

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 15 (1942)
Heft: V

Artikel: Über den Begriff des Atoms. II
Autor: Scherrer, Willy
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-111316>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 16.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über den Begriff des Atoms II

von Willy Scherrer.

(18. V. 1942.)

Vorbemerkungen.

In Teil I¹⁾ wurden Grundsätze entwickelt, denen man im einfachsten Falle — lauter gleiche Massen und Ladungen — folgende Form geben kann:

1. Alle Materie besteht aus einzelnen Elektronen.
2. Jedes einzelne Elektron muss durch eine individuelle Wellenfunktion beschrieben werden.
3. Das auf ein Elektron wirkende Feld ist identisch mit der Gesamtheit der Materiewellen aller übrigen Elektronen.
4. Das Operationsgebiet ist der vierdimensionale Zeitraum der speziellen Relativitätstheorie.

Als Ansatz für die Wechselwirkung zwischen n Elektronen mit den Wellenfunktionen

$$u_1, u_2, \dots, u_n$$

habe ich in Anlehnung an bekannte Methoden der Wellenmechanik folgendes System vorgeschlagen:

$$\square u_k = \left\{ A + \varepsilon \square \sum_{l=1}^{n(k)} \text{Lg } u_l + \varepsilon^2 \left(\text{grad } \sum_{l=1}^{n(k)} \text{Lg } u_l \right)^2 \right\} u_k. \quad (1)$$

Schon im Teil I wurde darauf hingewiesen, dass in diesen Gleichungen am ehesten das in ε quadratische Glied als problematisch angesehen werden muss. In der Tat hat nun die nähere Untersuchung gezeigt, dass vor allem dieses Glied einen plausiblen Ausdruck für die Erhaltung des einzelnen Teilchens erschwert.

¹⁾ Helv. Phys. Acta XV, 1, 53 (1942).

Die weitere Untersuchung hat dann ergeben, dass folgender überaus einfacher Ansatz die wesentlichsten Vorteile von (1) besitzt, seine Nachteile aber vermeidet:

$$\square u_k = \Lambda u_k + \varepsilon \square \sum_{l=1}^{n(k)} u_l \quad (2)$$

Er hat ausserdem den Vorteil, dass er ohne weiteres in Dirac'schen Operatoren geschrieben werden kann. Es wäre also möglich, die Erhaltungssätze in der engsten Form zum Ausdruck zu bringen, falls sich das als notwendig erweisen sollte.

Schliesslich soll noch ein dritter Vorteil des Systems (2) hervorgehoben werden. Schon im Teil I wurde darauf hingewiesen, dass das System (1) im Koinzidenzfalle — alle Teilchen gehen vom selben Weltpunkt aus — vollständig separierbar ist. Das gilt selbstverständlich auch für (2). Hier gilt aber noch mehr, nämlich: für das System (2) ist das Zweikörperproblem in jedem Falle vollständig separierbar, wenn man geeignete „Lamé'sche“ Koordinaten verwendet. Damit ist also ein methodischer Ansatz für ein relativistisches wellenmechanisches Zweikörperproblem¹⁾ gewonnen, dessen vollständige mathematische Durchführung vielleicht im Bereich des Möglichen liegt.

Bei der Behandlung von (2) zeigt sich nun, dass die Wellengleichung von DE BROGLIE

$$\square u = \Lambda u \quad (3)$$

für verschiedene Massenfaktoren Λ eine ganz zentrale Stellung einnimmt. Setzt man nämlich

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad (4)$$

und

$$u_{kl} = u_k - u_l, \quad (5)$$

so folgt aus (2) entweder durch Addition aller Gleichungen oder durch Subtraktion irgend zweier

$$\square u = \frac{\Lambda}{1 - (n-1)\varepsilon} u \quad (6)$$

resp.

$$\square u_{kl} = \frac{\Lambda}{1 + \varepsilon} u_{kl}. \quad (7)$$

Es ist also notwendig, sich über die physikalisch sinnvollen Lösungen der Gleichung (3) zu orientieren und dieser Aufgabe soll der vorliegende Teil II meiner Untersuchung gewidmet sein.

¹⁾ Vgl. SOMMERFELD: Atombau und Spektrallinien II, 2. Aufl. (1939), S. 209.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, darauf hinzuweisen, dass nach dem oben Gesagten in dem vorliegenden Teil II überhaupt keine neue *formale* Hypothese diskutiert wird. Es handelt sich ausschliesslich um die altbewährte Gleichung (3). Hingegen soll diese Gleichung von dem im Teil I erläuterten Standpunkt einer Weltpunktdynamik im vierdimensionalen Zeitraum aus beurteilt werden. Das Elektron erweist sich in dieser Auffassung, die grundsätzlich von der üblichen abweicht, als ein recht vielgestaltiges Gebilde.

§ 1. Koordinatenwahl und Separation.

Wir setzen

$$A = - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} = - a^2 \quad (8)$$

und schreiben (3) aus:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = - a^2 u. \quad (9)$$

Diese Gleichung haben wir nun im Sinne von I, Postulat 1) zu lösen. Wir setzen also voraus, dass sich im Ursprung

$$(ct, x_1, x_2, x_3) = 0, 0, 0, 0) \quad (10)$$

ein Quant Q_0 befinde und fragen nach der Wahrscheinlichkeitsamplitude

$$u = u(ct, x_1, x_2, x_3), \quad (11)$$

deren Quadrat die relative Häufigkeit des Auftretens eines Quants Q an der Weltstelle

$$(ct, x_1, x_2, x_3) \quad (12)$$

als Wirkung von Q_0 anzeigen soll. Dabei setzen wir ausdrücklich voraus, dass die betrachteten Stellen (12) in dem zum Ursprung gehörigen Zukunftskegel, dem sog. Vorkegel, liegen sollen.

