

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 1 (1928)  
**Heft:** I

**Artikel:** Über die Beleuchtung trüber Medien  
**Autor:** Gruner, P.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-109158>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Über die Beleuchtung trüber Medien

von P. Gruner.

Inhaltsangabe: Die Intensität des an einer homogenen planparallelen Schicht eines trüben Mediums zurückgeworfenen Lichtes wird berechnet und diskutiert und auf die wichtigen Änderungen derselben im Vergleich zu der direkten Lichtzerstreuung an *einem* Teilchen hingewiesen. Als Beispiel wird das Rayleigh'sche Gesetz durchgerechnet.

Die optischen Erscheinungen an trüben Medien werden oft in einfacher Weise behandelt, indem die Gesetze der Lichtzerstreuung an den *einzelnen* suspendierten Teilchen ohne weiteres auf das *gesamte* Medium übertragen werden. Im folgenden sollen die nicht unerheblichen Änderungen dieser Erscheinungen betrachtet werden, die sich aus einer genaueren Berücksichtigung der Gesamtwirkung einer beleuchteten Schicht ergeben. Dabei muss freilich immer noch mit Annäherungen gerechnet werden, indem im folgenden nur die primäre Lichtzerstreuung an den einzelnen Teilchen betrachtet wird.

Wir beschränken uns auf den einfachsten Spezialfall, in welchem eine homogene, isotrope, trübe Schicht, die von parallelen Ebenen begrenzt wird, durch parallel-einfallendes, unpolarisiertes, monochromatisches Licht beleuchtet wird; wir untersuchen nur das in der Einfallsebene zurückgeworfene Licht.

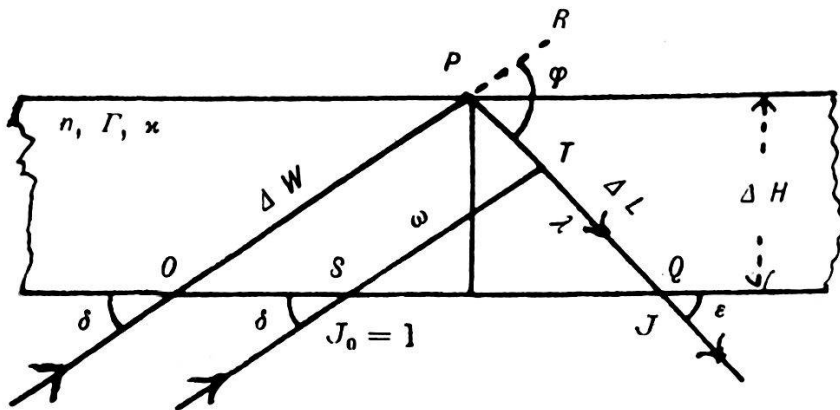


Fig. 1.



Die Schicht von der Dicke  $\Delta H$  (Fig. 1) sei durch 3 Konstante charakterisiert:

$n$  = Zahl der suspendierten Teilchen pro Volumeneinheit,

$\alpha$  = Auslöschungskoeffizient pro Längeneinheit,

$\Gamma$  = Zerstreuungskoeffizient der einzelnen Teilchen;

$\Gamma$  ist eine Funktion des Zerstreuungswinkels  $\varphi$  (zwischen der Richtung des einfallenden Strahles  $OR$  und des zerstreuten Strahles, der sog. Blickrichtung  $PQ$ ). Es ist  $\varphi = \delta + \varepsilon$ , wenn der Einfallswinkel  $= 90 - \delta$ , der Blickwinkel  $= 90 - \varepsilon$  ist.

Hat das einfallende Licht beim Eintritt in die Schicht die Intensität  $J_0$  (die  $= 1$  gesetzt wird), so wird ein in  $S$  einfallendes Parallelstrahlenbündel, das an Teilchen bei  $T$  zerstreut wird, in die Blickrichtung einen Anteil liefern, der pro Strecke  $d\lambda$  derselben den Betrag  $dJ = \Gamma \cdot e^{-\alpha(\omega + \lambda)} \cdot n \cdot d\lambda$  ausmacht<sup>1)</sup>; wobei  $ST = \omega$ ,  $TQ = \lambda$ ,  $OP = \Delta W$ ,  $PQ = \Delta L$ .

Die Intensität  $J$  des in die Blickrichtung zerstreuten Lichtes (in  $Q$ ) ist dann:

$$J = n \cdot \Gamma \int_{\lambda=0}^{\lambda=\Delta L} e^{-\alpha(\omega + \lambda)} \cdot d\lambda,$$

was ergibt, da  $\omega + \lambda = \frac{\Delta L + \Delta W}{\Delta L} \lambda$ :

$$J = \frac{n \cdot \Gamma}{\alpha} \frac{\Delta L}{\Delta L + \Delta W} \left( 1 - e^{-\alpha(\Delta L + \Delta W)} \right) \quad (1)$$

Durch Einführung folgender Bezeichnungen und Abkürzungen:

$$\Delta W = \frac{\Delta H}{\sin \delta}, \quad \Delta L = \frac{\Delta H}{\sin \varepsilon}, \quad \alpha \cdot \Delta H = h \quad (2)$$

$$\alpha (\Delta L + \Delta W) = h \frac{\sin \varepsilon + \sin \delta}{\sin \varepsilon \cdot \sin \delta} = z \quad (3)$$

$$\frac{\Delta L}{\Delta L + \Delta W} = D, \quad 1 - e^{-\alpha(\Delta L + \Delta W)} = E, \quad D \cdot E = G \quad (4)$$

wird:

$$J = \frac{n \cdot \Gamma}{\alpha} \cdot G = \frac{n \cdot \Gamma}{\alpha} \frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon + \sin \delta} (1 - e^{-z}). \quad (5)$$

Um die Abhängigkeit von  $J$  von  $\varphi$  zu diskutieren, bildet man:

$$\frac{1}{J} \frac{dJ}{d\varphi} = \frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\varphi} + \frac{1}{G} \frac{dG}{d\varphi}.$$

<sup>1)</sup> Eine detaillierte Herleitung dieser Gleichung ergibt sich aus früheren Darlegungen des Verfassers, s. Beiträge z. Physik d. freien Atmosph. **8**, 120, 1919.

