

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 15 (1942)
Heft: VII

Artikel: Sättigungscharakter der Kernkräfte und Mesontheorie
Autor: Wentzel, G.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-111324>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 30.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sättigungscharakter der Kernkräfte und Mesontheorie

von G. Wentzel.

(3. XI. 1942.)

Die Mesontheorie lässt bei Annahme starker Kopplung die Existenz von Isobaren des Protons mit höheren Ladungs- und Spinwerten erwarten; der für die Kernkräfte charakteristische Austauschoperator enthält dann Terme, die den Umwandlungen in diese Zustände entsprechen, und diese Terme gefährden nach R. SERBER den Sättigungscharakter der Kernkräfte. Da in der Wirklichkeit eher starke als schwache Kopplung vorliegen dürfte, ist es notwendig, die Stabilität der schweren Kerne auf Grund der verschiedenen Mesontheorien neu zu untersuchen. Es wird vorgeschlagen, hierzu eine Thomas-Fermi-Näherung heranzuziehen, bei der aber zu den räumlichen Koordinaten der Nucleonen weitere Koordinaten hinzutreten, z. B. in der Theorie des skalaren geladenen Mesonfeldes die Winkelvariablen, die den Ladungszahlen der Nucleonen kanonisch konjugiert sind.

§ 1. Dass es in der Mesontheorie der Kernkräfte so schwierig ist, zu rechnerisch einwandfreien Ergebnissen zu gelangen, beruht bekanntlich grossenteils darauf, dass man für den dimensionslosen Kopplungsparameter $g^2/\hbar c$ (der dem elektrischen $e^2/\hbar c = 1/137$ entspricht) einen Zahlwert annehmen muss, der grössenordnungsmässig nicht weit unter 1 liegt; die störungstheoretischen Entwicklungen, als Entwicklungen nach steigenden Potenzen dieses Parameters, konvergieren daher schlecht wenn überhaupt¹⁾. Während also die Störungsmethode nur im Falle „schwacher Kopplung“ brauchbar ist, hat man andererseits den Grenzfall „starker Kopplung“, in dem Näherungslösungen durch Entwicklung nach *fallenden* Potenzen des Kopplungsparameters erhalten werden können. Diese Näherungsmethode ist zuerst vom Verfasser am Beispiel des skalaren (PAULI-WEISSKOPF'schen) Feldes entwickelt worden²⁾; in etwas vereinfachter Form wurde sie von OPPENHEIMER und

¹⁾ Vgl. besonders STUECKELBERG und PATRY, Helv. Phys. Acta **13**, S. 167, 1940.

²⁾ WENTZEL, Helv. Phys. Acta **13**, S. 269, 1940 (im folgenden als I zitiert) und **14**, S. 633, 1941 (als II zitiert). Es sei gestattet, die Arbeit I hier noch in einem Punkte zu berichtigen: In § 10 wurde behauptet, dass die Selbstenergie von N Nucleonen in den Termen der Ordnung g^0 nicht additiv sei, d. h. dass sie nicht linear von N abhängt. Diese Behauptung beruht auf einem Rechenfehler. Tatsächlich besteht die Additivität, wenigstens in dieser Näherung.

SCHWINGER³⁾, PAULI, SERBER und DANCOFF⁴⁾ auf andere Feldtypen übertragen. Die Bedingung dafür, dass die Entwicklung nach fallenden Potenzen von g brauchbar ist, lautet im Fall des skalaren Feldes:

$$\frac{g^2}{\hbar c} \gg 1 \quad (1, a)$$

(s. Zitate 3 und 2, II); bei anderen Feldtypen (vektorielles oder pseudoskalares Feld oder Mischungen dieser beiden Felder), mit Wechselwirkungsansätzen, die spin-abhängige Kernkräfte liefern, hat man statt dessen die Bedingung

$$\frac{g^2}{\hbar c} \gg \kappa a \quad (1, b)$$

oder

$$\frac{g^2}{\hbar c} \gg (\kappa a)^2, \quad (1, c)$$

wo κ die reziproke Comptonwellenlänge der Mesonen bedeutet und a den Radius des Nucleons (Proton-Neutrons), den man einführen muss, um die Impulsraumintegrale konvergent zu machen⁵⁾. Nun liegt es im Sinne der Feldtheorie der Kernkräfte,