Um die dem Vorkegel innewohnende Symmetrie voll auszunützen, verwenden wir vierdimensionale Polarkoordinaten $r, \Theta, \vartheta, \varphi$, die man am bequemsten definiert durch die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} ct &= r \mathfrak{C} \vartheta \mathfrak{f} \Theta \\ x_1 &= r \mathfrak{S} \sin \Theta \cos \vartheta \\ x_2 &= r \mathfrak{S} \sin \Theta \sin \vartheta \cos \varphi \\ x_3 &= r \mathfrak{S} \sin \Theta \sin \vartheta \sin \varphi \end{aligned} \quad (13)$$

in Verbindung mit den Definitionsbereichen

$$\begin{aligned} 0 &\leq r < \infty \\ 0 &\leq \Theta < \infty \\ 0 &\leq \vartheta \leq \pi \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (14)$$

r ist die vom Ursprung nach der betrachteten Stelle hinführende Weltstanz. Θ bedeutet den hyperbolischen Winkel zwischen Ruhachse und Ortsvektor. Interpretiert man also den Übergang vom Ursprung zum betrachteten Weltstanz (12) als eine Geschwindigkeit v , so gilt

$$\mathfrak{Sg} \Theta = \frac{v}{c}. \quad (15)$$

Bezeichnet man weiter mit ϱ den räumlichen Abstand zwischen dem Ursprung und der Weltstanz, so gilt

$$\varrho = r \mathfrak{S} \Theta. \quad (16)$$

Die Grössen ϱ , ϑ und φ sind dann die gewöhnlichen räumlichen Polarkoordinaten.

Das der getroffenen Koordinatenwahl entsprechende Linien-
element ist gegeben durch

$$ds^2 = dr^2 - r^2 [d\Theta^2 + \mathfrak{S} \Theta^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)]. \quad (17)$$

Daraus ergibt sich das vierdimensionale Volumelement

$$d(ct) dx_1 dx_2 dx_3 = r^3 dr \cdot \mathfrak{S} \Theta^2 d\Theta \cdot \sin \vartheta d\vartheta \cdot d\varphi, \quad (18)$$

sowie der Wellenoperator

$$\begin{aligned} \square u \equiv & \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ & - \frac{1}{r^2 \mathfrak{S} \Theta^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\mathfrak{S} \Theta^2 \frac{\partial u}{\partial \Theta} \right) \\ & - \frac{1}{r^2 \mathfrak{S} \Theta^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) \\ & - \frac{1}{r^2 \mathfrak{S} \Theta^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \quad (19)$$

Nun vollziehen wir die Separation auf Grund des Produktansatzes

$$u = R(r) G(\Theta) P(\vartheta) \Phi(\varphi). \quad (20)$$

Es resultieren die Gleichungen

$$\frac{d^2 \Phi}{d \varphi^2} + m^2 \Phi = 0, \quad (\Phi)$$

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP}{d \vartheta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right] P = 0, \quad (P)$$

$$\frac{1}{\mathfrak{S} \sin^2 \Theta} \frac{d}{d \Theta} \left(\mathfrak{S} \sin^2 \Theta \frac{dG}{d \Theta} \right) + \left[E - \frac{l(l+1)}{\mathfrak{S} \sin^2 \Theta} \right] G = 0, \quad (G)$$

$$\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left(r^3 \frac{dR}{dr} \right) + \left(a^2 + \frac{E}{r^2} \right) R = 0. \quad (R)$$

Die beiden ersten Gleichungen werden in bekannter Weise durch trigonometrische resp. durch Kugelfunktionen gelöst, und wir haben deshalb von vorneherein ihre Eigenwerte als Funktionen der Quantenzahlen m und l eingesetzt.

Neue Momente ergeben die „Radialgleichung“ (R) und vor allem die „Geschwindigkeitsgleichung“ (G), da sie ein kontinuierliches Spektrum von Eigenwerten E aufweist. Diesem „Geschwindigkeitsspektrum“ wollen wir uns jetzt zuwenden.

§ 2. Das Geschwindigkeitsspektrum.

Wir setzen

$$E = 1 - p^2 \quad (21)$$

und erhalten damit an Stelle von (G):

$$\frac{1}{\mathfrak{S} \sin^2 \Theta} \frac{d}{d \Theta} \left(\mathfrak{S} \sin^2 \Theta \frac{dG}{d \Theta} \right) - \left[p^2 - 1 + \frac{l(l+1)}{\mathfrak{S} \sin^2 \Theta} \right] G = 0 \quad (22)$$

Durch die Transformation

$$\mathfrak{S} \sin^2 \Theta = z \quad (23)$$

geht (22) über in

$$(z^2 - 1) \frac{d^2 G}{dz^2} + 3z \frac{dG}{dz} - \left[p^2 - 1 + \frac{l(l+1)}{z^2 - 1} \right] G = 0. \quad (24)$$

Durch die Substitution

$$G \equiv G(l, z) = (z^2 - 1)^{\frac{l}{2}} H(l, z) \equiv (z^2 - 1)^{\frac{l}{2}} H \quad (25)$$

geht weiter (24) über in

$$(z^2 - 1) \frac{d^2 H}{dz^2} + (2l + 3)z \frac{dH}{dz} - [p^2 - 1 - l(l + 2)] H = 0. \quad (26)$$

Aus (26) schliesst man leicht, dass man aus jeder Funktion $H(l-1, z)$ eine Funktion $H(l, z)$ erhält durch einfache Ableitung:

$$H(l, z) = \frac{d}{dz} H(l-1, z). \quad (27)$$

In Verbindung mit (25) folgt daraus, dass man Lösungen von (24) auf Grund der Formel

$$G(l, z) = (z^2 - 1)^{\frac{l}{2}} \left(\frac{d}{dz} \right)^l K(z) \quad (28)$$

erhält, wo $K(z) \equiv G(0, z)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$(z^2 - 1) \frac{d^2 K}{dz^2} + 3z \frac{dK}{dz} - (p^2 - 1) K = 0 \quad (29)$$

ist. Um ein Hauptsystem dieser Differentialgleichung in möglichst bequemer Gestalt zu erhalten, empfiehlt es sich, wiederum gemäss (23) auf die ursprüngliche Variable Θ zurückzugreifen.