Hinfort soll  $\varepsilon$  als konstanter Parameter (dessen Wert zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  liegt) betrachtet werden, so dass nur  $\delta$  als laufende Variable angesehen wird. Aus  $\varphi = \varepsilon + \delta$  folgt dann:

$$\frac{dG}{d\varphi} = \frac{dG}{d\delta},$$

und es ergibt sich:

$$R = \frac{1}{G} \frac{dG}{d\varphi} = \sin \varepsilon \frac{\cotg \delta}{\sin \varepsilon + \sin \delta} \left( 1 - \frac{z}{e^z - 1} \right). \quad (6)$$

Während die Maxima und Minima der Zerstreuungsfunktion  $I$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  durch  $\frac{dI}{d\varphi} = 0$  bestimmt sind, ist jetzt die Lage der Maxima und Minima der Intensität  $J$  bestimmt durch  $dJ = 0$ , also durch

$$- \frac{1}{I} \frac{dI}{d\varphi} = R. \quad (7)$$

Sind aus diesen Beziehungen die *Lagen* dieser Maxima und Minima gefunden, so können aus (5) die zugehörigen *Werte* von  $J$  ermittelt werden. Um also die Änderung zu finden, welche die Intensität  $J$  infolge der Gesamtwirkung der Schicht gegenüber der an einzelnen Teilchen zerstreuten Intensität  $I$  erleidet, müssen zunächst die Funktionen  $G$  und  $R$  in ihrer Abhängigkeit von  $\varphi$  (bezw. von  $\delta$  bei konstantem  $\varepsilon$ ) untersucht und sodann ihre Beziehungen zu  $I$  und  $\frac{dI}{d\varphi}$  besprochen werden.

Was die Variablen anbetrifft, ist festzustellen, dass  $\varepsilon$  und  $\delta$  nur von  $0^\circ$ — $90^\circ$  variieren, dass also nach (3) die Hilfsvariable  $z$  nur positive Werte hat, zwischen  $h \left( 1 + \frac{1}{\sin \varepsilon} \right)$ , bzw. 2, und  $\infty$ ;  $h$  ist immer  $> 0$ ;  $z$  ist also gross, sobald  $h$  gross ist, aber auch noch bei kleinem  $h$ , sofern  $\delta$  oder  $\varepsilon$  oder beide sehr klein sind; sonst wird  $z$  mit kleinem  $h$  auch klein.

1. *Diskussion der Funktion*  $G = D \cdot E$ , wo

$$D = \frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon + \sin \delta}, \quad E = 1 - e^{-z}, \quad z = h \left( \frac{1}{\sin \varepsilon} + \frac{1}{\sin \delta} \right).$$

a) Sowohl  $D$  wie auch  $E$  sind immer positiv,  $\leq 1$ , folglich auch  $G$ . Für grosse  $z$  geht  $E$  dem Grenzwert 1, also  $G$  dem Grenzwert  $D$  zu. Durch Bildung des Differentialquotienten

$$\frac{dD}{d\delta} = \frac{\sin \varepsilon \cdot \cos \delta}{(\sin \varepsilon + \sin \delta)^2},$$

der immer positiv ist, sowie von  $\frac{d^2 D}{d\delta^2}$ , der immer negativ ist, erkennt man, dass die Kurve von  $D$  (als Funktion von  $\delta$ ) mit  $\delta$  dauernd aber immer langsamer wächst, also nach unten konkav ist (vergl. Tabelle auf S. 11 und Fig. 2, a u. b, worin  $D$  für  $\varepsilon = 90^\circ$

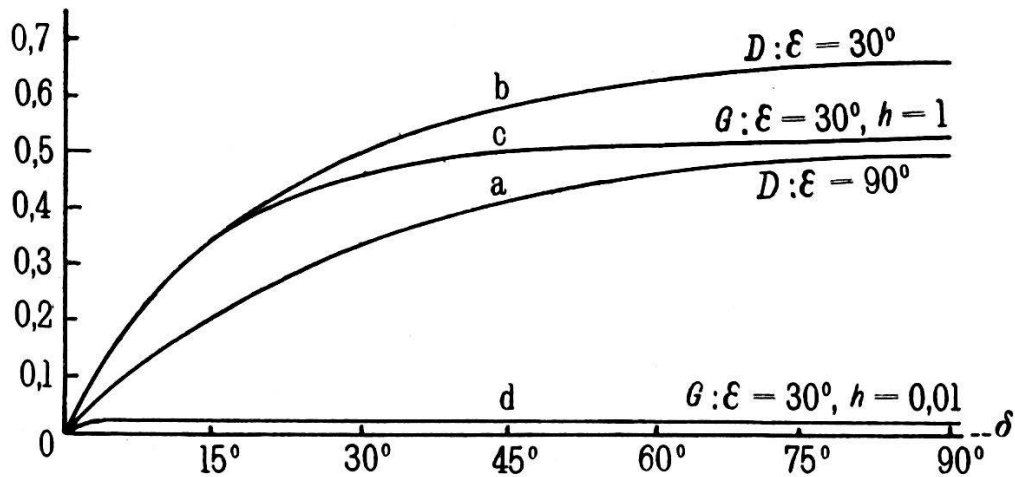


Fig. 2.

