

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta

**Band:** 1 (1928)

**Heft:** IX

**Artikel:** La dégénérescence de la révolution des électrons et le magnétisme aux basses températures

**Autor:** Schidlof, A.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-109190>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## La dégénérescence de la révolution des électrons et le magnétisme aux basses températures

par A. SCHIDLOF, Genève.

(15. X. 28.)

Sommaire: Les considérations relatives à la dégénérescence du mouvement de révolution des électrons paramagnétiques, appliquées, dans un mémoire précédent, à l'interprétation des lois expérimentales du paramagnétisme aux températures élevées, sont étendues, dans le présent article, aux températures inférieures au point de Curie.

Aux basses températures, l'aimantation et la susceptibilité magnétique tendent à devenir indépendantes de la température, conformément à la théorie du paramagnétisme de W. PAULI jr. (chapitre II). Dans des champs très intenses on obtient la saturation magnétique qui, cependant, présente une valeur moins élevée que selon la théorie classique (chapitre III). L'aimantation spontanée des corps ferromagnétiques qui se produit dans des conditions plus compliquées ne rentre pas dans le cadre de la présente théorie. Celle-ci suggère toutefois l'idée d'attribuer le ferromagnétisme à l'intervention des lois des quanta (chapitre IV).

Dans une publication récente<sup>1)</sup>, j'ai tenté de représenter les lois expérimentales du paramagnétisme comme une conséquence de la dégénérescence quantique du mouvement des électrons de la couche extérieure magnétiquement non-équilibrée de l'atome paramagnétique. Il reste à montrer que cette théorie conduit à des résultats admissibles en ce qui concerne le magnétisme aux basses températures. Nous avons vu, en effet, qu'en faisant abstraction de la dégénérescence du mouvement de révolution des électrons, on trouve que l'énergie de la précession de LARMOR est complètement dégénérée à une certaine température  $\Theta$  qui est le «point de Curie» du corps paramagnétique en question.

Selon la théorie de BOSE-EINSTEIN la température  $\Theta$  serait négative, donc physiquement inexistante. Le paramagnétisme pourrait alors subsister jusqu'aux températures les plus basses. Il en est autrement si l'on applique la théorie de dégénérescence de FERMI-PAULI. Cette théorie permet d'interpréter les valeurs positives de  $\Theta$ , et on trouve alors qu'à cette température l'aimantation du corps paramagnétique serait nulle quelle que soit l'inten-

---

<sup>1)</sup> Sur la dégénérescence du paramagnétisme aux températures élevées.

sité du champ magnétique. Toutefois, ce résultat paradoxal ne tient qu'à une application injustifiée du principe d'équipartition de l'énergie cinétique de la révolution des électrons. En réalité, aux basses températures la dégénérescence du mouvement de révolution joue un rôle prédominant. L'étude théorique de cet effet est le but des présentes considérations.

Nous nous y occuperons exclusivement des corps paramagnétiques qui ont un point de CURIE réel. ( $\Theta > 0$ .) Dès lors, la théorie de FERMI-PAULI seule peut fournir des résultats valables et, par suite, il est inutile de maintenir dans les équations les doubles signes qui compliquent les équations du mémoire précédent.

### I. Rappel des symboles utilisés. Les fonctions $F(\xi)$ et $F_1(\xi)$ .

Le lecteur peut trouver dans le mémoire cité les hypothèses qui se trouvent à la base de la présente théorie. Il suffira d'indiquer ici les symboles et les formules fondamentales dont nous nous servirons dans la suite. Pour plus de simplicité nous nous bornons au cas d'atomes monovalents dont le paramagnétisme est dû à un seul électron.

