

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 10 (1937)
Heft: II

Artikel: Über die Quantisierung von Theorien des α -Zerfalls
Autor: Fierz, Markus
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-110735>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über die Quantisierung von Theorien des β -Zerfalls

von Markus Fierz in Zürich.

(28. I. 37.)

Es wird im folgenden gezeigt, dass bei Ansätzen für eine Lorentzinvariante Theorie des β -Zerfalls, bei denen das Fermi'sche Matrixelement Ableitungen der Wellenfunktionen nach den Ortskoordinaten enthält, keine dem Pauli'schen Ausschliessungsprinzip entsprechende Feldquantisierung möglich ist. Dies ist schon dann der Fall, wenn man sich nur auf lineare Grössen in der für den β -Zerfall charakteristischen Konstanten g beschränkt, also $g^2 = 0$ setzt.

Es ist wohlbekannt, dass der ursprüngliche Ansatz FERMI's für eine Theorie des β -Zerfalls¹⁾ die experimentell festgestellte Form der β -Spektren nicht wiederzugeben vermag. Weiter ist es auch nicht möglich, aus dieser Theorie Austauschkräfte zwischen Proton und Neutron zu folgern, die für eine Theorie des Kernbaues ausreichend wären. Es ist deshalb von verschiedenen Autoren vorgeschlagen worden, im Fermi'schen Matrixelement Ableitungen nach den Koordinaten der leichten Teilchen (Neutrino, Elektron) einzuführen und so die Theorie der Erfahrung besser anzupassen. Insbesondere haben KONOPINSKI und UHLENBECK (K. U.)²⁾ einen Ansatz diskutiert, der die erste Ableitung der Wellenfunktion des Neutrinos enthält. Bei derartigen Abänderungen ist nun darauf zu achten, dass nicht nur die Lorentz-Invarianz und die Erhaltung der Ladung (Eichinvarianz) gewahrt bleibt; sondern die aus derartigen Ansätzen entspringende Feldtheorie muss auch eine dem Pauli'schen Ausschliessungsprinzip entsprechende Quantisierung ermöglichen. Wir werden im folgenden zeigen, dass dies bei Ansätzen für die Wechselwirkung, welche Ableitungen enthalten, unmöglich ist. Wir wollen zuerst den Fall betrachten, dass das Matrixelement der Wechselwirkung Produkte von Ableitungen oder

¹⁾ E. FERMI, Zeitschr. f. Phys. **88**, 161 (1934).

²⁾ E. J. KONOPINSKI und G. E. UHLENBECK, Phys. Rev. **48**, 7 (1935).

höhere Ableitungen enthält (z. B. (n, m) -Koppelung nach K. U. mit $n + m \geq 2$). Die einer solchen Theorie entsprechenden Wellengleichungen werden dann, wegen der Lorentzinvarianz, von der 2. oder höherer Ordnung in der Zeit sein; dies bedeutet aber eine Vermehrung der Freiheitsgrade, da nun zur völligen Bestimmung des Zustandes des Systems zur Zeit t nicht nur die 4 ψ_i -Funktionen der Dirac'schen Theorie vorgegeben sein müssen, sondern noch ihre zeitlichen Ableitungen der ersten bis k -ten Ordnung. Wenn unter solchen Umständen überhaupt eine widerspruchsfreie Feldquantisierung möglich ist, so kann diese Vermehrung der Freiheitsgrade nur als Vermehrung der Teilchensorten gedeutet werden. Dies ist aber nicht die Absicht jener Abänderungen des Fermi'schen Ansatzes gewesen und die Erfahrung bietet auch keinen Anlass dazu. Daher fallen diese Möglichkeiten ausser Betracht. Wir können uns daher für die weitere Diskussion unserer Fragestellung auf den Ansatz von K. U. beschränken, der nur eine Ableitung enthält.