und  $\varepsilon = 30^\circ$  berechnet ist). Für  $\delta = 0$  ist  $D = 0$ , die Kurve steigt im Nullpunkt unter einem Winkel  $\gamma$  auf, für den  $\text{tg } \gamma = \frac{1}{\sin \varepsilon}$ ; allmählich wird die Kurve immer flacher und erreicht für  $\delta = 90^\circ$  den Wert  $\frac{1}{1 + \sin \varepsilon}$  mit horizontaler Tangente. In Abhängigkeit vom Parameter  $\varepsilon$  ist leicht zu sehen, dass die  $D$ -Kurve für  $\varepsilon = 90^\circ$  die kleinsten Werte hat (von 0 bis  $\frac{1}{2}$ ) und mit abnehmendem  $\varepsilon$  immer höher steigt, bis sie für  $\varepsilon = 0^\circ$  in die Horizontale  $D = 1$  übergeht.

b) Solange  $z$  genügend gross, so dass  $E = 1$ , wird  $G = D$ . Mit abnehmendem  $z$  wird stets  $G < D$  (vergl. Tabelle und Fig. 2, c u. d, worin  $G$  für  $\varepsilon = 30^\circ$ , das eine Mal mit  $h = 1$ , das andere Mal mit  $h = 0,01$  gezeichnet ist). Die  $G$ -Kurve steigt bei  $\delta = 0$  in ähnlicher Weise wie die  $D$ -Kurve an, wächst aber immer langsamer als  $D$ , ist also nach unten stärker konkav, und nimmt einen immer flacheren, fast horizontalen Verlauf. Wenn  $z$  sehr klein ist, so wird (allerdings nur für Werte von  $\varepsilon$  und  $\delta$ , die nicht zu klein sind)  $G = D \cdot z = \frac{h}{\sin \varepsilon}$ , d. h. die  $G$ -Kurve wird für merkbliche  $\delta$  zu einer horizontalen Geraden (vergl. Fig. 2, d).

2. Diskussion der Funktion  $R = S \cdot K$ , wo

$$S = \sin \varepsilon \frac{\cotg \delta}{\sin \varepsilon + \sin \delta}, K = 1 - \frac{z}{e^z - 1}, z = h \left( \frac{1}{\sin \varepsilon} + \frac{1}{\sin \delta} \right).$$

a) Sowohl  $S$  wie auch  $K$  sind immer positiv,  $K \leq 1$ ; für grosse  $z$  geht  $K$  dem Grenzwert 1, also  $R$  dem Grenzwert  $S$  zu. Durch Bildung des Differentialquotienten

$$\frac{dS}{d\delta} = - \frac{\sin \varepsilon + 2 \sin \delta - \sin^3 \delta}{(\sin \varepsilon + \sin \delta)^2 \cdot \sin^2 \delta} \sin \varepsilon ,$$

der immer negativ, sowie von  $\frac{d^2 S}{d\delta^2}$ , der immer positiv ist, erkennt

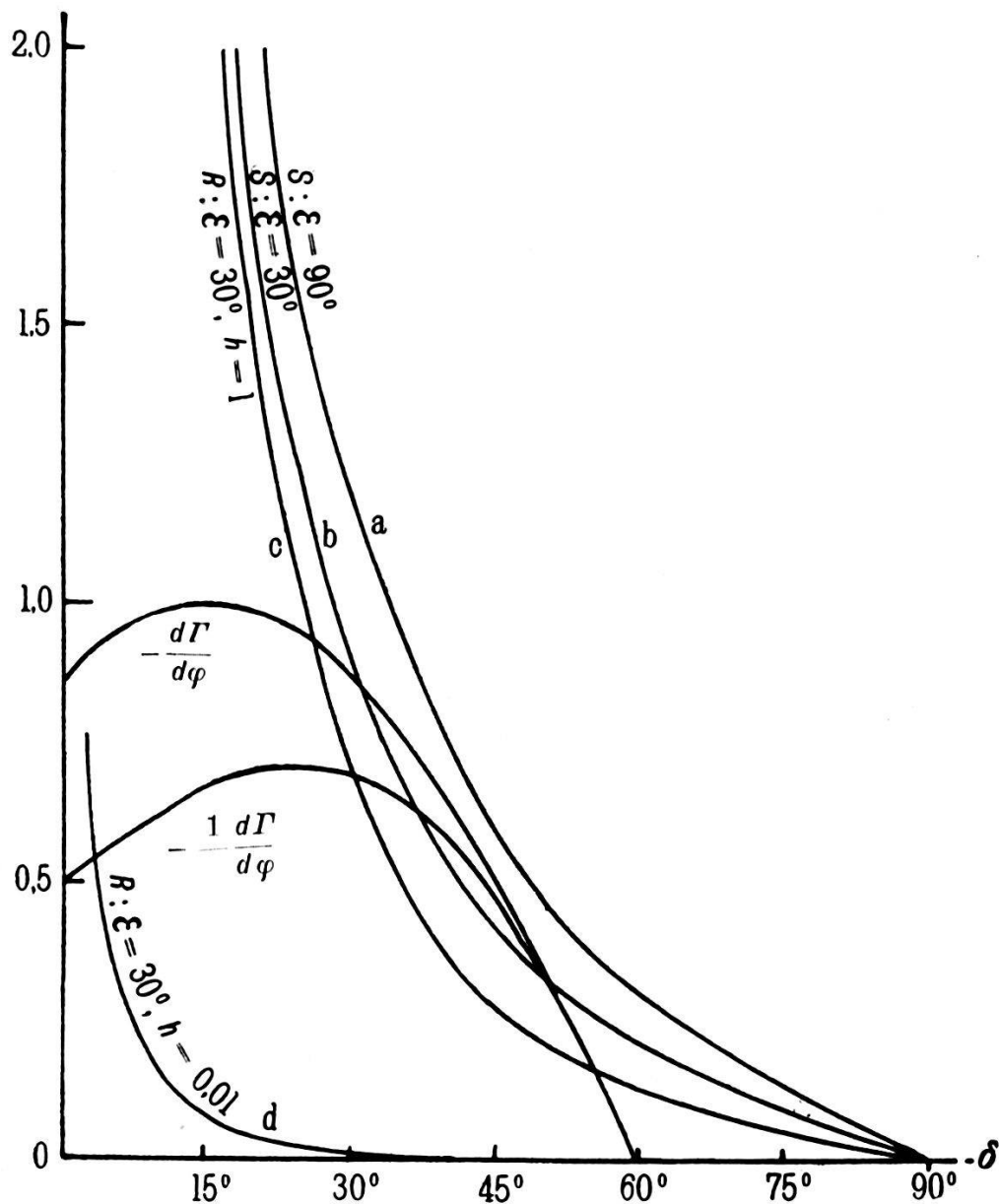


Fig. 3.