En désignant par  $m_0$  la masse de l'électron paramagnétique, par  $a_0^2$  le carré moyen du rayon des trajectoires électroniques, par  $G$  le poids statistique d'un des états de l'électron compatible avec la théorie des quanta, et par  $h$  la constante de PLANCK, nous avons posé

$$\frac{4\pi^2 G m_0 a_0^2}{3 h^2} = M_0 . \quad (1)$$

Le cosinus de l'angle que forme l'axe magnétique de l'atome paramagnétique avec la direction du champ (selon la théorie classique) a été désigné par

$$\cos \varphi = x . \quad (2)$$

Enfin on a utilisé l'abréviation

$$M = M_0 k T \quad (3)$$

où  $k$  est la constante de BOLZMANN et  $T$  la température absolue du corps en question. Nos considérations reposent essentiellement sur la supposition que l'axe de l'impulsion totale de l'électron paramagnétique est nécessairement parallèle à son axe magnétique.

Désignons alors par  $\varepsilon$  l'énergie cinétique de révolution de l'un des électrons paramagnétiques considérés, par  $\mu$  leur moment magnétique, et par  $N$  le nombre d'électrons contenus dans l'unité de volume, on a, d'une façon générale, quelle que soit la température et quel que soit le champ magnétique  $H$

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{\infty} \frac{\xi e^{-\frac{\varepsilon}{kT} - \frac{\mu H}{kT} x} dx d\varepsilon}{1 + \xi e^{-\frac{\varepsilon}{kT} - \frac{\mu H}{kT} x}} = \frac{1}{M_0}. \quad (4)$$

L'intensité d'aimantation  $\sigma$  est, par suite, exprimée par

$$\sigma = -M_0 N \mu \int_{-1}^{+1} \int_0^{\infty} \frac{\xi e^{-\frac{\varepsilon}{kT} - \frac{\mu H}{kT} x} x dx d\varepsilon}{1 + \xi e^{-\frac{\varepsilon}{kT} - \frac{\mu H}{kT} x}}. \quad (5)$$

Dans les deux dernières formules  $\xi$  signifie la «variable de dégénérescence», une grandeur qui dépend des conditions extérieures dans lesquelles se trouve le système considéré. Dans le cas particulier qui nous occupe ici,  $\xi$  est fonction de la température  $T$  seule.

On a  $\xi = 0$

aux températures élevées (théorie classique). Aux températures plus basses, par contre,  $\xi$  augmente et tend, selon la théorie de FERMI-PAULI, vers la limite

$$\xi = \infty$$

qui est atteinte pour

$$T = 0.$$

Nous utiliserons dans la suite, de même que dans l'article précédent, l'abréviation

$$\frac{\mu H}{k T} = a. \quad (6)$$

La théorie du paramagnétisme précédemment exposée s'applique seulement pour autant qu'on a le droit de supposer

$$\xi \ll 1.$$

Cela revient, au fond, à admettre

$$T \gg \Theta.$$

En s'affranchissant de cette restriction, on peut, pour évaluer les intégrales (4) et (5), introduire une nouvelle variable

$$\xi' = \xi e^{-ax} .$$

On remarquera que  $\xi'$  est une fonction de  $x$ , mais non pas de  $\varepsilon$ . Les deux intégrales en question prennent maintenant la forme

$$\int_{-1}^{+1} dx \int_0^{\infty} \frac{\xi' e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon}{1 + \xi' e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}} = \frac{1}{M_0} ,$$

$$\sigma = - M_0 N \mu \int_{-1}^{+1} x dx \int_0^{\infty} \frac{\xi' e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon}{1 + \xi' e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}} .$$

L'intégration par rapport à  $\varepsilon$  peut être effectuée sans autres. (Voir l'équation (30) du mémoire précédent). On obtient alors, en utilisant l'abréviation (3)

$$M \int_{-1}^{+1} \ln (1 + \xi e^{-ax}) dx = 1 \tag{7}$$

$$\sigma = - M N \mu \int_{-1}^{+1} \ln (1 + \xi e^{-ax}) x dx . \tag{8}$$

Remplaçons dans (7) et (8) les fonctions à intégrer par des développements suivant les puissances croissantes de la variable  $\xi e^{-ax}$  et intégrons terme à terme. Il vient alors

$$M \left( \xi \frac{e^a - e^{-a}}{a} - \frac{\xi^2}{4} \frac{e^{2a} - e^{-2a}}{a} + \dots - \dots \right) = 1 . \tag{7'}$$