§ 1. Um eine dem Ansatz K. U. entsprechende Feldtheorie zu erhalten, gehen wir aus von dem Variationsprinzip $\delta \int F dV dt = 0$ mit

$$F = 1/i \left\{ \begin{aligned} &\varphi^* \alpha \text{ grad } \varphi + \varphi^* \dot{\varphi} + \psi^* \alpha \text{ grad } \psi + \psi^* \dot{\psi} + i m \psi^* \beta \psi \\ &+ \Psi^* \alpha \text{ grad } \Psi + \Psi^* \dot{\Psi} + i M \Psi^* \beta \Psi + \Phi^* \alpha \text{ grad } \Phi \\ &- \dot{\Phi}^* \Phi + i N \Phi^* \beta \Phi + g [\Psi^* \alpha \Phi \psi^* \beta \text{ grad } \varphi + \Psi^* \Phi \psi^* \beta \dot{\varphi} \\ &- \text{grad } \varphi^* \beta \psi \Phi^* \alpha \Psi + \varphi^* \beta d/dt (\psi \Phi^* \Psi)] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\varphi, \Phi^*, \psi, \Psi \quad (2)$$

sind hierbei die zu variierenden Grössen, die als Wellenfunktion von Neutrino, Neutron, Elektron und Proton gedeutet werden können.

Die $\varphi, \Phi, \psi, \Psi$ sind Matrizen mit einer Spalte und 4 Zeilen.

a^* ist das Hermitesch-konjugierte zu a .

g ist die für den β -Zerfall charakteristische, von FERMI eingeführte Konstante.

Man beachte, dass in (1) und (2) eine gewisse Asymmetrie bezüglich φ und Φ zu konstatieren ist, die für den Ansatz K. U. charakteristisch ist. In (1) ist durch geeignete partielle Integrationen dafür gesorgt, dass nur die zeitlichen Ableitungen der in (2) angegebenen Grössen vorkommen. Diese Möglichkeit ist für die

Durchführbarkeit des kanonischen Formalismus wesentlich. Aus dem Variationsprinzip folgen die Wellengleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}^* + \text{grad } \varphi^* \alpha + g \{d/dt (\Psi^* \Phi \psi^* \beta) + \text{div} (\Psi^* \alpha \Phi \psi^* \beta)\} &= 0 \\ \dot{\Phi} + \alpha \text{grad } \Phi + i N \beta \Phi - g \{\dot{\varphi}^* \beta \psi \Psi + \text{grad } \varphi^* \beta \psi \alpha \Psi\} &= 0 \\ \dot{\Psi}^* + \text{grad } \Psi^* \alpha + i M \Psi^* \beta + g \{\dot{\varphi}^* \beta \psi \Phi^* + \text{grad } \varphi^* \beta \psi \Phi^* \alpha\} &= 0 \\ \dot{\psi}^* + \text{grad } \psi^* \alpha + i m \psi^* \beta + g \{\dot{\varphi}^* \beta \Phi^* \Psi + \text{grad } \varphi^* \beta \Phi^* \alpha \Psi\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass folgende 3 Stromdichten der Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} = 0$ genügen

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad \Phi^+ \gamma^\mu \Phi + \Psi^+ \gamma^\mu \Psi; \quad \text{(b)} \quad \Psi^+ \gamma^\mu \Psi - \psi^+ \gamma^\mu \psi \\ \text{(c)} \quad \varphi^+ \gamma^\mu \varphi + \psi^+ \gamma^\mu \psi + g \{\Psi^+ \gamma^\mu \Phi \psi^+ \varphi + \varphi^+ \psi \Phi^+ \gamma^\mu \Psi\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Es bedeutet die Erhaltung von

- (a) Erhaltung des Stromes der schweren Teilchen (Proton + Neutron);
- (b) Erhaltung der elektrischen Ladung;
- (c) Erhaltung des Stromes der leichten Teilchen (Neutrino + Elektron).

