r_{\text{stand}} = \frac{1800}{\pi} = 572,95779 \text{ km}$$

$$2 r_{\text{stand}} = \frac{2 \cdot 1800}{\pi} = 1145,9155 \text{ km}$$

$$O_{\text{stand}} = \pi \cdot r_{\text{stand}} = 1800 \text{ km}$$

$$2 O_{\text{stand}} = 2 \pi \cdot r_{\text{stand}} = 3600 \text{ km}$$

Aufstellung des individuellen Operativ-Kreises:

Operativ-Kreis-Radius =  $r_{\text{op}}$ .

Operativ-Kreis-Umfang =  $O_{\text{op}}$ .

Das Lösungsverfahren bezieht sich auf einen Standardkreis, dessen Bogensektor von 1 Grad einer Bogenkreisstrecke von 10 km in Natur entspricht.

Aufstellung des Grad-Meter-Äquivalent-Standard-Kreises:

Das eingerahmte  $\pi$  ist der Altituden-Faktor des Altituden-Intervall-Aktiv-Meters.

Eigenschaft der Relativ-Größen:

Die beiden, vorstehend aufgestellten, Radien von Standard- und Operativ-Kreis,

$$r_{\text{op}} = \frac{r_a)^2 \cdot 10^3}{r_b)^2} = \frac{1,358707^2 \cdot 10^3}{1,79499^2} = 572,9642 \text{ m}$$

$$2 r_{\text{op}} = \frac{2 \cdot r_a)^2 \cdot 10^3}{r_b)^2} = \frac{2 \cdot 1,358707^2 \cdot 10^3}{1,79499^2} = 1145,9284 \text{ m}$$

$$O_{\text{op}} = \pi \cdot r_{\text{op}} = 3,1415926535 \cdot 572,9642 = 1800,0204185 \text{ m}$$

$$2 O_{\text{op}} = 2 \pi \cdot r_{\text{op}} = 6,283185307 \cdot 572,9642 = 3600,040837 \text{ m}$$

$r_{\text{stand.}} = 572,95779$  km in Natur und  
 $r_{\text{op.}} = 572,96429$  km in Natur,  
 stellen Relativ-Größen dar, was bedeutet,  
 dass zweierlei Rechenoperationen von ihnen  
 abgeleitet werden können:

1. Bestimmung des Altituden-Intervalls  $\Delta R_{G-CM}$
2. Bestimmung der Fehl-Zeit-Distanz  $e_{\text{error}}$

Beziehung zwischen Standard- und Operativ-Kreis:

Wenn der, auf Abbildung 3 in schematischem Verhältnis dargestellte, halbe Operativ-Kreis-Bogen  $o_{\text{op.}}$  länger ist als der halbe Standard-Kreis-Bogen  $o_{\text{stand.}}$ , handelt es sich bei der auftretenden Differenz um eine Altitudenvertiefung, wenn er kürzer ist als der halbe Standard-Kreis-Bogen, um eine Altitudenerhöhung in Bezug auf den Monitorpunkt.

Bei der Fehl-Zeit-Distanz liegt der Fall umgekehrt, was eine Überschuss-Fehl-Zeit-Distanz oder eine Mangel-Fehl-Zeit-Distanz anbetrifft. Ein Überschuss äusserst sich in einer Operativ-Kreis-Vergrößerung.

Unmittelbare Bestimmung des Altitudenintervalls  $\Delta R_{G-CM}$ :

$$\Delta R_{G-CM} = (o_{\text{stand.}} - o_{\text{op.}}) \cdot 10^3 + o_{\text{stand.}} - 1800 \pi \cdot \text{inv.cotg } 180^\circ \text{ m}$$

$$\Delta R_{G-CM} = (1800 - 1800,0204185) \cdot 10^3 + 1800 - 1800 \pi \cdot 0,3183066 \text{ m}$$

$$\Delta R_{G-CM} = \underline{-20,4} \text{ m}$$

Provisorische Bestimmung der Fehl-Zeit-Distanz  $e_{\text{error prov.}}$ :

$$e_{\text{error prov.}} = \frac{o_{\text{stand.}}^2 \cdot 10^6}{r_{\text{op.}}^4} \text{ m}$$

$$e_{\text{error prov.}} = \frac{1800^2 \cdot 10^6}{572,9642^4} \text{ m}$$

$$e_{\text{error prov.}} = \underline{30,06319} \text{ m}$$

Die eingerahmte Zahl  $1800^2$  ist der Zeitfaktor des Fehl-Zeit-Distanz-Aktiv-Meters.

