

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 14 (1941)
Heft: VII

Artikel: Zum Problem des statischen Mesonfeldes. Nachtrag
Autor: Wentzel, G.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-111206>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zum Problem des statischen Mesonfeldes. Nachtrag

von G. Wentzel.

(6. XII. 1941.)

Die im Titel genannte Arbeit¹⁾, in der ein Näherungsverfahren für den Fall „starker Kopplung“ zwischen geladenen Mesonen und ruhenden Proton-Neutronen entwickelt wurde, bedarf in zwei Punkten einer Berichtigung²⁾.

1. Der *Gültigkeitsbereich der Näherung* ist grösser als dort angegeben: Im Falle $l \lesssim \mu^{-1}$ (Kantenlänge der Ortsraum-Zellen \lesssim Meson-Comptonwellenlänge) kann die Ungleichung (39) ($g^2 \gg (\mu l)^{-1}$) durch die schwächere Forderung

$$g^2 \gg 1 \quad (39')$$

ersetzt werden.

Die Bedingung war nämlich die, dass die Schwingungsamplitude der Koordinate Q_1 klein gegen die betreffende Nullpunktverschiebung $G l^3 Y_1$ bleiben sollte (vgl. (34)). Es genügt also, für den Erwartungswert von Q_1^2 zu fordern:

$$\overline{Q_1^2} \ll (G l^3 Y_1)^2 = g^2 l^3 Y_1^2.$$

Drückt man nun $Q_1 (=Q_1')$ gemäss (46) durch die Normalkoordinaten $A'(k)$ aus, so findet man für die Nullpunktsschwingung (alle $n_k' = 0$):

$$\overline{Q_1^2} = \frac{1}{4V} \int dK \frac{1}{\omega_k};$$

dasselbe gilt auch bei Anwesenheit einer endlichen Anzahl freier Mesonen. Grössenordnungsmässig ist aber³⁾

$$\frac{1}{V} \int dK \frac{1}{\omega_k} \sim \begin{cases} \frac{1}{\mu} & \text{im Falle } l \gtrsim \mu^{-1}, \\ l & \text{,, ,, } l \lesssim \mu^{-1}, \end{cases}$$

während

$$Y_1 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dK \frac{1}{\omega_k^2} \sim \begin{cases} \frac{1}{\mu^2 l^3} & \text{im Falle } l \gtrsim \mu^{-1}, \\ \frac{1}{l} & \text{,, ,, } l \lesssim \mu^{-1}. \end{cases}$$

¹⁾ G. WENTZEL, *Helv. Phys. Acta* **13**, 269, 1940.

²⁾ Dies wurde bereits von OPPENHEIMER und SCHWINGER bemerkt (*Phys. Rev.* **60**, 150, 1941, Fussnote 2 S. 151).

³⁾ Man beachte, dass die k -Raum-Integrale nur über den Periodizitätskubus vom Volumen $V = (2\pi/l)^3$ zu erstrecken sind; vgl. § 2 l. c.

Die Bedingung für die Gültigkeit unserer Näherung lautet also im Falle starker Abschneidung ($l \gtrsim \mu^{-1}$): $g^2 \gg (\mu l)^3 \gtrsim 1$, in Übereinstimmung mit (22); dagegen genügt bei schwacher Abschneidung ($l \lesssim \mu^{-1}$) schon: $g^2 \gg 1$, wie behauptet wurde.

Diese Erweiterung des Gültigkeitsbereiches der Näherung für starke Kopplung ist namentlich deshalb von Interesse, weil sie die Möglichkeit zulässt, die Abschneidelänge bzw. die Ortsraum-Gitterkonstante l gegen 0 gehen zu lassen, d. h. zum Limes des kontinuierlichen Raumes zurückzukehren (bei festgehaltener Kopplungsstärke g). Dabei werden zwar die Selbstenergien der Proton-Neutronen unendlich gross, doch bleiben der Meson-Streuquerschnitt (§ 7) und die Kernkräfte (§ 9) endlich (die Mehrkörperkräfte verschwinden).