Die Gleichung (29) geht dann über in

$$\frac{1}{\mathfrak{S} \sin^2 \Theta} \frac{d}{d\Theta} \left(\mathfrak{S} \sin^2 \Theta \frac{dK}{d\Theta} \right) - (p^2 - 1) K = 0. \quad (30)$$

Nun bestätigt man leicht, dass ein Hauptsystem von (30) gegeben wird durch

$$K_1(\Theta) = \frac{e^{p\Theta}}{\mathfrak{S} \sin \Theta}; \quad K_2(\Theta) = \frac{e^{-p\Theta}}{\mathfrak{S} \sin \Theta}. \quad (31)$$

An Stelle von (28) tritt nun der

Satz: Aus jeder Lösung $K(\Theta)$ von (30) erhält man eine Lösung von (22) vermittelt der Formel

$$G(\Theta) = (\mathfrak{S} \sin \Theta)^l \left(\frac{1}{\mathfrak{S} \sin \Theta} \frac{d}{d\Theta} \right)^l K(\Theta). \quad (32)$$

Gestützt auf das Hauptsystem (31) von (30) erhält man also ein Hauptsystem von (22).

Um nun die im Sinne der Wahrscheinlichkeitsinterpretation brauchbaren Lösungen auszuscheiden, wollen wir einige Unterscheidungen treffen.

Es liege allgemein die selbstadjungierte Eigenwertdifferentialgleichung

$$(P(x)y')' - Q(x)y + E(q)D(x)y = 0 \quad (33)$$

mit dem Definitionsbereich $a \leq x \leq b$ vor, deren Eigenwert E also eine bekannte Funktion eines Zustandsparameters q sei. Sei weiter $N(q)$ der zur Eigenlösung $y(q, x)$ gehörige Normierungsfaktor. Nun wollen wir folgende Ausdrucksweisen einführen:

1. Die Eigenlösung heisse „im engeren Sinne normierbar“, falls eine Normierung

$$\int_a^b N(q)^2 [y(q, x)]^2 D(x) dx = 1 \quad (34)$$

möglich ist.

2. Die Eigenlösung heisse „im weiteren Sinne normierbar“, falls eine Normierung

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0}} \int_{q_1}^{q_2} \frac{N(q) N(\kappa)}{E(q) - E(\kappa)} \left\{ P(x) \left[y(q, x) \frac{\partial y(\kappa, x)}{\partial x} - y(\kappa, x) \frac{\partial y(q, x)}{\partial x} \right] \right\} dq = 1 \quad (35)$$

im Sinne der Theorie der kontinuierlichen Spektren¹⁾ möglich ist, wo also der festgehaltene Parameterwert κ dem Intervall (q_1, q_2) angehört.

Im 1. Falle kann man von einer absoluten Wahrscheinlichkeit sprechen dafür, das betrachtete Objekt im Koordinatenintervall $(x, x + dx)$ anzutreffen:

$$dw = N(q)^2 [y(q, x)]^2 D(x) dx. \quad (36)$$

Im 2. Falle stellt (36) nur eine relative Wahrscheinlichkeit dar. Trotzdem ist die Normierung von Bedeutung, denn nur sie gestattet die relativen Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Zustände — d. h. für verschiedene q — miteinander zu vergleichen.

Um die Existenz von Integralen (35), (36) bei unseren Lösungen (32) beurteilen zu können, benötigt man das asymptotische Verhalten dieser Lösungen in den Randpunkten $\Theta = 0$ und $\Theta = \infty$. Durch Reihenentwicklung nach Θ an der Stelle $\Theta = 0$ und nach $e^{-\Theta}$ an der Stelle $\Theta = \infty$ findet man

$$G(\Theta) \underset{\Theta \rightarrow 0}{\sim} \Theta^l \left(\frac{d}{\Theta d\Theta} \right)^l K(\Theta) \quad (37)$$

und

$$G(\Theta) \underset{\Theta \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{d}{d\Theta} \right)^l K(\Theta). \quad (38)$$

¹⁾ Siehe E. FUES, Ann. d. Phys. **81**, 295ff. (1926).

Zwecks Berechnung der Integrale bringt man nun (22) vermittle Multiplikation mit $\mathfrak{S}\text{in}^2 \Theta$ auf die (33) entsprechende Gestalt

$$\frac{d}{d\Theta} \left(\mathfrak{S}\text{in}^2 \Theta \frac{dG}{d\Theta} \right) - l(l+1)G + (1-p^2) \mathfrak{S}\text{in}^2 \Theta \cdot G = 0, \quad (39)$$

wo also $E = 1 - p^2$ Eigenwert und p Zustandsparameter ist.

Die Ergebnisse der rechnerischen Analyse sind — soweit wir sie brauchen — folgende.

$$\text{I.} \quad -\infty < E < 1,$$

p also reell. Wir nehmen p positiv an, also

$$p = |\sqrt{1-E}|.$$

Die einzigen normierbaren Lösungen ergeben sich für $l=0$ zu

$$g_0(\Theta) = N(p) \frac{e^{-p\Theta}}{\mathfrak{S}\text{in} \Theta} \quad (40)$$

mit dem Normierungsfaktor

$$N(p) = \sqrt{2p}. \quad (41)$$

Diese Lösungen sind im engeren Sinne normierbar und an der Stelle $\Theta=0$ mit einem Pol erster Ordnung behaftet.

$$\text{II.} \quad 1 < E < \infty$$

also p rein imaginär. Wir setzen

$$p = iq. \quad (42)$$

Die normierbaren Lösungen sind gegeben durch

$$g(q, l; \Theta) = N(q) (\mathfrak{S}\text{in} \Theta)^l \left(\frac{d}{\mathfrak{S}\text{in} \Theta d\Theta} \right)^l \left(\frac{\sin q\Theta}{\mathfrak{S}\text{in} \Theta} \right) \quad (43)$$

mit dem Normierungsfaktor

$$N(q) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{q^l}. \quad (44)$$

Sie sind nur im weiteren Sinne normierbar, hingegen mit Einschluss der Ränder stetig. Die Stelle $\Theta=0$ ist eine Nullstelle der Ordnung l , wie man sofort feststellt, wenn man beachtet, dass $\frac{\sin(q\Theta)}{\mathfrak{S}\text{in} \Theta}$ eine gerade Funktion von Θ ist. Diese Lösungen verdienen insofern besondere Beachtung, als sie ein kontinuierliches Spektrum darstellen, das genau den Schrödinger'schen Stetigkeitsforderungen entspricht, während das bei I nicht der Fall ist.