$$\kappa a \ll 1 \quad (2)$$

anzunehmen; denn es ist ja einer der Grundgedanken der YUKAWAschen Theorie, dass die Reichweite der Kernkräfte durch die Meson-Comptonwellenlänge κ^{-1} bestimmt sein soll, während sie durch den Radius a bestimmt wäre, falls dieser $\gtrsim \kappa^{-1}$ angenommen würde. Unter der Voraussetzung (2) sind aber die Bedingungen (1, b und c) schwächer als (1, a), und es zeigt sich, dass man in Wirklichkeit mit so grossen Zahlwerten von $g^2/\hbar c$ rechnen muss, dass die Kopplung durch pseudoskalare oder vektorielle Felder bereits als stark gelten kann, d. h. dass die Entwicklung nach fallenden Potenzen von g eine gute Näherung liefert, während die Störungsmethode ganz unbrauchbar ist.

Ein charakteristisches Ergebnis der Näherung für starke Kopplung ist die Aussage, dass das Nucleon imstande ist, Mesonen an

³⁾ OPPENHEIMER und SCHWINGER, Phys. Rev. **60**, S. 150, 1941.

⁴⁾ DANCOFF und PAULI, DANCOFF und SERBER, Bull. Amer. Phys. Soc. **16**, Nr. 7, Noten Nr. 7 und 43. Dies sind nur kurze Mitteilungen; die ausführlichen Veröffentlichungen in Phys. Rev. sind, wenn schon erschienen, mir noch nicht zugänglich gewesen.

⁵⁾ In den Arbeiten des Verfassers (Zitat 2) spielt die Gitterkonstante l des Gitterraumes die Rolle der Abschneidelänge a . Die Bedingungen (1, a—b—c) gelten übrigens in dieser Form nur, wenn $\kappa a \lesssim 1$ angenommen wird.

sich zu binden, so dass stationäre Zustände mit höheren Ladungszahlen oder Spinwerten entstehen. Die Energien oder Massen dieser „Proton-Isobaren“ variieren in quadratischer Weise mit der Ladungs- bzw. Spin-Quantenzahl. Im Falle des skalaren geladenen Mesonfeldes z. B. gibt es Isobaren mit den Ladungszahlen $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, während der Spin unverändert $\frac{1}{2}$ ist; die Massen-Ladungsbeziehung ist von der Form:

$$M_n = \text{const} + \frac{\delta}{2} (n - \frac{1}{2})^2, \quad (3)$$

wo die Konstante δ die Grössenordnung $(g^2/\hbar c)^{-1}$ mal Mesonmasse μ hat, also nach (1, a) klein gegen μ ist (vgl. I und Berichtigung in II, Ziffer 2). Wird die YUKAWA'sche Hypothese von der β -Instabilität des Mesons akzeptiert, so sind natürlich auch die Proton-Isobaren β -instabil. Die höheren Isobaren können auch unter Meson-Emission zerfallen, wenn nämlich die Massendifferenz gegenüber dem nächstleichteren Isobar $> \mu$ ist. Die Existenz der Isobaren würde sich unter anderm bei der Streuung von Mesonen an Protonen äussern: das Meson kann beim Streuprozess seine Ladung wechseln, während das Nucleon eine entsprechende Umladung um ± 2 Einheiten erleidet (vgl. I, § 7).