Pour simplifier l'écriture des formules, on se servira d'une fonction

$$\xi - \frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi^3}{9} - \dots = F(\xi) \tag{9}$$

utilisée déjà dans l'article précédent (voir l'équation (31)). Grâce à l'emploi de cette fonction, l'équation (7) prend la forme

$$F(\xi e^a) - F(\xi e^{-a}) = \frac{a}{M} . \tag{7''}$$

En traitant d'une façon analogue l'intégrale (8) on trouve

$$\sigma = MN\mu \left\{ \xi \frac{e^a + e^{-a}}{a} - \frac{\xi^2}{4} \frac{e^{2a} + e^{-2a}}{a} + \dots \right. \\ \left. - \xi \frac{e^a - e^{-a}}{a^2} + \frac{\xi^2}{8} \frac{e^{2a} - e^{-2a}}{a^2} - \dots \right\} \quad (8')$$

En introduisant une seconde fonction

$$\xi - \frac{\xi^2}{8} + \frac{\xi^3}{27} - \dots = F_1(\xi) \quad (10)$$

on peut exprimer l'intensité d'aimantation  $\sigma$  par la formule

$$\sigma = MN\mu \left\{ \frac{F(\xi e^a) + F(\xi e^{-a})}{a} - \frac{F_1(\xi e^a) - F_1(\xi e^{-a})}{a^2} \right\} \quad (8'')$$

soit encore, en utilisant l'équation (7''), par l'expression générale

$$\sigma = N\mu \left\{ \frac{F(\xi e^a) + F(\xi e^{-a})}{F(\xi e^a) - F(\xi e^{-a})} - \frac{1}{a} \frac{F_1(\xi e^a) - F_1(\xi e^{-a})}{F(\xi e^a) - F(\xi e^{-a})} \right\}. \quad (11)$$

Les fonctions  $F(\xi)$  et  $F_1(\xi)$  peuvent s'exprimer, selon (9) et 10), au moyen des intégrales

$$F(\xi) = \int_0^\xi \frac{\ln(1 + \xi) d\xi}{\xi} \quad (9')$$

$$F_1(\xi) = \int_0^\xi \frac{F(\xi) d\xi}{\xi}. \quad (10')$$

Pour de très grandes valeurs de la variable  $\xi$  les deux fonctions tendent asymptotiquement vers les limites

$$\lim F(\xi) = \frac{1}{2} (\ln \xi)^2 \quad (9'')$$

$$\lim F_1(\xi) = \frac{1}{2 \cdot 3} (\ln \xi)^3 \quad (10'')$$

comme on le démontre aisément en calculant par intégration partielle pour de très grandes valeurs de  $\xi$  les deux intégrales (9') et (10').

## II. Le magnétisme aux très basses températures.

Selon (9'') et (10'') on peut, aux très basses températures, donc pour de très grandes valeurs de la variable  $\xi$ , remplacer la formule (11) par

$$\sigma = N\mu \left\{ \frac{\ln^2(\xi e^a) + \ln^2(\xi e^{-a})}{\ln^2(\xi e^a) - \ln^2(\xi e^{-a})} - \frac{1}{3a} \frac{\ln^3(\xi e^a) - \ln^3(\xi e^{-a})}{\ln^2(\xi e^a) - \ln^2(\xi e^{-a})} \right\}.$$

On a

$$\ln^2(\xi e^a) + \ln^2(\xi e^{-a}) = 2 \ln^2 \xi + 2a^2$$

$$\ln^2(\xi e^a) - \ln^2(\xi e^{-a}) = 4a \ln \xi$$

$$\ln^3(\xi e^a) - \ln^3(\xi e^{-a}) = 6a \ln^2 \xi + 2a^3$$

et, par suite,

$$\sigma = N\mu \left\{ \frac{\ln^2 \xi + a^2}{a \ln \xi} - \frac{a \ln^2 \xi + \frac{a^3}{3}}{a^2 \ln \xi} \right\}.$$