man, dass die Kurve von  $S$  mit wachsendem  $\delta$  dauernd abnimmt, aber immer langsamer, also nach unten konvex ist (vergl. Tabelle auf S. 11 und Fig. 3, a u. b, worin  $S$  für  $\varepsilon = 90^\circ$  und  $\varepsilon = 30^\circ$

berechnet ist). Für  $\delta = 0$  ist  $S = \infty$ , die Ordinatenaxe ist Asymptote; die anfangs steil abfallende Kurve verläuft immer flacher und trifft die Abszissenaxe für  $\delta = 90^\circ$  unter einen Winkel  $\gamma$ , für den

$$\operatorname{tg} \gamma = - \frac{\sin \varepsilon}{1 + \sin \varepsilon}.$$

In Abhängigkeit vom Parameter  $\varepsilon$  ist leicht zu erkennen, dass die  $S$ -Kurve für  $\varepsilon = 90^\circ$  die grössten Werte hat, mit abnehmendem  $\varepsilon$  immer kleiner, also immer konvexer nach unten verläuft und für  $\varepsilon = 0^\circ$  den konstanten Wert  $S = 0$  hat.

b) Solange  $z$  genügend gross, so dass  $K = 1$ , wird  $R = S$ . Mit abnehmendem  $z$  wird stets  $R < S$  (vergl. Tabelle und Fig. 3, c u. d, worin  $R$  für  $\varepsilon = 30^\circ$ , das eine Mal mit  $h = 1$ , das andere Mal mit  $h = 0,01$  gezeichnet ist). Die  $R$ -Kurve fällt aber rascher, also steiler als die zugehörige  $S$ -Kurve ab und verläuft dann flacher bis zum Wert  $R = 0$  für  $\delta = 90^\circ$ . Wenn  $z$  sehr klein wird (allerdings nur für Werte von  $\varepsilon$  und  $\delta$ , die nicht zu klein sind) wird

$$R = \frac{h}{2} \sin \varepsilon \frac{\operatorname{cotg} \delta}{\sin \delta}.$$

### 3. Diskussion von $J \sim I \cdot G$ .

Sobald die Zerstreungsfunktion  $I$  als Funktion von  $\varphi$ , somit auch (bei gegebenem  $\varepsilon$ ) von  $\delta$ , bekannt ist, lässt sich ohne weiteres der Verlauf der Intensität  $J$  in Abhängigkeit von  $\delta$ , bezw.  $\varphi$ , ermitteln; da  $I$  stets positiv und im allgemeinen auch  $> 0$  ist, so wird  $J$  auch stets positiv, grösser als Null, sein (ausser für  $\delta = 0^\circ$ ), und es handelt sich im wesentlichen darum, die *Änderungen der Maxima und Minima von  $J$  gegenüber denen von  $I$*  zu bestimmen. Dieses Verhalten ist qualitativ leicht zu übersehen: da  $G$  im allgemeinen  $< 1$ , so werden die Werte von  $J$  gegenüber denen von  $I$  verkleinert; für Gebiete von  $\delta$ , in denen  $G$  sehr flach verläuft, tritt merklich nur diese Gesamtverkleinerung von  $J$  auf, ohne dass der Charakter der  $J$ -Kurve und der  $I$ -Kurve sich unterscheiden. Für die Gebiete von  $\delta$ , in denen  $G$  stärker ansteigt, bezw. stark nach unten konkav ist, speziell für sehr kleine  $\delta$ , kann dagegen eine ganz erhebliche Modifikation eintreten. Da  $G$  mit  $\delta$  zunimmt, werden Maxima zu grösseren  $\delta$  verschoben, und da dort  $G$  grösser ist, wird ein solches verschobenes Maximum weniger verkleinert, als wenn es unverschoben geblieben wäre. Die Minima werden entsprechend zu kleineren  $\delta$  verschoben und werden dort stärker verkleinert, die  $I$ -Kurve kann also

eine *starke Verzerrung* erfahren. Es kann sogar vorkommen, dass ein zu grösseren  $\delta$  verschobenes Maximum mit einem zu kleineren  $\delta$  verschobenen Minimum zusammenfällt oder letzteres überholt; dann weist die  $J$ -Kurve nichts mehr von diesen Extrema auf; sie zeigt vielleicht nur leichte An- und Abschwellungen an Stelle der früheren Maxima und Minima der  $\Gamma$ -Kurve. Für  $\delta = 0$  wird immer  $J = 0$ , wenn also die  $\Gamma$ -Kurve von  $\delta = 0$  an mit wachsendem  $\delta$  relativ steil zu einem Minimum abfällt, und dieses Minimum bleibt in der  $J$ -Kurve als solches erhalten, so muss zwischen  $\delta = 0$  und dem  $\delta$  dieses Minimums ein Maximum entstehen, das in der  $\Gamma$ -Kurve gar nicht vorhanden war (vergl. Fig. 5, wo in der  $\Gamma$ -Kurve II kein Maximum vorhanden ist, dagegen alle 3  $J$ -Kurven: II b, c, d ein solches zeigen). Die blosse Schichtwirkung ( $J$ ) kann demnach ein Maximum des diffus zurückgeworfenen Lichtes bei relativ kleinen  $\delta$  bedingen, auch wenn die Zerstreuungswirkung ( $\Gamma$ ) der einzelnen suspendierten Körperchen dort keines zeigte! Allerdings wird dieses Maximum nur schwach hervortreten.