Die Existenz der Proton-Isobaren ist auch von Wichtigkeit für die Theorie der Kernkräfte. Betrachten wir zwei Nucleonen, deren Abstand r grösser als der Protonradius a ist, so ist nach der skalaren Theorie bei starker Kopplung das statische Wechselwirkungspotential gleich

$$-g^2 \frac{e^{-\kappa r}}{4\pi r} \cdot 2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad (4)$$

(vgl. I, Gl. (127); $\kappa = \mu c/\hbar$). Die r -Abhängigkeit sowie die Proportionalität mit g^2 ergibt sich also in formaler Übereinstimmung mit dem bekannten störungstheoretischen Ergebnis für schwache Kopplung; ferner hat auch der Faktor $2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)$ die Bedeutung eines Austauschoperators, doch ist es nicht — wie bei schwacher Kopplung — der für die Heisenbergkraft charakteristische Operator, der die Ladungen von Proton und Neutron vertauscht, vielmehr stellt er ausserdem Umwandlungen in höhere Isobare dar. ϑ_1, ϑ_2 sind nämlich die Winkelvariablen, die zu den Ladungszahlen n_1, n_2 der beiden Nucleonen, genauer gesagt: zu $p_{\vartheta_1} = \hbar(n_1 - \frac{1}{2})$ und $p_{\vartheta_2} = \hbar(n_2 - \frac{1}{2})$, kanonisch konjugiert sind; $e^{\pm i\vartheta_s}$ bedeutet also den Operator, der die Ladungszahl n_s in $n_s \pm 1$ verwandelt. Der Ausdruck

$$2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) = e^{+i\vartheta_1} e^{-i\vartheta_2} + e^{-i\vartheta_1} e^{+i\vartheta_2}$$

ist also die Summe zweier Operatoren, die die Ladungszahlen n_1, n_2 in $n_1 + 1, n_2 - 1$ bzw. in $n_1 - 1, n_2 + 1$ verwandeln (vgl. I, S. 296). So wird beispielsweise das Paar „Neutron-Proton“ nicht nur in das Paar „Proton-Neutron“, sondern auch in das Paar „negatives Proton-doppeltpositives Proton“ verwandelt. Im Falle von Feldern mit Spinkopplung treten entsprechend Operatoren auf, die Spinänderungen der beiden Nucleonen beschreiben.

Denken wir uns nun etwa ein Neutron und ein Proton in so grossem Abstand fixiert, dass die Wechselwirkungsenergie (4) klein ist gegen die Isobaren-Anregungsenergie ($\delta \cdot c^2$ in der Bezeichnung der Gl. (3)), so werden die Übergänge in die höheren Isobaren keine Rolle spielen, und die Eigenwerte des Wechselwirkungsoperators (4) werden dieselben sein wie bei Annahme einer Heisenbergkraft (die Eigenwerte des Heisenberg'schen Austauschoperators sind bekanntlich: 0 für das Neutron-Neutron und das Proton-Proton, ± 1 für das Proton-Neutron mit in den Ladungszahlen symmetrischer bzw. antisymmetrischer Eigenfunktion). Anders wird dies aber, wenn die Teilchen in genügend kleinen Abstand gebracht werden. Ausser der Wechselwirkungsenergie (4) (in der r konstant ist; die Teilchen gelten immer noch als ruhend) haben wir dann die Isobaren-Energien zu berücksichtigen, die nach (3) geschrieben werden können:

$$\frac{\delta c^2}{2} (n_s - \frac{1}{2})^2 = \frac{\varepsilon}{2} p_{\vartheta_s}^2$$

($p_{\vartheta_s} = \hbar (n_s - \frac{1}{2})$, wo n_s ganzzahlig; $\varepsilon = \delta c^2 / \hbar^2$); man erhält so eine Hamiltonfunktion von der Form:

$$H = \frac{\varepsilon}{2} (p_{\vartheta_1}^2 + p_{\vartheta_2}^2) - J \cos (\vartheta_1 - \vartheta_2). \quad (5)$$

Durch Einführung von Schwerpunkts- und relativen Koordinaten

$$\vartheta = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}, \quad \psi = \vartheta_1 - \vartheta_2$$

wird H separiert, und man erkennt leicht, dass im Falle $J \gg \varepsilon \hbar^2 = \delta c^2$ die untersten stationären Zustände nichts anderes sind als Nullpunktsschwingungen in tiefen Potentialmulden; die kleinsten Eigenwerte von H sind also im wesentlichen gleich der Tiefe der Potentialmulden, d. h. gleich $-J = -g^2 e^{-\kappa r} / 2 \pi r^6$). Der Unterschied gegenüber dem Fall von Heisenbergkräften ist evident. Hat