En simplifiant cette expression, on déduit de cette formule le résultat

$$\sigma = \frac{2}{3} \frac{N\mu a}{\ln \xi}. \quad (12)$$

Or, comme nous l'avons vu précédemment, (voir le premier mémoire, équation (30'')), on a d'une façon générale

$$\ln(1 + \xi) = \frac{2}{M} = \frac{\Theta}{T}. \quad (13)$$

$\Theta$  signifiant la température critique (point de CURIE) du corps paramagnétique en question. Pour  $\xi = \infty$  on peut remplacer  $1 + \xi$  par  $\xi$  et mettre l'expression (12) sous la forme

$$\sigma = \frac{1}{3} \frac{N\mu^2}{k\Theta} H. \quad (14)$$

La théorie actuelle fournit donc, dans le cas des faibles champs magnétiques, une susceptibilité magnétique indépendante de la température

$$\chi_0 = \frac{1}{3} \frac{N\mu^2}{k\Theta}. \quad (15)$$

Il est évident a priori que ce résultat ne peut s'appliquer qu'à des champs relativement faibles. Si l'on fait croître  $H$  sans limites, l'aimantation doit tendre vers la saturation et, par suite, la susceptibilité doit tendre vers zéro quelle que soit la valeur de  $\xi$ . On peut déduire effectivement ce résultat de la formule générale (11). (Voir chapitre III équation (23)). Toutefois, avant d'y arriver, il me semble intéressant de comparer la formule (15) avec une expression analogue obtenue par W. PAULI jr.<sup>1)</sup>.

L'énergie d'un système de  $N$  rotateurs est exprimée par la formule suivante, indiquée déjà dans le mémoire précédent:

$$E = N\bar{\varepsilon} = N \frac{\int_0^{\infty} \xi e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \varepsilon d\varepsilon}{1 + \xi e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}} \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\xi e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon}{1 + \xi e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}$$

On en déduit

$$\bar{\varepsilon} = kT \frac{F(\xi)}{\ln(1 + \xi)} \quad (17)$$

(Voir la formule (31') du mémoire précédent.)

En passant à la limite  $\xi = \infty$

on trouve

$$\bar{\varepsilon}_0 = \frac{1}{2} kT \ln \xi .$$

D'après l'équation (13) il vient

$$\ln \xi = \frac{\Theta}{T} .$$

D'où

$$\bar{\varepsilon}_0 = \frac{1}{2} k\Theta . \quad (18)$$

L'expression (15) peut donc être remplacée par

$$\chi_0 = \frac{1}{6} \frac{N\mu^2}{\bar{\varepsilon}_0} . \quad (19)$$

<sup>1)</sup> Zeitschr. f. Phys. **41** (1927) p. 81.



Dans le mémoire cité, W. PAULI jr., indique une formule qui, avec les symboles utilisés ici, doit s'écrire

$$\chi_0 = \frac{3}{10} \frac{N \mu^2}{(\varepsilon_0)_{pr}}$$

$(\varepsilon_0)_{pr}$  signifiant l'énergie originale des électrons de conduction, assimilés à un gaz complètement dégénéré. Selon E. FERMI<sup>1)</sup> et W. PAULI jr.<sup>2)</sup> on a :

$$(\varepsilon_0)_{pr} = \frac{3}{40} \left( \frac{6 N}{\pi G} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m_0} \quad (20)$$

en désignant par  $N$  le nombre d'électrons libres contenus dans l'unité de volume du métal.