#### 4. Diskussion von $-\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\varphi} = R$ .

Zu einer *exakten und verhältnismässig einfachen* Bestimmung der Verschiebungen der Maxima und Minima führt die Ermittlung der Schnittpunkte der Kurven  $-\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\varphi}$  und  $R$  als Funktionen von  $\delta$ ; ihre Abszissen geben die Werte von  $\delta$  an, bei denen Extrema der  $J$ -Kurven auftreten, während sie in der  $\Gamma$ -Kurve bei  $\frac{d\Gamma}{d\varphi} = 0$  erscheinen.

a) Da  $R$  positiv ist, sind zur Diskussion nur diejenigen Äste der  $\Gamma$ -Kurve heranzuziehen, die mit wachsendem  $\delta$  (bezw.  $\varphi$ ) von einem Maximum zu einem Minimum heruntergehen. In Fig. 4 sind vier derartige Kurven mit demselben Wendepunkt als Beispiel gezeichnet (sie könnten natürlich bei Unsymmetrien noch wesentlich komplizierter sein), wobei die zugehörigen Werte von  $-\frac{d\Gamma}{d\varphi}$  nur ganz roh gezeichnet sind. Diese letzteren erleiden zunächst durch den Faktor  $\frac{1}{\Gamma}$  noch eine Verkleinerung (wenn die Einheiten von  $\Gamma$  so gewählt sind, dass  $\Gamma > 1$ ), die um so stärker wird, je grösser  $\Gamma$  ist; somit werden die aufsteigenden Äste der Kurven von  $-\frac{d\Gamma}{d\varphi}$  stärker verkleinert als die absinkenden, die Kurven  $-\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\varphi}$  erfahren eine Verschiebung zu grösseren  $\delta$  (diese



Kurven sind in Fig. 4 nicht gezeichnet; vergl. aber die exakte Zeichnung in Fig. 3).

b) Je nach der Stellung dieser Kurven von  $-\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\varphi}$  zu den

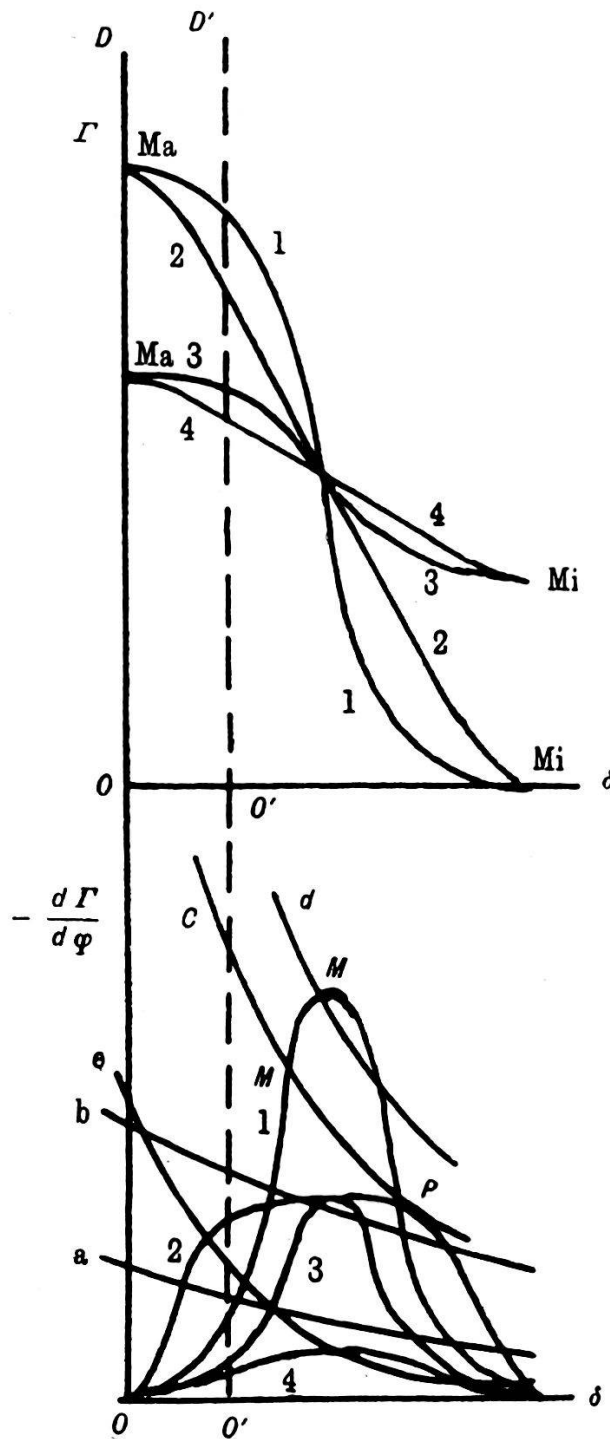


Fig. 4.

entsprechenden  $R$ -Kurven fällt die Verzerrung der  $J$ -Kurve gegenüber der  $\Gamma$ -Kurve sehr verschieden aus. In Fig. 4 sind fünf verschiedene Lagen a, b, c, d, e der  $R$ -Kurven eingezeichnet: die

Schnittpunkte der aufsteigenden Äste von 1, 2, 3, 4 mit diesen  $R$ -Kurven geben die Verschiebungen der Maxima, die der absteigenden Äste die der Minima (vergl. Fig. 3).

Es lassen sich leicht die gleichen Regeln wie bei der vorangehenden Diskussion, Ziff. 3, erkennen, nur dass die Beziehungen hier viel schärfer bestimmbar sind: Die Maxima rücken stets zu grösseren  $\delta$ , die Minima zu kleineren  $\delta$ , und zwar beide um so stärker, je höher die  $R$ -Kurve im massgebenden  $\delta$ -Gebiet verläuft und je schärfer das Maximum der Kurve  $-\frac{1}{\Gamma} \cdot \frac{d\Gamma}{d\varphi}$  ausgebildet ist, also — bei gleichem  $\Gamma$  — je schroffer der Übergang vom Maximum zum Minimum ist. Bei gleichem Verhalten von  $\frac{d\Gamma}{d\varphi}$  werden bei grösserem  $\Gamma$  alle Verschiebungen im allgemeinen verstärkt, zudem sind die Verschiebungen der Maxima *ceteris paribus* stärker als die der Minima.