⁶⁾ Die Kenntnis dieser von R. SERBER stammenden Überlegung verdanke ich einer freundlichen brieflichen Mitteilung von W. PAULI.

man mehr als 2 Nucleonen in einem genügend kleinen Volumen, so tritt ebenfalls ein „Einfrieren“ der relativen Winkelkoordinaten in Potentialmulden ein; bei hoher Teilchenzahl N wächst die Bindungsenergie proportional zu N^2 , d. h. *es findet keine Absättigung der Kräfte statt*. In Feldtheorien, die Isobaren höheren Spins liefern, sind die Verhältnisse analog⁷⁾.

Die obige Abschätzung der Energie-Eigenwerte bezieht sich aber, wie betont wurde, nur auf den Fall ruhender (festgehaltener) Nucleonen, und es erhebt sich die Frage, wieweit die Berücksichtigung der Translationsbewegungen das Ergebnis ändern könnte. Wäre es nicht doch denkbar, dass die kinetische Energie einer zu starken Schrumpfung des Kerns entgegenwirkt, so dass der mittlere Abstand der Kernpartikeln noch genügend gross bliebe, um den Sättigungscharakter der Kräfte zu gewährleisten?

Die Näherungsverfahren, die bisher zur Diskussion der Stabilitätsverhältnisse schwerer Kerne herangezogen wurden, eignen sich nicht ohne weiteres zur Beantwortung dieser Frage. Im Folgenden soll auf ein Verfahren hingewiesen werden, das beim Vorhandensein von Austauschkräften vom Typus (4) besonders angemessen scheint. Zur Erläuterung stützen wir uns auf die Hamiltonfunktion, die der Theorie des skalaren geladenen Mesonfeldes bei starker Kopplung entspricht.

§ 2. Wir untersuchen also einen Kern bestehend aus N Nucleonen, die – vom Spin abgesehen – durch je 4 Koordinaten charakterisiert sind: die Ortskoordinaten x_i, y_i, z_i und die Ladungswinkelvariable ϑ_i ($0 \leq \vartheta_i < 2\pi$). Die Wechselwirkungsenergie der Partikeln sei gemäss (4):

$$- \sum_{i < k} J(r_{ik}) \cos(\vartheta_i - \vartheta_k),$$

wo etwa $J(r) = g^2 e^{-\alpha r} / 2\pi r$ (vgl. I, Gl. (133)); die dort mit V'', V''', \dots bezeichneten Terme, die nur für $r_{ik} \lesssim a$ von Bedeutung werden, seien vernachlässigt). Hinzu kommt die Isobaren-Energie

$$\frac{\varepsilon}{2} \sum_i p_{\vartheta_i}^2.$$

Nach der Feldtheorie wären hier streng genommen die Koeffizienten ε durch gewisse Funktionen der Abstände r_{ik} zu ersetzen; doch soll diese Abstandsabhängigkeit ignoriert werden: $\varepsilon = \text{const.}$ Für Nucleonen unrelativistischer Geschwindigkeiten wird man die statische Wechselwirkungsenergie in erster Näherung einfach über-

⁷⁾ Nach Mitteilung von W. PAULI. Vgl. auch DANCOFF und SERBER, Zitat in Fussnote 4, S. 686.

nehmen können, d. h. man wird die kinetische Energie der Nucleonen einfach hinzuaddieren können, so dass man die Hamiltonfunktion erhält:

$$H = \sum_i \left\{ \frac{1}{2M} (p_{x_i}^2 + p_{y_i}^2 + p_{z_i}^2) + \frac{\varepsilon}{2} p_{\vartheta_i}^2 \right\} - \sum_{i < k} J(r_{ik}) \cos(\vartheta_i - \vartheta_k). \quad (6)$$

Unter Zugrundelegung dieser Hamiltonfunktion sollen im Folgenden die Grundzustände schwerer Kerne ($N \gg 1$) untersucht werden.