Selon les formules (1) (3) et (13), par contre, nous trouvons

$$\bar{\varepsilon}_0 = \frac{1}{4 M_0} = \frac{3 h^2}{16 \pi^2 G m_0 a_0^2} . \quad (21)$$

Pour pouvoir comparer les expressions (20) et (21) il faut faire une hypothèse sur la grandeur de  $a_0^2$ . Si nous admettons que dans les métaux alcalins les électrons de valence décrivent autour du centre de l'atome des trajectoires de dimensions telles que le rayon moyen de ces trajectoires est un peu inférieur à la moitié de la distance moyenne des centres, la formule (19) s'accorde quantitativement avec celle de W. PAULI jr.

### III. Aimantation et susceptibilité du corps magnétique dans des champs Intenses.

Si l'on introduit dans l'équation (11) la valeur

$$a = \infty$$

il vient

$$\lim F(\xi e^{-a}) = 0, \quad \lim F_1(\xi e^{-a}) = 0,$$

et on parvient à l'expression

$$\lim \sigma = N \mu \left( 1 - \frac{1}{a} \frac{F_1(\xi e^a)}{F(\xi e^a)} \right) . \quad (22)$$

<sup>1)</sup> Zeitschr. f. Phys. **36** (1926) p. 902.

<sup>2)</sup> Zeitschr. f. Phys. l c.

Or, pour de très grandes valeurs de l'argument  $\xi e^a$  on trouve, selon (9'') et (10'')

$$\lim \frac{F_1 (\xi e^a)}{F (\xi e^a)} = \frac{1}{3} \ln (\xi e^a) .$$

Il vient donc, quelle que soit la valeur de  $\xi$ ,

$$\lim \sigma = \frac{2}{3} N \mu . \quad (23)$$

Dans des champs très intenses, l'aimantation tend vers une limite, la saturation, mais cette limite est inférieure d'un tiers à celle prévue par la théorie classique. De plus, la saturation est sensiblement indépendante de la température, pourvu que  $\xi$  soit suffisamment grand.

#### IV. Susceptibilité magnétique aux températures plus élevées. — Conclusions.

Pour calculer, à l'aide de l'équation (11), l'aimantation et la susceptibilité magnétique du corps aux températures moyennes ou élevées, nous nous bornerons à la considération de champs tels que

$$a \ll 1.$$

A la température ordinaire et, à plus forte raison, aux températures supérieures cette condition s'applique encore à des champs magnétiques qu'on considère habituellement comme très intenses. En remplaçant les fonctions  $F$  et  $F_1$  par des développements en série de TAYLOR, suivant les puissances croissantes de  $a$ , on trouve

$$F (\xi e^a) = F (\xi) + a \ln (1 + \xi) + \frac{a^2}{2} \frac{\xi}{1 + \xi} + \dots$$

$$F (\xi e^{-a}) = F (\xi) - a \ln (1 + \xi) + \frac{a^2}{2} \frac{\xi}{1 + \xi} - \dots$$

$$F_1 (\xi e^a) = F_1 (\xi) + a F (\xi) + \frac{a^2}{2} \ln (1 + \xi) + \frac{a^3}{6} \frac{\xi}{1 + \xi} + \dots$$

$$F_1 (\xi e^{-a}) = F_1 (\xi) - a F (\xi) + \frac{a^2}{2} \ln (1 + \xi) - \frac{a^3}{6} \frac{\xi}{1 + \xi} + \dots$$

Il vient donc

$$F(\xi e^a) + F(\xi e^{-a}) = 2F(\xi) + a^2 \frac{\xi}{1 + \xi} + \dots$$

$$F(\xi e^a) - F(\xi e^{-a}) = 2a \ln(1 + \xi) + \dots$$

$$F_1(\xi e^a) - F_1(\xi e^{-a}) = 2a F(\xi) + \frac{a^3}{3} \frac{\xi}{1 + \xi} + \dots$$

Par conséquent, si nous nous bornons à calculer  $\sigma$  aux termes du premier ordre en  $a$  près, nous obtenons

$$\sigma = N\mu \left\{ \frac{F(\xi) + \frac{a^2}{2} \frac{\xi}{1 + \xi}}{a \ln(1 + \xi)} - \frac{F(\xi) + \frac{a^2}{6} \frac{\xi}{1 + \xi}}{a \ln(1 + \xi)} \right\}$$

D'où

$$\sigma = \frac{1}{3} N\mu a \frac{\xi}{(1 + \xi) \ln(1 + \xi)}. \quad (24)$$

Grâce à la formule (13) cette expression peut être mise sous la forme suivante

$$\sigma = \frac{1}{3} \frac{N\mu^2}{k\Theta} H \frac{\xi}{1 + \xi}. \quad (24')$$

A la limite

$$\xi = \infty$$

on retrouve la formule (14) du chapitre III.