Leicht ersichtlich ist die Bedingung dafür, dass ein Maximum mit einem Minimum zusammenfalle: es muss die  $R$ -Kurve gerade die  $-\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\varphi}$ -Kurve berühren (vergl. Fig. 4:  $P$ ). Auch das Auftreten neuer Maxima in  $J$  an Stellen, die in der  $\Gamma$ -Kurve dauernd abfallen, ist leicht aus Fig. 4 erkennbar: man denke sich etwa die Ordinatenaxe,  $\delta = 0$ , statt in  $OD$  nach  $O'D'$  verschoben, so liegt im betrachteten Gebiet ( $\delta > 0$ ) kein Maximum der  $\Gamma$ -Kurve vor: wenn aber die  $R$ -Kurve die Lage  $c$  oder  $d$  hat, so treten sofort in der  $J$ -Kurve die den Punkten  $M$  entsprechenden Maxima auf, d. h. das  $\Gamma$ -Maximum ist gleichsam von den negativen  $\delta$  zu den positiven  $\delta$  gerutscht.

##### 5. Allgemeine Diskussion von $J$ (Abhängigkeit von $h$ und von $\varepsilon$ ).

Bei gegebenem trüben Medium, d. h. vorgeschriebenem  $\Gamma$ ,  $n$  und  $\varkappa$ , hängt die Intensität des zurückgeworfenen Lichtes von  $\delta$ ,  $\varepsilon$  und  $h$  ab. Die Grösse  $h = \varkappa \cdot \Delta H$  ist aus dem Auslöschungskoeffizienten  $\varkappa$  und der Schichtdicke  $\Delta H$  zusammengesetzt, ist also bei gegebenem  $\varkappa$  direkt proportional der Schichtdicke. Die in (3) eingeführte Variable  $z$  ist proportional  $h$ ; wir haben bereits die Fälle unterschieden mit sehr grossem  $z$ , in denen  $G$  in  $D$  und  $R$  in  $S$  übergeht, von denen mit mittlerem und kleinerem  $z$ . Der einfache Spezialfall:  $z$  sehr gross, tritt einerseits immer bei kleinem  $\varepsilon$  oder kleinem  $\delta$  ein, d. h. bei Licht, das sehr flach auf die Schicht einfällt oder sie sehr flach verlässt, andererseits bei genügend grossen Werten von  $h$ . Letzteres bedeutet, dass bei einem bestimmten, genügend grossen Wert von  $\varkappa \cdot \Delta H$  die Absorption des eindringenden Lichtes so weit fortgeschritten ist, dass eine weitere Ver-

mehrung der Schichtdicke  $\Delta H$  keine Veränderung des zurückgeworfenen Lichtes bedeutet; wir werden in diesem Falle von einer *optischen Sättigung der trüben Schicht* sprechen.

Ist  $h$  von diesem „Sättigungswert“ merklich verschieden, so kommt der Einfluss von  $h$  zur Geltung, indem die Kurven  $D$  und  $S$  die kompliziertere Form  $G$  und  $R$  annehmen. Nach dem früher Gesagten folgt, dass im allgemeinen mit abnehmendem  $h$  die Intensitätswerte  $J$  abnehmen, dass bei grösseren  $\delta$  die Formen der  $J$ - und der  $\Gamma$ -Kurven immer ähnlicher werden, dass die Verzerrungen sich zu kleineren  $\delta$  zurückziehen, und gleichzeitig die Maxima und Minima sich immer mehr ausgleichen. Bei kleinem  $h$  wird  $G = \frac{h}{\sin \varepsilon}$ , d. h. die bei merklichem  $\delta$  gleichmässige Schwächung von  $J$  ist proportional  $h$  und nimmt mit abnehmendem  $\varepsilon$  proportional  $\frac{1}{\sin \varepsilon}$  ab.

Bei gegebenem  $h$  ist der Verlauf der  $J$ -Kurve als Funktion von  $\delta$  noch stark von dem Parameter  $\varepsilon$  abhängig, mit welchem dann auch  $\Gamma(\varphi) = \Gamma(\delta + \varepsilon)$  sich ändert. Wenn  $\varepsilon$  von kleinen Werten an wächst, d. h. das einfallende Licht immer steiler auftrifft, so senkt sich die  $G$ -Kurve zu immer kleineren Werten, die  $R$ -Kurve wächst dagegen zu immer grösseren Werten; gleichzeitig aber schiebt sich die  $\Gamma$ -, bzw. auch die  $-\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\varphi}$ -Kurve, als ganzes zu immer kleineren Werten. Daraus folgt: Maxima und Minima, die bei kleinem  $\varepsilon$  im Gebiet grösserer  $\delta$  lagen und dort wenig verzerrt waren, rücken nun mit wachsendem  $\varepsilon$  zu mittleren  $\delta$ , woselbst sie einander genähert und verkleinert werden, so, dass sie sich immer mehr ausgleichen; Maxima und Minima, die bei mittleren  $\delta$  lagen, rücken nun zu kleineren  $\delta$  und werden dort noch stärker verzerrt, so dass die früher schon erwähnten Erscheinungen eines völligen Ausgleiches von Maxima und Minima oder des Auftretens neuer Maxima (die aus dem Gebiet negativer  $\delta$  in dasjenige positiver  $\delta$  hinübergleiten) zur Auswirkung kommen.

