

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 12 (1939)  
**Heft:** V

**Artikel:** Masse und Energie im Schwerfeld  
**Autor:** Greinacher, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-110945>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Masse und Energie im Schwerfeld

von H. Greinacher.

(24. VII. 39.)

Auf Grund der speziellen Relativitätstheorie ist jede Energieänderung mit einer entsprechenden Massenänderung verknüpft. Es liegt nahe, diesen Äquivalenzsatz auch auf die Bewegung eines Körpers im Schwerfeld anzuwenden, obschon eigentlich die allgemeine Relativitätstheorie hier zuständig wäre. Es dürfte aber doch nicht ohne Interesse sein, den Äquivalenzsatz auch einmal für diesen Fall durchzuführen, schon weil die Verhältnisse sich besonders einfach und übersichtlich darstellen und weil die Resultate immerhin den Wert von Näherungen besitzen. Welchen Grad der Näherung sie beanspruchen können, bliebe allerdings noch gesondert zu untersuchen. Vielleicht, dass die folgenden Ausführungen eine Anregung zur weiteren Verfolgung des Gegenstandes geben können.

Wir betrachten den speziellen Fall eines homogenen Schwerfeldes. Bewegt sich ein Körper in diesem ohne äussere Kräfte, so bleibt seine Energie, also auch seine Masse  $m$  konstant. Andererseits erfährt er bei jeder Geschwindigkeitsänderung eine Massenänderung gemäss der Beziehung

$$m = \frac{m_r}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (1)$$

wo  $m_r$  die Ruhemasse bedeutet. Da  $m$  im Schwerfeld konstant bleiben soll, so muss demgemäss  $m_r$  veränderlich sein. Diese Änderung der Ruhemasse ist durch die Änderung der potentiellen Energie zu erklären.  $m_r$  setzt sich demgemäss aus einer Eigenmasse und einer potentiellen Masse zusammen. Wenn wir die Ruhemasse in der Höhe  $x$  über dem Erdboden mit  $m_x$  und die entsprechende Geschwindigkeit mit  $v_x$  bezeichnen, so wäre also

$$m = \frac{m_x}{\sqrt{1 - (v_x/c)^2}} \quad (1a)$$

Für  $x = h$  sei  $v_x = 0$  und für  $x = 0$   $v_x = v_0$ . Für die Ruhemasse in der Höhe  $h$  ergibt sich dann

$$m_h = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}} \quad (2)$$

wo  $m_0$  nun die Ruhemasse für  $x = 0$ , d. h. die Eigenmasse bedeutet. Hieraus berechnet sich die Fallgeschwindigkeit

$$v_0 = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m_h}\right)^2}. \quad (2a)$$

Die Zunahme der Ruhemasse, d. h. der potentiellen Masse mit der Höhe  $h$  lässt sich nach dem Äquivalenzsatz unmittelbar berechnen. Es ist

$$c^2 dm_x = m_x g dx$$

was ergibt

$$m_h = m_0 e^{\frac{gh}{c^2}}. \quad (3)$$

Dies in (2a) eingesetzt liefert für die Endgeschwindigkeit

$$v_0 = c \sqrt{1 - e^{-\frac{2gh}{c^2}}}. \quad (4)$$

Zum gleichen Resultat gelangt man auch durch Ansetzen der aus (3) folgenden potentiellen Energie

$$E_p = c^2 m_0 \left( e^{\frac{gh}{c^2}} - 1 \right) \quad (5)$$

und durch Verwendung der bekannten Formel für die kinetische Energie

$$E_k = c^2 m_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}} - 1 \right) \quad (6)$$

indem man nach dem Energiesatz  $E_p = E_k$  setzt. Für  $2gh \ll c^2$  geht (4) in die Formel der klassischen Mechanik über:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Für  $2gh \gg c^2$  nähert sich  $v$  der Geschwindigkeit  $c$ . Durch Integration von (4) erhält man den Fallraum als Funktion der Fallzeit. Die Durchrechnung führt zur Beziehung

$$h = \frac{c^2}{g} \ln \frac{1}{2} \left( e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}} \right) \quad (7)$$

was sich kurz so schreiben lässt

$$h = \frac{c^2}{g} \ln \operatorname{Cof} \frac{gt}{c}. \quad (7a)$$

Für  $gt \ll c$ , d. h. kurze Fallzeiten gelangt man wieder zur klassischen Formel des freien Falls

$$h = \frac{g}{2} t^2.$$

Für  $gt \gg c$  geht andererseits (7) über in das lineare Gesetz

$$h = ct.$$

Die Differentiation von (7) liefert die Fallgeschwindigkeit als Funktion der Zeit

$$v = c \operatorname{Sang} \frac{gt}{c}. \quad (8)$$

Dies geht für  $gt \ll c$ , bzw.  $gt \gg c$  über in

$$v = gt \text{ bzw. } v = c.$$

Es hält nicht schwer, die entsprechenden Formeln auch unter Berücksichtigung, dass die Schwere mit der Höhe  $h$  abnimmt, aufzustellen. Setzt man

$$g_x = g_0 \left( \frac{R}{R+x} \right)^2, \quad (9)$$

wo  $R$  den Erdradius bedeutet, so erhält man

$$m_h = m_0 e^{\frac{g_0 R h}{c^2 (R+h)}} \quad (10)$$

was sich für den Fall  $h = \infty$  vereinfacht zu

$$m_\infty = m_0 e^{\frac{g_0 R}{c^2}}. \quad (10a)$$

Für die Fallgeschwindigkeit ergibt sich

$$v_0 = c \sqrt{1 - e^{-\frac{2g_0 R h}{c^2 (R+h)}}}$$

was zum Höchstwert führt

$$\overset{\infty}{v}_0 = c \sqrt{1 - e^{-\frac{2g_0 R}{c^2}}}.$$

Diese Beziehung geht für  $2g_0 R \ll c^2$  in die klassische über:

$$\overset{\infty}{v}_0 = \sqrt{2g_0 R}.$$

Eine weitere Durchrechnung dürfte sich nicht rechtfertigen, da in (9) Gebrauch vom Newtonschen Gravitationsgesetz gemacht ist, dessen Anwendung ja nach der allgemeinen Relativitätstheorie nur in erster Näherung zulässig ist. Ähnlich lässt sich auch der allgemeine Fall der Bewegung zweier sich anziehenden Körper auf Grund des Äquivalenzsatzes behandeln. Von einer Wiedergabe der Rechnung soll indessen aus dem gleichen Grunde Abstand genommen werden.

Bern, Physikalisches Institut der Universität.