Es liegt nahe, hierfür eine *Thomas-Fermi-Näherung* zu verwenden, wobei aber anstelle der sonst in dieser Methode betrachteten dreidimensionalen Dichteverteilung $\rho(x, y, z)$ eine vierdimensionale $\rho(x, y, z, \vartheta)$ zu treten hat. Die Potentialfunktion dieser Dichteverteilung ist dann gemäss dem obigen Wechselwirkungsansatz folgendermassen zu definieren:

$$U(x, y, z, \vartheta) = - \iiint dx' dy' dz' d\vartheta' \cdot \rho(x', y', z', \vartheta') \cdot J(\sqrt{(x' - x)^2 + \dots + \dots}) \cos(\vartheta' - \vartheta).$$

Im Innern des Kerns werden ρ und U von x, y, z unabhängig sein; indem wir Oberflächeneffekte vernachlässigen, nehmen wir ρ und U über das ganze Kernvolumen v als konstant an:

$$\rho = \rho(\vartheta), \quad U = U(\vartheta) \text{ innerhalb } v, \quad = 0 \text{ ausserhalb.}$$

Damit wird

$$U(\vartheta) = - A \int_0^{2\pi} d\vartheta' \rho(\vartheta') \cos(\vartheta' - \vartheta), \quad (7)$$

wo

$$A = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 J(r). \quad (8)$$

Andererseits bestimmt sich die Dichteverteilung $\rho(\vartheta)$ durch die Potentialfunktion $U(\vartheta)$ wie folgt: Im Phasenraum mit den Koordinaten $x, y, z, \vartheta, p_x, p_y, p_z, p_\vartheta$ konstruieren wir die Fläche

$$\frac{1}{2M} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{\varepsilon}{2} p_\vartheta^2 + U(\vartheta) = W = \text{const}$$

und denken uns die Zellen vom Volumen h^4 innerhalb dieser Fläche von je zwei Nucleonen besetzt (entsprechend dem Spin $\frac{1}{2}$). Damit wird (in v)

$$\rho dx dy dz d\vartheta = \frac{2}{h^4} dx dy dz d\vartheta \iiint dp_x dp_y dp_z dp_\vartheta,$$

wo das p -Raum-Integral über das Innere des Ellipsoids

$$\frac{1}{2M} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{\varepsilon}{2} p_\vartheta^2 < W - U(\vartheta) \quad (9)$$

zu erstrecken ist⁸⁾; d. h. ϱ ist gleich dem Volumen dieses Ellipsoids multipliziert mit $2h^{-4}$:

$$\varrho(\vartheta) = \begin{cases} B \cdot (W - U(\vartheta))^2, & \text{solange } U(\vartheta) \leq W, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (10)$$

wo

$$B = (2\pi)^2 h^{-4} M^{3/2} \varepsilon^{-1/2} (> 0). \quad (11)$$

Die Gesamtzahl der vorhandenen Partikeln bestimmt sich durch

$$v \int_0^{2\pi} d\vartheta \varrho(\vartheta) = N. \quad (12)$$

Was die Energie des Kerns anbelangt, hat man zunächst die kinetische Energie:

$$E_{\text{kin}} = \frac{2}{h^4} v \int_0^{2\pi} d\vartheta \int \int \int \int dp_x dp_y dp_z dp_\vartheta \left\{ \frac{1}{2M} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{\varepsilon}{2} p_\vartheta^2 \right\},$$

wo das p -Raum-Integral wieder über das Innere des Ellipsoids (9) zu erstrecken ist, was ergibt:

$$E_{\text{kin}} = \frac{2}{3} v \int_0^{2\pi} d\vartheta \varrho(\vartheta) (W - U(\vartheta)) = \frac{2}{3} \left\{ NW - v \int_0^{2\pi} d\vartheta \varrho(\vartheta) U(\vartheta) \right\}.$$

Durch Hinzufügung der potentiellen Energie $\frac{1}{2} \int d\vartheta \varrho(\vartheta) U(\vartheta)$ kommt für die Gesamtenergie:

$$E = \frac{2}{3} NW - \frac{1}{6} v \int_0^{2\pi} d\vartheta \varrho(\vartheta) U(\vartheta). \quad (13)$$