Die mutmassliche Deutung kann natürlich erst erläutert werden, wenn man auch die Radiallösung kennt.

§ 3. Die Radialgleichung.

Es handelt sich um die Gleichung (R) in § 1 mit der Welt-
distanz r als unabhängiger Variablen. Gemäss (21) setzen wir

$$E = 1 - p^2,$$

so dass (R) übergeht in

$$\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left(r^3 \frac{dR}{dr} \right) + \left(a^2 + \frac{1 - p^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (45)$$

Mit

$$r = \frac{s}{a} \quad (46)$$

und

$$R = \frac{J}{s} \quad (47)$$

geht (45) über in

$$\frac{d^2 J}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dJ}{ds} + \left(1 - \frac{p^2}{s^2} \right) J = 0, \quad (48)$$

also eine Bessel'sche Differentialgleichung mit dem Parameter p .

Nun treffen wir wieder die im vorigen Paragraphen vorge-
nommene Fallunterscheidung

I. p reell :

Für (45) ergibt sich die Lösung

$$R = M(p) \cdot \frac{J_p(ar)}{r}, \quad (49)$$

wo $M(p)$ einen Normierungsfaktor bedeutet, dem wir den Wert

$$M(p) = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad (50)$$

erteilen wollen. Die Motivierung dieser Wahl — von einer Begrün-
dung kann vorderhand noch nicht gesprochen werden — soll nach-
her für die Fälle I und II gleichzeitig vorgebracht werden.

Wir unterlassen es auch, Lösungen für negativen Index zu notieren, da dieselben — wenn überhaupt — wegen der erforderlichen Konvergenz des Wahrscheinlichkeitsintegrals an der Stelle $r = 0$ nur in sehr beschränktem Umfang zulässig sind.

II. p rein imaginär :

Wir setzen also wieder gemäss (42)

$$p = iq$$

und erhalten für (45) die Lösung

$$R = M(q) \cdot \frac{J_{iq}(ar)}{\sqrt{2} \cdot r}, \quad (51)$$

wobei für den Normierungsfaktor die Wahl

$$M(q) = \frac{a}{\sqrt{2} \operatorname{Cof}(\pi q)} \quad (52)$$

getroffen werden soll. Entsprechend unserer Beschränkung auf reelle Amplituden müsste in (51) rechts entweder der Realteil oder der Imaginärteil genommen werden. Diese beiden Komponenten sind nicht wesentlich voneinander verschieden. Sie unterscheiden sich für grosse Argumente nur in asymptotisch konstanten Amplituden und einer asymptotisch konstanten Phasenverschiebung. Wir haben deshalb in (52) kurz eine mittlere Normierung in bezug auf die Dichte RR^* vorgenommen.

Nun zur Motivierung der vorgenommenen Normierung. Dabei genügt es, den formal einfacheren Fall I zu betrachten.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte, das Quantum in der Distanz r anzutreffen, ist gegeben durch

$$R^2 = M^2 \cdot \left(\frac{J_p(ar)}{r} \right)^2.$$

Die Häufigkeit der auf das Intervall (r_1, r_2) entfallenden Quanten ist also gegeben durch

$$\int_{r_1}^{r_2} R^2 r^3 dr = M^2 \cdot \int_{r_1}^{r_2} [J_p(ar)]^2 r dr. \quad (53)$$

Für grosse ar gilt aber asymptotisch

$$J_p(ar) \sim \frac{\cos\left[ar - \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}\right]}{\sqrt{\frac{\pi ar}{2}}}. \quad (54)$$

Wählt man also für r_1 und r_2 zwei aufeinanderfolgende Minima der Amplitude, d. h. erstreckt man das Integral (53) über eine Schwingung, so folgt asymptotisch für grosse ar

$$\int_{r_1}^{r_2} R^2 r^3 dr \sim \frac{2 M^2}{a^2}, \quad (55)$$

d. h.: Für grosse ar ist die Zahl der auf eine Schwingung entfallenden Wirkungen asymptotisch konstant. Nun entspricht nach unserer Auffassung das ganze Wellenfeld den mutmasslichen Wirkungen des *einen* im Ursprung angenommenen Ausgangsquantums Q_0 . Es ist deshalb das Einfachste, jeder einzelnen Schwingung ein einmaliges Auftreten einer Wirkung zuzuordnen. Man setzt also in (55) die rechte Seite gleich 1, womit die Normierung (50) gewonnen ist. Die Relation (55) sagt dann aus, *dass jede Wirkung asymptotisch für „grosse“ Weltdistanzen erhalten bleibt* (praktisch handelt es sich um Distanzen, die gross sind gegenüber der Compton-Wellenlänge $1/a$).

Genau dieselbe Überlegung und eine fast ebenso leichte Rechnung führt auf die Normierung (52).

Zum Schluss wollen wir uns noch vergegenwärtigen, wie sich die Radiallösungen den Schrödinger'schen Stetigkeitsforderungen unterordnen. Diejenigen Lösungen, wo diese Forderungen erfüllt sind, kommen offenbar nur beim Falle I vor. Die Verhältnisse liegen also gerade umgekehrt wie beim Geschwindigkeitsspektrum. *Es gibt also überhaupt keine partikuläre Lösung der Gleichung (3), die in allen Variablen den Schrödinger'schen Forderungen genügt.* Wir haben uns also zu entscheiden, für welche Variable wir diese Forderungen preisgeben wollen. Da scheint es mir nun natürlich, diese Preisgabe bei der Weltdistanz r zuzulassen, denn $r = 0$ bedeutet den Rand des Vorkegels, während die Stellen $\Theta = 0$ im Innern liegen. Bei dieser Auffassung wäre also auf jeden Fall der Fall II zuzulassen.