Diese allgemeinen Bemerkungen mögen hier genügen; es liegt auf der Hand, dass unsere Formeln noch weitgehend für besondere Fälle diskutiert werden können, dass sie auch auf komplizierter gebaute trübe Medien anwendbar sind, und dass auf Grund der Gleichungen (4) und (5) auch die umgekehrte Aufgabe zu lösen ist: aus den empirisch beobachteten  $J$ -Kurven für verschiedene  $\varepsilon$  Rückschlüsse auf die Zerstreuungsfunktion  $\Gamma(\varphi)$  der suspendierten Teilchen, auf den Auslöschungskoeffizienten  $\varkappa$ , die Zahl  $n$  der Teilchen und die Schichtdicke  $\Delta H$  zu ziehen — eine Aufgabe, die für die *Optik kolloidaler Lösungen*

und für die *Theorie der Dämmerungsfarben* von grosser Bedeutung sein kann. Wir werden darauf vielleicht später eingehen, wir fügen vorläufig nur noch ein durchgerechnetes Beispiel zur Illustration bei.

6. *Beleuchtung einer trüben Schicht mit äusserst kleinen, suspendierten Teilchen.*

Wenn die dispersen Teilchen der Schicht hinreichend klein sind, wird nach RAYLEIGH (vergl. auch BLUMER<sup>1)</sup>) die Zerstreuungsfunktion  $\Gamma \sim (1 + \cos^2 \varphi)$ , unabhängig von Natur und Form des Teilchens. Dieser einfache Fall ist im folgenden durchgerechnet: für optische Sättigung (grosse  $z$ ) bei  $\varepsilon = 90^\circ$  und  $\varepsilon = 30^\circ$ , ferner für die beiden Fälle:  $h = 1$ ,  $h = 0,01$  bei  $\varepsilon = 30^\circ$ .

$\delta$	$\varepsilon = 90^\circ$		$\varepsilon = 30^\circ$		$\varepsilon = 30^\circ, h = 1$		$\varepsilon = 30^\circ, h = 0,01$	
	$S$	$D$	$S$	$D$	$R$	$G$	$R$	$G$ (angenähert)
$0^\circ$	$\infty$	0	$\infty$	0	$\infty$	0	$\infty$	0
$5^\circ$	10,514	0,0802	9,733	0,148	—	0,148	0,148	0,0183
$10^\circ$	4,832	0,148	4,220	0,258	4,17	0,257	0,163	0,0193
$15^\circ$	2,966	0,206	2,459	0,341	2,33	0,331	0,074	0,0194
$20^\circ$	2,047	0,255	1,632	0,406	1,44	0,393	0,039	—
$30^\circ$	1,155	0,333	0,866	0,500	0,671	0,459	0,017	0,0195
$45^\circ$	0,586	0,414	0,414	0,586	0,276	0,500	0,007	—
$60^\circ$	0,296	0,464	0,211	0,634	0,123	0,510	—	0,0196
$75^\circ$	0,134	0,491	0,090	0,659	—	0,517	—	—
$90^\circ$	0,000	0,500	0,000	0,667	0,000	0,518	0,000	0,0200

$\delta$	$\varepsilon = 90^\circ$		$\varepsilon = 30^\circ$		$\varepsilon = 30^\circ,$ $h = 1$	$\varepsilon = 30^\circ,$ $h = 0,01$
	$\varphi$	$J =$ $D(1 + \cos^2 \varphi)$	$\varphi$	$J =$ $D(1 + \cos^2 \varphi)$	$J =$ $G(1 + \cos^2 \varphi)$	$J =$ (angenähert) $G(1 + \cos^2 \varphi)$
$0^\circ$	$90^\circ$	0,000	$30^\circ$	0,000	0,000	0,000
$5^\circ$	$95^\circ$	0,081	$35^\circ$	0,248	0,248	0,032
$10^\circ$	$100^\circ$	0,152	$40^\circ$	0,409	0,408	0,032
$15^\circ$	$105^\circ$	0,219	$45^\circ$	0,511	0,496	0,031
$20^\circ$	$110^\circ$	0,284	$50^\circ$	0,571	0,553	—
$30^\circ$	$120^\circ$	0,417	$60^\circ$	0,625	0,574	0,024
$45^\circ$	$135^\circ$	0,621	$75^\circ$	0,625	0,534	—
$60^\circ$	$150^\circ$	0,812	$90^\circ$	0,634	0,510	0,019
$75^\circ$	$165^\circ$	0,950	$105^\circ$	0,703	0,553	—
$90^\circ$	$180^\circ$	1,000	$120^\circ$	0,833	0,647	0,025

<sup>1)</sup> BLUMER, Zeitschr. f. Physik **32**, 119; **38**, 304, 920; **39**, 195. 1925, 1926.

$\varphi$		$\Gamma =$ $1 + \cos^2 \varphi$	$\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\varphi} =$ $-\frac{\sin 2\varphi^*}{1 + \cos^2 \varphi}$
0°	180°	2,000	0,0000
5°	175°	1,9924	0,0884
10°	170°	1,9700	0,1736
15°	165°	1,9330	0,2587
20°	160°	1,8830	0,3414
30°	150°	1,7500	0,4949
35°	145°	1,6710	0,5623
40°	140°	1,5868	0,6206
45°	135°	1,5000	0,6667
50°	130°	1,4046	0,7011
60°	120°	1,2500	0,6928
70°	110°	1,1170	0,5755
75°	105°	1,0670	0,4686
80°	100°	1,0302	0,3320
85°	95°	1,0076	0,1719
90°	90°	1,0000	0,0000

\* negativ für  $0^\circ < \varphi < 90'$ .

Die Resultate sind in den Tabellen zusammengestellt und in Fig. 2, 3 und 5 aufgezeichnet. Sie bestätigen das früher Gesagte.