§ 2. Die Quantisierung vorliegender Theorie geschieht nun nach den allgemeinen Vorschriften von HEISENBERG und PAULI¹⁾. Dabei wollen wir nur in 1. Ordnung in g rechnen, d. h. wir setzen $g^2 = 0$. Wir werden zuerst zeigen, dass es möglich ist, diese Theorie nach der Bose-Statistik zu quantisieren, woraus sich dann ergibt, dass nicht die Quantisierung im allgemeinen, sondern nur diejenige mit Ausschliessungsprinzip Schwierigkeiten macht.

Wir führen die zu den $q_k = \varphi, \Phi^*, \psi, \Psi$ kanonisch konjugierten π_k ein, die bis auf einen Faktor i die Koeffizienten der q_k in (1) sind²⁾.

$$\left. \begin{aligned} \pi_\varphi &= \varphi^* + g \Psi^* \Phi \psi^* \beta; \quad \pi_\psi &= \psi^* + g \varphi^* \beta \Phi^* \Psi \\ \pi_\Phi &= -\Phi + g \varphi^* \beta \psi \Psi; \quad \pi_\Psi &= \Psi + g \varphi^* \beta \Psi \Phi^* \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Weiter ist die Hamiltonfunktion (Energiedichte) gegeben durch

$$\begin{aligned} H = F - \sum_k 1/i \pi_k \dot{q}_k &= H_0 + g/i \{ \Psi^* \alpha \Phi \psi^* \beta \text{grad } \varphi \\ &\quad - \text{grad } \varphi^* \beta \psi \Phi^* \alpha \Psi \}. \end{aligned} \quad (6)$$

¹⁾ W. HEISENBERG und W. PAULI, Zeitschr. f. Phys. **56**, 1 (1929).

²⁾ Wenn $g^2 = 0$ gesetzt ist, treten keine Zweideutigkeiten bezüglich der Reihenfolge der Grössen $\Psi^*, \Phi, \psi^*, \varphi^*$ in den Termen $\sim g$ auf.

Man fordert nun zwischen den π_k und q_k die Vertauschungs-Relationen (V. R.)³⁾.

$$\left. \begin{aligned} [q_k(x), \pi_i(x')]^- &= \delta(x - x') \delta_{ik} \\ [q_k, q_i]^- &= [\pi_k, \pi_i]^- = 0 \quad \text{mit} \quad [A, B]^- = AB - BA. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Wegen der Voraussetzung $g^2 = 0$ sind nur die folgenden V. R. verschieden von denen für $g = 0$:

$$\left. \begin{aligned} [\Phi_k^*(x), \varphi_i^*(x')]^- &= \delta(x - x') \cdot g \Psi_k^* \psi_e^* \beta_{ei} \\ [\varphi_i^*(x), \Psi_k(x')]^- &= \delta(x - x') g \Phi_k \psi_e^* \beta_{ei} \\ [\varphi_i^*(x), \psi_k(x')]^- &= \delta(x - x') g \Psi_e^* \Phi_e \beta_{ki} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

und die dazu Hermitesch-konjugierten.

Alle anderen V. R. enthalten nur Zusätze der Ordnung g^2 , die wir hier null setzen.

Die Verträglichkeit der V. R. (8) untereinander und mit ihrem Hermitesch-konjugierten ist dadurch erwiesen, dass für 3 beliebige der q_k, q_k^* die Jacobi'sche Identität gilt:

$$[[a, b]c] + [[b, c]a] + [[c, a]b] = 0$$

wie man leicht nachrechnet. Aus den V. R. (8) folgen die Wellengleichungen (3) gemäss der Regel

$$1/i \dot{f} = \int [H, f]^- dV. \quad (9)$$

Damit sind die Grundlagen einer solchen, mit Bose-Statistik quantisierten Theorie gegeben.