§ 4. Die Interpretation.

Wir beginnen mit dem reichhaltigeren und im Vorkegel ausnahmslos stetigen Fall II, wo also $p = iq$ ist. Die Faktoren der partikulären Lösung (20) sind zu entnehmen aus folgender Tafel:

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \\
 P &= \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot P_l^m(\cos \vartheta) \\
 G &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} q^{-l} G_q^l(\cos \Theta) \\
 R &= \frac{a}{2 \sqrt{\cos q\pi}} \cdot \frac{J_{iq}(ar)}{r}
 \end{aligned} \tag{56}$$

Hier sind in Zeile 2 und 4 die bekannten Symbole für Kugel- und Bessel'sche Funktionen verwendet, in Zeile 3 aber steht in angepasster Bezeichnung unser früheres, durch (43) und (44) definiertes $g(q, l, \Theta)$. Es gilt also

$$G_q^l(\cos \Theta) = (\sin \Theta)^l \left(\frac{d}{\sin \Theta d\Theta} \right)^l \left(\frac{\sin q\Theta}{\sin \Theta} \right). \tag{57}$$

Um dem Leser ein anschauliches Bild dessen zu vermitteln, was ich mir vorgestellt habe, entnehmen wir aus (56) nur reelle Lösungen und definieren demgemäss die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auftreten einer durch Q_0 verursachten Wirkung Q an der Stelle $(r, \Theta, \vartheta, \varphi)$ des Vorkegels durch das ausnahmslos positive Quadrat

$$w = u^2 = R^2 G^2 P^2 \Phi^2. \tag{58}$$

Die dadurch bedingte Änderung des Normierungsfaktors von R wollen wir aber ausser Betracht lassen, da vorderhand die Phasen keine Rolle spielen.

Analysiert man nun den Verlauf der Dichte w , so konstatiert man, dass der Vorkegel in lauter Zellen zerfällt, von denen jede einzelne ein Dichtemaximum aufweist, während auf ihrem Rande die Dichte 0 herrscht. Das ganze Wellenfeld erhält also eine körnige Struktur, welche die von uns im Teil I angenommene These von intermittierendem Auftreten der Wirkungen veranschaulicht. Selbstverständlich muss es vorderhand eine offene Frage bleiben,

ob sich die Dinge wirklich so abspielen. Gerade in dem jetzt zu betrachtenden Falle II bietet die Definition

$$w = uu^* = RR^*G^2P^2\Phi\Phi^* \quad (59)$$

zum mindesten rechnerische Vorteile, und die Normierung in (56) wurde daher ihr. angepasst

Die für die vorgeschlagene Lösung charakteristischen Züge sind fast vollständig enthalten in den Faktoren $G(\Theta)$ und $R(r)$. Es soll deshalb das, was man den Formeln entnehmen kann, noch kurz für die Variablen r und Θ in Worten geschildert werden.

In bezug auf r zerfällt der Kegel in eine unendliche Serie von hyperbolischen Schalen, die gegen Unendlich asymptotisch äquidistant verlaufen und gegen Null eine Häufung aufweisen (singuläre Oscillation).

In bezug auf Θ weisen die Meridialebenen (r, Θ) eine fächerartige Struktur auf, die nach den Geraden $\Theta = \text{konst.}$ orientiert ist, und deren einzelne Glieder von $\Theta = 0$ an mit abnehmender Breite einer Häufungsstelle bei $\Theta = \infty$ zustreben (Geschwindigkeitsverteilung). Allgemein wird die Gliederung mit wachsendem q feiner. Für $l = 0$ liegt das Maximum der Maxima auf der Ruhachse. Für $l > 0$ verschiebt es sich nach Massgabe von l in der Richtung wachsender Θ . Gleichzeitig überlagert sich dieser Feingliederung eine zweite Gliederung, bestehend aus endlich vielen Oszillationen, deren Anzahl mit l wächst.

Durch Integration von w nach φ und ϑ erhalten wir die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$w_q^l(\Theta, r) = RR^*G^2 \quad (60)$$

für das Auftreten einer zum Zustand (l, q) gehörigen Wirkung mit den Koordinaten (Θ, r) . Dies bedeutet anschaulich das Auftreten einer Wirkung zur Zeit $t = \frac{1}{c} r \mathfrak{C}os \Theta$ auf einer Kugel vom Radius $\varrho = r \mathfrak{S}in \Theta$.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte, zur Zeit t innerhalb einer Kugel vom Radius $\varrho_0 = ct \mathfrak{S}g \Theta_0$, um den räumlichen Nullpunkt eine Wirkung zu erfahren, ist daher gegeben durch

$$W_q^l(ct, \Theta_0) = \int_0^{\Theta_0} |R(r)|^2 G(\Theta)^2 \varrho^2 d\varrho, \quad (61)$$

wobei also zu setzen ist

$$r = \frac{ct}{\mathfrak{C}os \Theta} \quad (62)$$

$$\varrho = ct \mathfrak{S}g \Theta. \quad (63)$$

Statistisch ist also durch (61) die relative Anzahl der „Teilchen“ gegeben, deren „Geschwindigkeit“ zur Zeit t zwischen 0 und $v_0 = c \mathfrak{E}g \Theta_0$ liegt. Mit Teilchen und Geschwindigkeit ist natürlich nur die Konfiguration, bestehend aus dem ursprünglichen Quant Q_0 und dem an der beobachteten Stelle auftretenden Quant Q gemeint. Die Geschwindigkeit, die zur Beobachtung gelangt, wäre also ein mittlerer Differenzenquotient.