Zur Lösung der Gleichungen (7), (10) und (12) beachten wir, dass $U(\vartheta)$ nach (7) der Differentialgleichung $U'' = -U$ genügt, so dass der allgemeinste Ansatz lautet:

$$U = C \cdot \cos(\vartheta - \alpha).$$

⁸⁾ Die Halbachse des Ellipsoids in der p_ϑ -Richtung ist $\{2(W - U(\vartheta))/\varepsilon\}^{1/2}$; sie wird hier (wenigstens für die hauptsächlichen ϑ -Werte) als gross gegen \hbar angenommen. Sonst kann die p_ϑ -Verteilung nicht als kontinuierliche Verteilung approximiert werden. Vgl. hierzu § 3. — Bezüglich der hier vernachlässigten Austauschenergie vgl. Fussnote 11, S. 697.

Die Phasenkonstante α kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit nullgesetzt werden (es besteht natürlich Invarianz gegenüber der Translation $\vartheta \rightarrow \vartheta - \alpha$); es genügt also der Ansatz:

$$U = C \cdot \cos \vartheta, \quad \text{wo } C \geq 0. \quad (14)$$

Wir unterscheiden 3 Fälle:

$$\text{a) } C = 0, \quad \text{b) } 0 < C \leq W, \quad \text{c) } C > W.$$

Fall a): $C = 0$. Da $U = 0$ ist, wird nach (10) und (12):

$$\varrho = B \cdot W^2 = \frac{N}{2\pi v}, \quad W = (2\pi B \cdot v/N)^{-\frac{1}{2}} (> 0).$$

Die Gleichung (7) ist mit $\varrho = \text{const}$ identisch erfüllt. Aus (13) folgt:

$$\frac{E}{N} = \frac{2}{3} (2\pi B)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{v}{N}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Fall b): $0 < C \leq W$. Nach (10) ist dann:

$$\varrho(\vartheta) = B(W - C \cos \vartheta)^2,$$

und zwar gilt dies im ganzen Intervall $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, da überall $U(\vartheta) \leq W$. Geht man mit diesem Ausdruck in die Gleichung (7) ein, so erweist sich diese als identisch erfüllt, wenn

$$W = \frac{1}{2\pi A B} \quad (16)$$

gesetzt wird. Hier ist zu beachten, dass W in diesem Falle b) nach Definition nur positiv sein kann; da auch B positiv ist, kann also der Fall b) nur eintreten, wenn die durch (8) definierte Konstante A positiv ist⁹⁾:

$$A > 0.$$

Dann folgt weiter aus (12):

$$2W^2 + C^2 = \frac{1}{\pi B} \cdot \frac{N}{v}. \quad (17)$$

Die Ungleichungen $0 < C \leq W$ besagen also:

$$2W^2 < \frac{1}{\pi B} \cdot \frac{N}{v} \leq 3W^2$$

oder mit (16):

$$2\pi A^2 B > \frac{v}{N} \geq \frac{4\pi}{3} A^2 B. \quad (18)$$

⁹⁾ In der skalaren Mesontheorie ist das der Fall.

Dies ist eine weitere Bedingung für die Möglichkeit des Falles b). Um die Energie zu berechnen, beachten wir, dass nach (7) und (14):

$$C = U(0) = -A \int_0^{2\pi} d\vartheta \varrho(\vartheta) \cos \vartheta = -\frac{A}{C} \int_0^{2\pi} d\vartheta \varrho(\vartheta) U(\vartheta),$$

also nach (13):

$$E = \frac{2}{3} NW + \frac{vC^2}{6A}. \quad (19)$$

Entnimmt man hier W aus (16) und C^2 aus (17), so kommt schliesslich:

$$\frac{E}{N} = \frac{1}{2\pi AB} \left(1 - \frac{1}{6\pi A^2 B} \cdot \frac{v}{N} \right). \quad (20)$$