2. Bei der Berechnung der *Massendifferenzen der „Proton-Isobaren“* im Falle $l \ll \mu^{-1}$ (§ 6) wurden die Beiträge der Terme $\sim g^{-1}$ in der Hamiltonfunktion übersehen; diese bedingen eine Verkleinerung des konstanten Faktors in (72).

Nach (56) gilt, da $F^- \cong 0$ (vgl. den auf Gl. (64) folgenden Text):

$$\{-(E + g^2 Y_1) + \mathcal{H} + \Phi^+\} F^+ = 0, \quad (56')$$

wo nach (55), (53) und (69)

$$\Phi^+ = \frac{1}{4 q_1^2} \left\{ m' + g \sqrt{\frac{2}{(2\pi)^3}} \int dK \frac{1}{\omega_k^2} e^{-i k x_1} B''(k) \right\}^2.$$

Wegen (39') kann hier q_1^2 durch

$$\bar{q}_1^2 = g^2 l^3 Y_1^2$$

ersetzt werden; dann hängt Φ^+ nur noch von den zweigestrichenen Variablen ab. Bei der Bestimmung der Eigenwerte der Schrödinger-Gleichung (56') können die Beiträge der eingestrichenen Variablen ausser Betracht bleiben, da sie von der Ladungszahl m' unabhängig sind. Somit bleiben die Eigenwerte von $\mathcal{H}'' + \Phi^+$ zu bestimmen, d. h. — wenn die Striche von A'' und B'' weggelassen werden — die Eigenwerte von

$$\frac{1}{2} \int dK \{ B_k^* B_k + \omega_k^2 A_k^* A_k \} + \frac{1}{2} (\eta + \int dK \zeta_k B_k)^2 \equiv \hat{\mathcal{H}},$$

wo

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{m'}{g l^{3/2} Y_1}, \quad \zeta_k = \frac{1}{(2\pi l)^{3/2} Y_1} \frac{1}{\omega_k^2} e^{-i k x_1}.$$

Im B_k -Raum führen wir nun die folgende Translation aus:

$$B_k = \hat{B}_k - \eta \frac{\zeta_k^*}{1 + \int dK' |\zeta_{k'}|^2}$$

Diese Transformation bringt, wie eine kurze Rechnung lehrt, die in den \hat{B}_k linearen Terme in $\hat{\mathcal{H}}$ zum Verschwinden; es ergibt sich:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \int dK \{ \hat{B}_k^* \hat{B}_k + \omega_k^2 A_k^* A_k \} + \frac{1}{2} \left(\int dK \zeta_k \hat{B}_k \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{1 + \int dK |\zeta_k|^2}.$$

Die in den A_k und \hat{B}_k quadratischen Terme sind von m' unabhängig (sie bilden zusammen die in § 7 behandelte Hamiltonfunktion $\mathcal{H}'' + \Phi^{(0)}$); der letzte, konstante Term liefert den ladungsabhängigen Anteil der Selbstenergie:

$$\left. \begin{aligned} E_{m'} &= \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{1 + \int dK |\zeta_k|^2} \\ &= m'^2 \cdot \frac{1}{4 g^2 l^3 Y_1^2} \cdot \frac{1}{1 + (2 \pi l)^{-3} Y_1^{-2} \int dK \omega_k^{-4}} \end{aligned} \right\} \quad (72')$$

Der früher angegebene Wert $\eta^2/2$ — vgl. (72) — ist also um den Faktor $1 + \int dK |\zeta_k|^2$ zu hoch. Unter der Voraussetzung $l \ll \mu^{-1}$ (die der ganzen Rechnung zugrundeliegt, vgl. (66), (67)), ergibt sich $\int dK |\zeta_k|^2 \gg 1$ (wie $(\mu l)^{-1}$); damit folgt für $E_{m'}$ (speziell im Limes $l \rightarrow 0$):

$$E_{m'} = \frac{\eta^2}{2 \int dK |\zeta_k|^2} = m'^2 \cdot \frac{2 \pi^3}{g^2 \int dK \frac{1}{\omega_k^4}} = m'^2 \cdot \frac{2 \pi}{g^2} \cdot \mu.$$

Die Massenunterschiede benachbarter Isobaren sind also von der Grössenordnung $4 \pi \mu / g^2$; nach (39') sind sie klein gegen die Mesonmasse μ .

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.