Aus Gleichung (61) ergibt sich nun eine wichtige Folgerung, wenn man den Grenzübergang $ct \rightarrow \infty$ vollzieht. Setzt man nämlich

$$\lim_{ct \rightarrow \infty} W_q^l(ct, \Theta_0) = W_q^l(\Theta_0), \quad (64)$$

so ergibt sich die Rechnung auf Grund von (56) und (54)

$$W_q^l(\Theta_0) = \frac{2a}{\pi^2 q^2 i} \int_0^{\Theta_0} [G_q^l(\mathfrak{C} \mathfrak{v} \mathfrak{f} \Theta)]^2 \frac{\mathfrak{S} \sin^2 \Theta}{\mathfrak{C} \mathfrak{v} \mathfrak{f} \Theta} d\Theta. \quad (65)$$

Wir haben damit das Resultat:

Die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, dass das Teilchen zu einer bestimmten Zeit t mit einer Geschwindigkeit eintrifft, die zwischen 0 und $v_0 = c \mathfrak{E}g \Theta_0$ liegt, nähert sich mit wachsendem t einem bestimmten Grenzwert $W_q^l(\Theta_0)$.

Das Integral (65) konvergiert aber auch noch, wenn man $\Theta_0 \rightarrow \infty$ gehen lässt. Setzen wir also

$$\lim_{\Theta_0 \rightarrow \infty} W_q^l(\Theta_0) = W_q^l, \quad (66)$$

so haben wir

$$W_q^l = \frac{2a}{\pi^2 q^2 i} \int_0^{\infty} [G_q^l(\mathfrak{C} \mathfrak{v} \mathfrak{f} \Theta)]^2 \frac{\mathfrak{S} \sin^2 \Theta}{\mathfrak{C} \mathfrak{v} \mathfrak{f} \Theta} d\Theta. \quad (67)$$

Es gilt also:

Die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, dass das Teilchen zu einer bestimmten Zeit t überhaupt auftritt, nähert sich mit wachsendem t einem bestimmten Grenzwert W_q^l .

Es besteht also auch in den phänomenologischen Koordinaten (ct, x_1, x_2, x_3) ein Erhaltungssatz. Das Integral (67) bezieht sich nun auf einen genauen Querschnitt, um die wirkliche Wahrscheinlichkeit zu erhalten, muss man also noch über ein Intervall $\Delta(ct)$ integrieren. Wir können nun Δt so wählen, dass die Wahrscheinlichkeit 1 wird und haben damit die Folgerung:

Nach Ablauf einer genügend grossen Zeit lässt sich ein Zeitintervall

$$\Delta t_q^l = \frac{1}{c W_q^l} \quad (68)$$

angeben mit der Eigenschaft, dass innerhalb dieses Zeitintervalls die Wirkung im Mittel genau einmal auftritt.

Geben wir statt dessen eine Zeitdifferenz Δt beliebig vor, so können wir auch sagen:

Nach Ablauf einer genügend grossen Zeit ist die mittlere Anzahl Z der von unserem Teilchen innerhalb eines vorgegebenen Zeitintervalls Δt ausgeübten Wirkungen gegeben durch

$$Z = c W_q^l \cdot \Delta t. \quad (69)$$

Die Grösse hcW_q^l spielt offenbar die Rolle einer Energie, und die Existenz des Grenzwerts (67) kann als die asymptotische Erhaltung der mittleren Energie des Teilchens gedeutet werden. Den wahren Erhaltungssatz hat man im Postulat 1) von Teil I zu erblicken, aus dem ja alles übrige — mit Ausnahme der Normierungen (50) und (52) des vorigen Paragraphen — abgeleitet wurde.

Die vorgeschlagene Interpretation ermöglicht vielleicht ein besseres Verständnis für die Vorgänge beim kontinuierlichen β -Spektrum, denn sie liefert ja schon für die Trägheitsbewegung des Elektrons ein kontinuierliches und für $l > 0$ mit Selektion versehenes Geschwindigkeitsspektrum.

Wir gehen nun über zu Fall I, wo also p reell ist und $l = 0$ sein muss. An Stelle der Tafel (56) tritt

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ P &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ G &= \sqrt{2} p \frac{e^{-p\Theta}}{\text{Sin } \Theta} \\ R &= \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{J_p(ar)}{r} \end{aligned} \quad (70)$$

Die Berechnungen verlaufen wie oben. An Stelle von (65) erhalten wir, indem wir den Index $l = 0$ weglassen,

$$W_p(\Theta_0) = \frac{ap}{\pi} \int_0^{\Theta_0} \frac{d\Theta}{e^{2p\Theta} \text{Cos } \Theta}, \quad (71)$$

und an Stelle von (67)

$$W_p = \frac{ap}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\Theta}{e^{2p\Theta} \mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{I} \Theta} . \quad (72)$$

Im übrigen gelten natürlich vollkommen analoge Aussagen, wie sie eben für den Fall II formuliert wurden.

Nun stehen wir also wieder vor der Frage, ob man diesen Fall ausschliessen muss, einfach deshalb, weil er einen Pol aufweist. Da aber die Lösung sogar absolut normierbar ist, wäre ein solcher Ausschluss vom wahrscheinlichkeitstheoretischen Ausschluss aus nicht zu verstehen. Ich muss gestehen, dass mich die Argumente, die für den Ausschluss geltend gemacht werden, nicht zu überzeugen vermögen. Die Unbrauchbarkeit des $l=0$ entsprechenden singulären Zustandes könnte ja auch darauf beruhen, dass für diesen Fall die Ausstrahlungsregeln versagen.

Liesse sich nun der Fall II in die Theorie einordnen, so könnte die von uns durchdiskutierte Lösung eventuell gedeutet werden als ein Teilchen, das zweier Serien von Zuständen fähig ist. Die eine Serie — die p -Serie — würde der Materie, die andere — die q -Serie — dem Licht entsprechen. Bezeichnet man nämlich mit $w_p^0(ct, \Theta)$ resp. $w_q^l(ct, \Theta)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, dass das Teilchen zur Zeit t auf der Peripherie einer Kugel um 0 vom Radius $\varrho = ct \mathfrak{I}g \Theta$ zu treffen, so gelten für grosse t teils asymptotisch, meist aber genau, die Relationen:

$$\frac{w_p^0(ct, \infty)}{w_p^0(ct, 0)} \sim 0; \quad \frac{w_q^l(ct, \infty)}{w_q^l(ct, 0)} \sim \infty . \quad (73)$$

Trotzdem gibt es, wie unsere frühere Statistik zeigt, beim *Einkörperproblem*, kein „genaues“ Licht.