Um eine Theorie mit Pauli-Verbot zu erhalten, ersetzt man die V. R. (8) durch solche der Gestalt

$$\left. \begin{aligned} [\pi_k(x), q_i(x')]^+ &= \delta(x - x') \delta_{ik} \\ [\pi_i, \pi_k]^+ &= [q_i, q_k]^+ = 0 \quad \text{für} \quad x = x', \quad i \neq k \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

wo $[A, B]^+ = AB + BA$

Im Falle $g \neq 0, g^2 = 0$ werden aus diesen Gleichungen die (8) entsprechenden V. R.

$$\left. \begin{aligned} [\varphi_i^*(x), \Phi_k^*(x')]^+ &= \delta(x - x') g \Psi_k^* \psi_e^* \beta_{ei} \\ [\varphi_i^*(x), \psi_k(x')]^+ &= -\delta(x - x') g \Psi_e^* \Phi_e \beta_{ik} \\ [\varphi_i^*(x), \Psi_k(x')]^+ &= -\delta(x - x') g \Phi_k \psi_e^* \beta_{ei} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

³⁾ Es ist hier darauf hinzuweisen, dass aus den V. R. (7), (8) keineswegs folgt, dass die Teilchendichten ganzzahlige Eigenwerte haben. In vorliegender Theorie ist dies auch nicht der Fall, sodass hier die Methode der quantisierten Wellen keinem Konfigurationsraume mit variabler Dimensionenzahl gleichwertig ist.

und die dazu Hermitesch-konjugierten V. R. Alle anderen V. R. sind gleich wie diejenigen für $g = 0$. Diese V. R. (10) bzw. (11) genügen ebenfalls, um mit Hilfe von (9) die Wellengleichungen (3) zu erhalten. Sie haben weiter die Eigenschaft, dass sie, falls $g = 0$, zur wohlbekanntesten Theorie kräftefreier Teilchen mit Pauli-Verbot führen. Sie sind aber auch die einzigen V. R., die diese beiden Eigenschaften haben. (Das analoge ist für die V. R. (7), (8) der Fall, auch sie sind die einzigen, die die Wellengleichungen aus (9) liefern und für $g = 0$ die gewohnte Gestalt annehmen.)

Man sieht dies folgendermassen ein ($g^2 = 0$): Würde man z. B. eine Relation der Form

$$[\psi, \Psi^*]^+ = g \cdot A \cdot \delta(x - x')$$

fordern, so enthielte die Wellengleichung für Ψ^* , die aus (9) folgt, einen Term $g \cdot A \cdot \dot{\psi}$, was offenbar nicht zulässig ist; also muss $[\psi, \Psi^*] = 0$ sein. Ebenso schliesst man, dass auch die anderen V. R. ausser den in (11) angegebenen gleich denen für $g = 0$ sein müssen. Damit nun weiter in der Gleichung für Ψ^* , die aus (9) folgt, der Term $-g \dot{\varphi}^* \beta \psi \Phi^*$ auftritt (was, da $g^2 = 0$ ist, gleich $g \cdot \text{grad } \varphi^* \alpha \beta \psi \Phi^*$ gesetzt werden darf) muss notwendig gelten

$$[\Psi_k^*(x'), \varphi_i(x)]^+ = -\delta(x - x') g \beta \psi \Phi^*$$

in Übereinstimmung mit (11). Ebenso folgert man die Notwendigkeit der übrigen V. R. (11).

Damit haben wir gesehen, dass die V. R. (10), (11) notwendig und hinreichend dafür sind, dass für $g = 0$ das Ausschliessungsprinzip gilt und für $g \neq 0$ aus (9) die Wellengleichungen (3) folgen. Wir werden nun zeigen, dass es nicht möglich ist, algebraische Grössen anzugeben, die (10), (11) erfüllen.

§ 3. Nach JORDAN-WIGNER¹⁾ existiert nur eine irreducible Darstellung für die V. R. (10). Diese hat die Eigenschaft, dass bei spezieller Wahl der Matrizen $\pi_i = q_i^*$ wird. Es müsste daher auch in unserem Falle eine Matrix S existieren, (welche weder unitär noch Hermitesch zu sein braucht), sodass

$$S \pi_i S^{-1} \equiv \pi_i' = q_i'^* \equiv S^{-1*} q_i^* S^*.$$

Wir wollen annehmen, es gäbe eine solche Transformation S und werden dadurch auf einen Widerspruch geführt werden.