En tirant la valeur de  $\xi$  de l'équation (13) on trouve

$$\xi = e^{\frac{\Theta}{T}} - 1 \quad (25)$$

et on peut écrire

$$\sigma = \frac{1}{3} \frac{N\mu^2}{k\Theta} H \left( 1 - e^{-\frac{\Theta}{T}} \right). \quad (26)$$

La susceptibilité magnétique du corps en question est donc

$$\chi = \frac{1}{3} \frac{N\mu^2}{k\Theta} \left( 1 - e^{-\frac{\Theta}{T}} \right) \quad (27)$$

expression qui tend vers la limite (15) pour  $T = 0$ .

Si  $\Theta \ll T$ , l'expression (27) peut être mise sous la forme

$$z = \frac{1}{3} \frac{N \mu^2}{k T} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\Theta}{T} \right) = \frac{N \mu^2}{3 k \left( T + \frac{\Theta}{2} \right)}.$$

Cette formule permet, peut-être, d'interpréter les températures critiques négatives apparentes qu'on attribue à certains corps paramagnétiques. Le point de CURIE de ces corps serait réel, conformément à la théorie de FERMI-PAULI, mais en appliquant, à la place de la loi exacte, la loi de CURIE-WEISS, on trouve, pour la température critique, une valeur négative deux fois trop petite.

Selon les équations (26) et (27), aux températures satisfaisant à la condition

$$T \ll \Theta$$

l'aimantation et la susceptibilité magnétique sont sensiblement indépendantes de la température. L'aimantation est alors fonction du champ magnétisant seul.

Au point de CURIE même, la variable de dégénérescence présente la valeur

$$\xi = e - 1 = 1,718.$$

et la susceptibilité magnétique correspondante est

$$\chi_{\Theta} = \frac{N \mu^2}{3 k \Theta} \frac{e - 1}{e}. \quad (28)$$

La valeur du rapport  $\frac{e-1}{e}$  étant voisine de  $\frac{2}{3}$  on peut dire qu'au point de CURIE, *la susceptibilité magnétique du corps est d'un tiers seulement inférieure à celle que présente le même corps au zéro absolu.*

Il en résulte que toute température inférieure au point de CURIE peut être considérée comme très basse, en ce sens que la dégénérescence sera nécessairement très avancée à cette température.

Les propriétés magnétiques des corps aux températures élevées se distinguent de leurs propriétés magnétiques aux basses températures par le fait suivant:

Aux températures élevées, c'est-à-dire pour

$$T \gg \Theta$$

l'aimantation du corps est une fonction du rapport  $\frac{H}{T}$ .

Aux basses températures, par contre, donc pour

$$T \ll \Theta$$

l'aimantation dépend du champ magnétisant seul.

Le ferromagnétisme, dû à l'apparition du phénomène de l'aimantation spontanée, n'est pas atteint par les présentes considérations. Selon l'état de nos connaissances actuelles, il semble que cet effet ne peut se produire que pour des atomes possédant plusieurs électrons paramagnétiques. La présente théorie ne saurait s'appliquer sans autres à ces conditions plus compliquées. Toutefois, étant donné le fait que l'aimantation spontanée apparaît au-dessous du point de CURIE, donc à une température qui est basse au sens de la définition donnée plus haut, nous sommes conduit à supposer que l'aimantation spontanée elle-même est due à l'intervention des lois des quanta.

Laboratoire de Physique de l'Université.

---