Nun wollen wir noch in den Fällen $l=0$ die Totalenergie des Teilchens für grosse t betrachten. Nach dem oben Gesagten erhält man sie, wenn man (72) resp. (67) mit hc multipliziert. Unter Beachtung von (8) folgt also

$$U_p = hc W_p = 2 m_0 c^2 p \int_0^\infty \frac{d\Theta}{e^{2p\Theta} \mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{I} \Theta} \quad (74)$$

$$U_q^0 = hc W_q^0 = \frac{4 m_0 c^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^2(q\Theta)}{\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{I} \Theta} d\Theta . \quad (75)$$

Durchlaufen nun p und q alle Werte von 0 bis Unendlich, so gehen die zugehörigen Energiewerte kontinuierlich in zwei Grenzwerte über, die leicht zu bestimmen sind. Man findet:

$$U_{p=\infty} = m_0 c^2; \quad U_{q=\infty}^0 = m_0 c^2, \quad (76)$$

also in beiden Fällen die Ruheenergie des Elektrons.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass die Verteilungsfunktion (71)

$$W_p(\Theta_0) = \frac{ap}{\pi} \int_0^{\Theta_0} \frac{d\Theta}{e^{2p\Theta} \mathfrak{E}(\Theta)} \quad (71)$$

für $p \rightarrow \infty$ genau in eine δ -Funktion übergeht, womit im Grenzfall ein rein korpuskularer Zustand charakterisiert ist.

Im übrigen sei ausdrücklich hervorgehoben, dass die vorliegende Behandlung des „ruhenden“ und „kräftefreien“ Elektrons gegenüber der üblichen Behandlung folgende neue Momente gebracht hat:

1. Das „ruhende“ Elektron ist verschiedener Zustände fähig, welche durch einen neu einzuführenden Parameter $E = 1 - p^2$ (21) charakterisiert werden.
2. Die Energie ist nur asymptotisch für grosse Zeiten als Mittelwert definierbar.
3. Jedem Zustand ist eindeutig eine Energie zugeordnet.
4. Die sog. Ruhenergie ergibt sich nur in zwei Grenzfällen.

Wichtig ist vor allem die sich ergebende asymptotische Konstanz der Energie. Die hier vorgenommene Bewertung hängt natürlich von der auf (55) gestützten Normierung ab und muss vorderhand als provisorisch angesehen werden. Es könnte sich ja als notwendig herausstellen, die Normierung über Querschnitte $t = \text{konstans}$ vorzunehmen.

Im Gegensatz zur Energie hat in unserer Lösung die Konstante E für jeden Punkt des Vorkegels eine exakte Bedeutung, und es soll deshalb noch kurz die kinematische Deutung von E gegeben werden. Setzt man

$$(ct, ix_1, ix_2, ix_3) = (y_0, y_1, y_2, y_3) \quad (77)$$

und führt man ausserdem

$$y_k \frac{\partial}{\partial y_l} - y_l \frac{\partial}{\partial y_k} = F_{kl} \quad (78)$$

als dimensionslosen Operator ein, so findet man, dass für unsere zentralsymmetrischen Lösungen (20) genau gilt

$$\frac{1}{2} F_{kl} F_{kl} u = E u. \quad (79)$$

E stellt also das „Quadrat“ des Sechservektors (78) dar.

Dem Operator F_{kl} korrespondiert punktdynamisch — abgesehen von der Dimension — der Rotor

$$m_0 (y_k \dot{y}_l - y_l \dot{y}_k) = P_{kl} \quad (80)$$

wo der Punkt die Ableitung nach einem Parameter von der Dimension einer Zeit bedeuten möge. In den Polarkoordinaten (13) gilt dann

$$\frac{1}{2} P_{kl} P_{kl} = - m_0^2 r^4 [\dot{\Theta}^2 + \Theta \sin^2 \Theta (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2)]. \quad (81)$$

Wir setzen also

$$\frac{1}{2} P_{kl} P_{kl} = - J^2 \quad (82)$$

wo J^2 eine positive Konstante ist. Nach der Operatorregel

$$m_0 \dot{y}_k \sim \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y_k} \quad (83)$$

folgt dann gemäss (78)

$$\frac{1}{2} F_{kl} F_{kl} u = \frac{J^2}{\hbar^2} u \quad (84)$$

und daher

$$E = \frac{J^2}{\hbar^2} \quad (84)$$

Korrespondenzmässig erhält man also alle $E > 0$, d. h. die ganze q -Serie und ein Stück der p -Serie.

Schlussbemerkungen.

Mancher Leser wird sich vielleicht sagen, das Vorgebrachte sei wohl eine mathematisch ganz interessante Behandlung der kräftefreien Wellengleichung (3), es sei aber nicht einzusehen, wie auf dieser Grundlage die sog. klassische Wellenmechanik als Grenzfall in dem Umfange hergeleitet werden könne, wie sie sich bewährt habe. Es kommt nun ganz darauf an, in welcher Form und in welchem Umfang diese Forderung geltend gemacht wird.

Es bieten sich im wesentlichen zwei Möglichkeiten, die genannte Forderung zu präzisieren:

1. Man verlangt, dass die zugrundegelegten *Differentialgleichungen* (1) oder (2) durch einen geeigneten Grenzübergang in die üblichen Differentialgleichungen der Wellenmechanik übergehen.