¹⁾ P. JORDAN und E. WIGNER, Zeitschr. f. Phys. **45**, 650 (1928).

Da g infinitesimal ist, so hat S die Gestalt $I + g \cdot a$, wo a wiederum eine Matrix ist; I ist die Einheitsmatrix. Wegen der einfachen Gestalt der V. R. (11) können wir unsere π_k, q_k durch Transformation mit $S_0 = I - g \varphi^* \beta \psi \Phi^* \Psi$ überführen in

$$\begin{aligned}\pi_k &= \Phi, \Psi^*, \psi^*, \varphi^* \\ q_k &= \Phi^*, \Psi, \psi, \varphi - g \beta \psi \Phi^* \Psi\end{aligned}$$

Nun sei eine 2. Transformation gegeben, sodass

$$\left. \begin{aligned}S \Psi S^{-1} &\equiv \Psi' \\ S \Psi^* S^{-1} &\equiv \Psi^{*'} = S^{*-1} \Psi^* S^*\end{aligned} \right\} \text{(A)}$$

$$\left. \begin{aligned}S \pi_\varphi S^{-1} &= \varphi^{*'} \\ S q_\varphi S^{-1} &\equiv \varphi' = S^{-1*} \pi_\varphi^* S^*\end{aligned} \right\} \text{(B)}$$

Dabei ist $S = I + gu$.

Setzt man S in (A) und (B) ein, so folgt aus

$$\text{(A): } \Psi^* + g [u, \Psi^*]^- = \Psi^* + g [\Psi^*, u^*]^-.$$

Aus (B): $\varphi' = \varphi + g [u, \varphi]^- - g \beta \psi (\Phi^* \Psi)$

$$\varphi^{*'} = \varphi^* + g [u, \varphi^*]^- = \varphi^* + g [\varphi^*, u^*]^- - g (\Psi^* \Phi) \psi^* \beta.$$

Daraus

- 1) $[u + u^*, \varphi^*]^- + \Psi^* \Phi \psi^* \beta = 0$
- 2) $[u + u^*, \Psi^*] = 0$
- 2*) $[u + u^*, \Psi] = 0.$

Es ist also Ψ mit $u + u^*$ vertauschbar. Wir multiplizieren daher 1) einmal von rechts mit Ψ_e und einmal von links mit Ψ_e und addieren die beiden so entstehenden Gleichungen. Wir erhalten:

$$\text{(C) } [u + u^*, \varphi_k^* \Psi_e]^- + [u + u^*, \Psi_e \varphi_k^*]^- + [\Psi_k^* \Psi_e]^+ \Phi_k \psi^* \beta = 0.$$

Da die Gleichung (C) g nicht enthält, so können wir die V. R. für $g = 0$ benützen und es folgt $\Phi \psi^* \beta = 0$, was nicht erfüllt sein kann. Also ist die Existenz eines S , das die Bedingungen (A), (B) erfüllt, unmöglich. Damit ist aber weiter bewiesen, dass für den Ansatz von K. U. schon im Falle $g^2 = 0, g \neq 0$ keine Quantentheorie mit Ausschliessungsprinzip möglich ist, was zur Folge hat, dass man diesen Ansatz auch nicht als erste Entwicklung einer richtigen Theorie auffassen kann. Wir haben im vorliegenden Beweise angenommen, die Theorie sei nach g entwickelbar; diese Annahme ist aber auch für alle Anwendungen notwendig und kann also die Schlüssigkeit des Beweises nicht stören.

Da im Falle der Bosestatistik kein analoger Satz über die Eindeutigkeit der Darstellung existiert, so steht einer solchen Theorie mit Bosestatistik nichts im Wege.

Herrn Prof. Dr. W. PAULI möchte ich für seinen Beistand beim Entstehen dieser Arbeit meinen Dank aussprechen.

Zürich, Physikalisches Institut der E. T. H.