Bei der definitiven Fehl-Zeit-Distanz-Bestimmung wird der, schon behandelte,

Definitive Bestimmung der Fehl-Zeit-Distanz  $e_{\text{error}}$ :

$$e_{\text{error}} = e_{\text{error prov.}} - \left[ \frac{r_{\text{op.}} \cdot \sqrt{\Delta e_{\text{error(a)/b}}}}{10^3} \cdot \left( 1 - \frac{10 \cdot (r_b - r_a)}{\sqrt{\Delta e_{\text{error(a)/b}}}} \right) \right] \text{ m}$$

$$e_{\text{error}} = 30,06319 - \left[ \frac{572,9642 \cdot \sqrt{20}}{10^3} \cdot 0,0244415 \right] \text{ m}$$

$$e_{\text{error}} = 30,06319 - 2,5623738 \cdot 0,0244415 \text{ m}$$

$$e_{\text{error}} = \underline{30,000561} \text{ m}$$

Konstant-Wert  $\Delta e_{\text{error(a)/b}} = 20$  m in Natur

in der Eigenschaft eines Fehler-Ausgleichs-Faktors angewandt.

Die Endresultate für  $\Delta R_{G-CM}$  und  $e_{\text{error}}$  entstehen ausschliesslich für das reelle Beispiel a) mit einer theoretischen Genauigkeit von 0,5 mm in Natur.

Das «Urmeter» der Französischen Akademie vom 10. Dezember 1799. Welchen Einfluss hat die Gründung dieses Längenmasses auf die zweihundertjährige Nachzeit ausgeübt?

Wir Mitteleuropäer sind uns leider zu we-

Doppelzentner, Schoppen» in naher Erinnerung. Dabei geht, paradoxerweise, das Dezimalsystem bereits auf Pythagoras im 6. Jahrhundert v. Chr. zurück.



Abb. 5: «Metaphysica», Metropolitan-Museum, New York.



Abb. 6: ZIGGURAT TIMING, vorgesehene Bezeichnung für die Aktiv-Meter-Pseudo-Distanz-Bereinigung.

Ganz abgesehen davon, kann festgestellt werden, dass der Meter als solcher viel mehr Eigenwert besitzt, als man ihm bis jetzt zugestehen wollte. Er stellt weit mehr dar als ein blosses Werkzeug. Vielmehr ist er das identische Glied einer geodätischen Konstruktion, der auserwählte Gegenstand einer relativistischen Prädestinierung. René Descartes war Mathematiker, Philosoph und Metaphysiker. Bei der Taufe des Meters hatte die Muse Metaphysika geistig Patin gestanden. Der Me-

ter ist ein präpariertes, mathematisches Fertig-Element, ähnlich einem elektronischen Einbau-Stromkreis. Mechanische Zusatzgeräte, wie Atom-Uhr und Altimeter wirkten wie ein Shunt, denn die Aktiv-Meter allein sind ihrer aktuellen Aufgabe der Satelliten-Pseudo-Distanz-Ortung voll gewachsen.

Marie-Louise Deile  
Chemin de l'Alouette 12  
CH-1110 Morges

**pathfinder**

Zuverlässige Tachymeter für alle Aufgaben der Vermessung. Volle Anzeige der Schweizer Koordinaten. Effiziente Lösungen für unterschiedliche Anwendungen.

Tachéomètre fiable pour tous les devoirs de la mensuration. Affichage complet des coordonnées nationales. Des solutions efficaces pour un meilleur rendement.



**top tec lutz**

vermessungssysteme  
neunbrunnenstrasse 180 8056 zürich  
fon & fax 01.371.72.67.  
e-mail lutz@toptec.ch <http://www.toptec.ch>