Eine derart formulierte Forderung kommt höchstens für den kräftefreien Fall in Frage. Für die Wechselwirkungsgleichungen halte ich sie für vollkommen falsch und schon darum undurchführbar, weil vorurteilslos betrachtet überhaupt keine brauchbaren relativistischen Wechselwirkungsgleichungen existieren. Die jetzt mit Erfolg verwendeten Wellengleichungen enthalten die Potentiale explicite. Das formal Wesentliche unserer Ansätze beruht aber darauf, dass Wellenfunktionen und Potentiale gleichzeitig durch Integration — sagen wir deutlicher, durch Summation — entstehen. Würde also ein Grenzübergang explicite Potentiale liefern, so käme die Sache gerade verkehrt heraus, da dann die Potentiale bei der Integration gewissermassen nochmals summiert würden.

2. Man verlangt, dass die *Integrale* der zugrundegelegten Differentialgleichungen dasjenige numerisch richtig wiedergeben, was sich in der klassischen Wellenmechanik bewährt hat.

In dieser Form ist die Forderung eine Selbstverständlichkeit, und ihre Erfüllung wird natürlich zur endgültigen Bewährung der vorgeschlagenen Ansätze unerlässlich sein. Doch ist bei der Nennung der zuerst zu behandelnden Aufgaben grösste Vorsicht am Platze. Unser Ausgangspunkt ist das Elektron, und schon das Proton stellt möglicherweise ein sehr komplexes Problem dar. Man darf also nicht verlangen, das Wasserstoffsystem müsse den *ersten* Prüfstein der Theorie bilden. Die in erster Linie zu behandelnde Aufgabe wird die Wechselwirkung zweier Elementarteilchen sein, vermutlich also der *Comptonprozess* im weitesten Sinne des Wortes, wozu meines Erachtens auch die Paarerzeugung gehören sollte.

Ich zweifle also sehr daran, dass es möglich sein wird, die Aussichten der vorgeschlagenen Ansätze durch einige Rechnung rasch nachzukontrollieren.

Für eine rasche Orientierung kommt, wie eben unter 1. erwähnt wurde, höchstens der kräftefreie Fall in Betracht. Hierzu einige kurze Bemerkungen.

Hauptfrage: Warum behandelt man das gebundene Elektron kugelsymmetrisch, das freie Elektron aber als ebene Welle? Ich empfehle jedem Leser, die Gleichung (9) vermittelst des stationären Ansatzes

$$u = e^{2\pi i vt} G(\varrho) P(\vartheta) \Phi(\varphi) \quad (85)$$

zu behandeln und die Lösung sowohl mathematisch als auch wahrscheinlichkeits-theoretisch konsequent durchzudiskutieren. Dazu gehören vor allem zwei Dinge:

1. Die Frequenz ν muss wirklich als frei wählbarer Parameter behandelt werden, so wie sie in (85) auftritt.

2. Die Wahrscheinlichkeiten müssen ausnahmslos interpretiert werden. Wenn also das Quadratintegral divergiert, ist auch kein Teilchen zu finden.

Die Rechnungen verlaufen ähnlich wie in den §§ 1—3, und die Funktionen $\Phi(\varphi)$ und $P(\vartheta)$ bleiben natürlich dieselben. In der Funktion $G(\varrho)$ dagegen werden gewisse Züge der früheren Lösungen $G(\Theta)$ und $R(r)$ verschmolzen, andere gehen verloren.

Instruktiv ist die Interpretation in Analogie zu § 4. Wieder erhält man Lösungen I und II, aber als Ausartungen. I stellt einen völlig bewegungslosen Korpuskel dar, der sich im Grenzfall $\nu = \frac{m_0 c^2}{h} = \nu_0$ über den ganzen Raum verbreitet. Für $\nu > \nu_0$ tritt II ein mit der Wahrscheinlichkeit 0. Das Teilchen ist nach Unendlich abgewandert. Die in vollkommener Analogie zu § 4 durchgeführte Energieberechnung führt — nach vorheriger Normierung über eine Zeitperiode — im Falle I auf

$$U = h\nu \quad (86)$$

im Grenzfall $\nu = \nu_0$ also auf

$$U = m_0 c^2. \quad (87)$$

Diese Lösung — numerisch der ebenen Welle unterlegen, weil sie die Bewegung vermissen lässt — scheint dennoch auf ein sinnvolles Ganzes hinzudeuten. Formal relativistisch invariant, enthält sie doch deutlich die Schwäche der mit dem „Zerspaltungsansatz“ (85) arbeitenden Wellenmechanik: Sie verstösst gegen das Verbot der Überlichtgeschwindigkeit.

Im übrigen können natürlich Ansätze des von uns vorgeschlagenen Typus (2) ohne weiteres mit dem Zerspaltungsansatz behandelt werden. Es ist sehr wohl möglich, dass sich dabei gewisse Züge stabiler Systeme ergeben, welche dynamisch erst auf Grund der vollständigen Lösung des Mehrteilchenproblems erhältlich sind.

Ich will deshalb zum Schluss noch kurz angeben, wie sich nach der Zerspaltungsmethode unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen ein *differentieller Erhaltungssatz* formulieren lässt.

Betrachten wir das System

$$\square u_k = A_{kl} u_l + \varepsilon_{kl} \square u_l, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (88)$$

wo über l zu summieren ist und die „Massenmatrix“ A_{kl} sowie die „Kräftematrix“ ε_{kl} Hermite'sch sein sollen:

$$A_{lk} = A_{kl}^*; \quad \varepsilon_{lk} = \varepsilon_{kl}^* \quad (89)$$

Führt man nun den totalen Teilchenstrom

$$S^\lambda = \frac{\hbar}{2i} \left(u_k^* \frac{\partial u_k}{\partial x_\lambda} - u_k \frac{\partial u_k^*}{\partial x_\lambda} \right) \quad (89)$$

sowie den totalen Strom der Wechselwirkungsenergie

$$T^\lambda = -\frac{\hbar}{2i} \varepsilon_{kl} \left(u^* \frac{\partial u_l}{\partial x_\lambda} - u_l \frac{\partial u_k^*}{\partial x_\lambda} \right) \quad (90)$$

ein, so gilt der differentielle Erhaltungssatz

$$\frac{\partial (S^\lambda + T^\lambda)}{\partial x_\lambda} = 0. \quad (91)$$

Bern, Mathematisches Institut der Universität.