Aus den Kurven I und II, Fig. 5, welche  $\Gamma = 1 + \cos^2 \varphi$  als Funktion von  $\delta$  für  $\varepsilon = 90^\circ$  und  $\varepsilon = 30^\circ$  darstellen, lassen sich durch Multiplikation mit  $G$ , bzw.  $D$  (s. Fig. 2), für die vier erwähnten Fälle die  $J$ -Kurven Ia, IIb, IIc, IId (Fig. 5) berechnen. Einfacher und rascher lassen sich diese Kurven beurteilen durch Bestimmung der Schnittpunkte der Kurve  $-\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\varphi}$  mit den  $R$ - bzw.  $S$ -Kurven (Fig. 3); der Fall  $\varepsilon = 90^\circ$ , für den  $\frac{d\Gamma}{d\varphi}$  immer positiv ist, fällt hier nicht in Betracht; für  $\varepsilon = 30^\circ$  ist sowohl die Kurve  $-\frac{d\Gamma}{d\varphi} = \sin 2\varphi$  wie auch  $-\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\varphi}$  gezeichnet; die Schnittpunkte mit den drei  $R$ - bzw.  $S$ -Kurven b, c, d liefern die Lage der Maxima und Minima der  $J$ -Kurve, wie sie in Fig. 5 in IIb, IIc, IId tatsächlich erscheinen.

Hier ist ein Beispiel für das Hinüberrücken des Minimums der Kurve II (Fig. 5) zu kleineren  $\delta$ , wobei diese Verschiebung für grosse  $h$  (IIb) am stärksten, für kleiner werdende  $h$  immer schwächer (IIc und IId) wird; ferner ein Beispiel für das Auftreten eines neuen Maximums, das in der  $\Gamma$ -Kurve II bei  $\delta = -30^\circ$

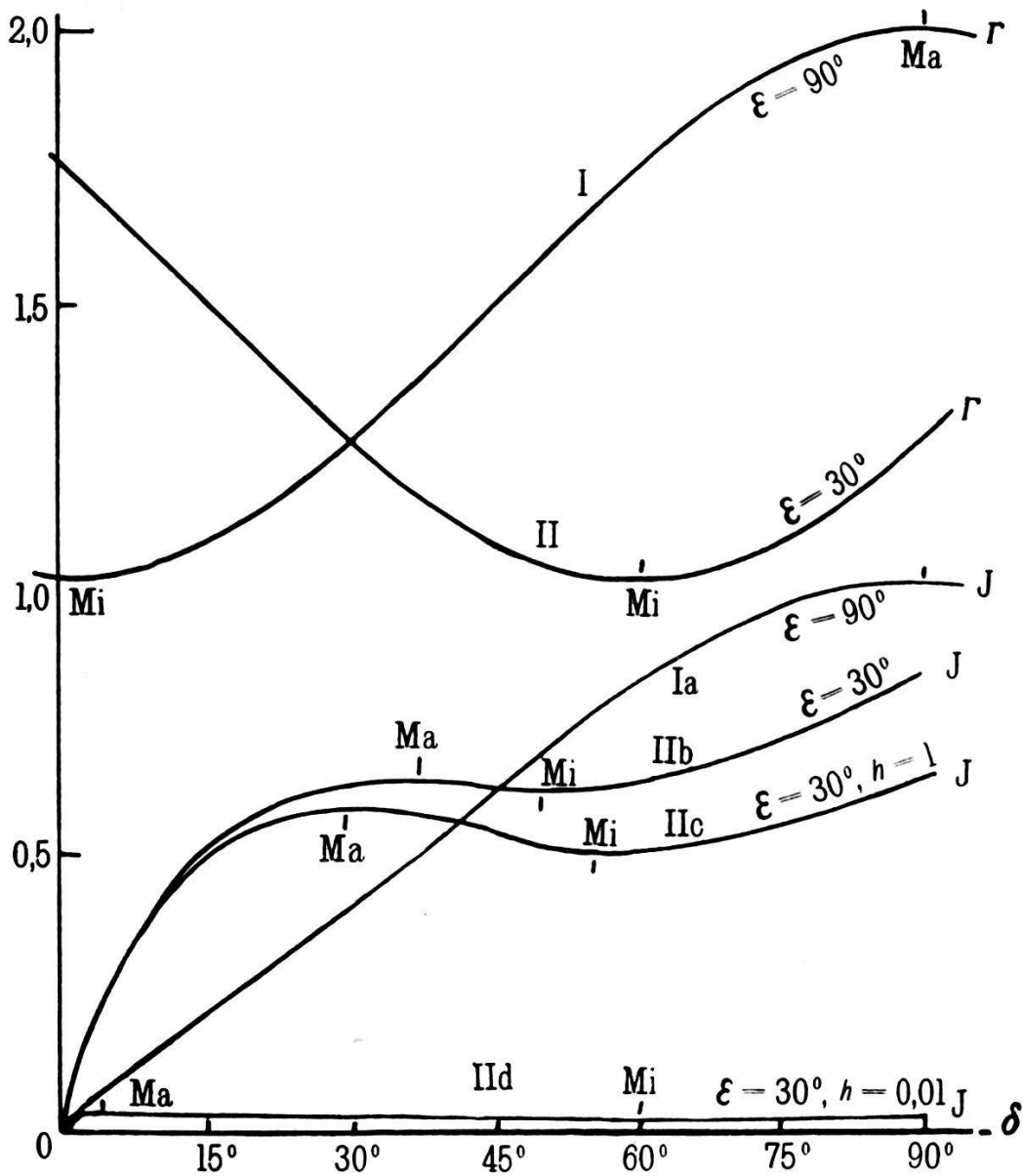


Fig. 5.

liegen würde und nun in's positive  $\delta$ -Gebiet hinüberraht, bei IIb bis zum Wert von  $\delta = \text{ca. } 37^\circ$ ! allerdings in kaum merklicher Ausprägung. — Ganz allgemein genügt ein Blick auf Fig. 5, um die starke Verzerrung der  $J$ -Kurven gegenüber der  $\Gamma$ -Kurve zu erkennen.

Bern, Physikal. Institut der Universität.

Eingegangen 3. November 1927.