Fall c): $C > W$. Nach (7) und (14) ist jetzt:

$$\varrho(\vartheta) = \begin{cases} B(W - C \cos \vartheta)^2, & \text{solange } \cos \vartheta \leq W/C, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (21)$$

Die Dichteverteilung erstreckt sich also nur noch über das Intervall

$$\vartheta_0 \leq \vartheta \leq 2\pi - \vartheta_0, \quad \text{wo } \cos \vartheta_0 = W/C. \quad (22)$$

Die Bedingungen (7) und (12) können dann in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{1}{ABC} = f(\vartheta_0), \quad \frac{1}{BC^2} \cdot \frac{N}{v} = g(\vartheta_0), \quad (23)$$

wo die Funktionen f und g von ϑ_0 wie folgt definiert sind:

$$\left. \begin{aligned} f(\vartheta_0) &= - \int_{\vartheta_0}^{2\pi - \vartheta_0} d\vartheta (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)^2 \cos \vartheta \\ &= 2 \left\{ \sin \vartheta_0 - \frac{1}{3} \sin^3 \vartheta_0 + (\pi - \vartheta_0) \cos \vartheta_0 \right\}, \\ g(\vartheta_0) &= \int_{\vartheta_0}^{2\pi - \vartheta_0} d\vartheta (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)^2 \\ &= \frac{3}{2} \sin 2\vartheta_0 + (\pi - \vartheta_0) (2 + \cos 2\vartheta_0). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Da f (wie auch g) für alle Werte von ϑ_0 ($0 < \vartheta_0 < \pi$) positiv ist, ist auch der Fall c) nach (23) nur möglich für

$$A > 0.$$

Durch Elimination von C aus den Gleichungen (23) erhält man das Kernvolumen v als Funktion des Parameters ϑ_0 :

$$\frac{v}{N} = A^2 B \cdot \frac{[f(\vartheta_0)]^2}{g(\vartheta_0)}. \quad (25)$$

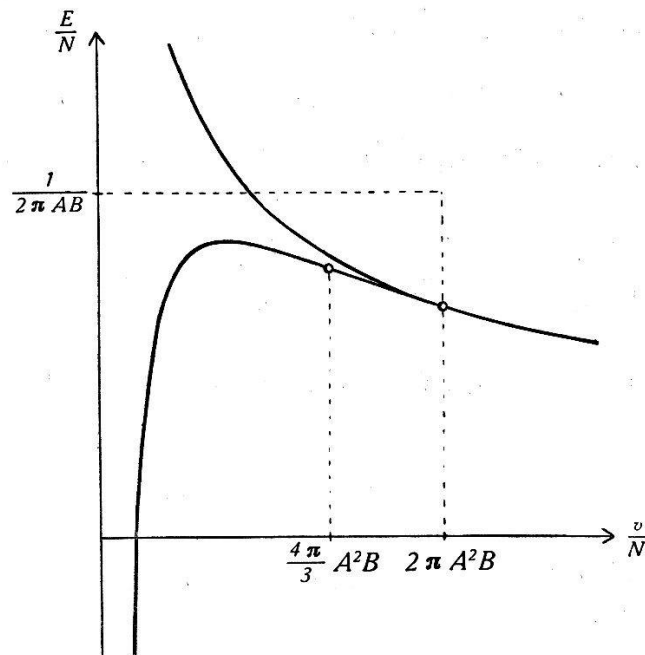
Lässt man ϑ_0 von 0 bis π anwachsen, so nimmt v/N monoton ab von $\frac{4\pi}{3} A^2 B$ bis 0; für den Fall c) ist also notwendig:

$$\frac{4\pi}{3} A^2 B > \frac{v}{N} > 0. \quad (26)$$

Dieses Intervall für v/N grenzt am oberen Rande $\left(\frac{4\pi}{3} A^2 B\right)$ an das Intervall (18) für Fall b). Für die Energie gilt auch hier wieder die Formel (19), wo $W = C \cdot \cos \vartheta_0$ (≥ 0 , je nachdem $\vartheta_0 \leq \pi/2$); mit (23) und (25) erhält man:

$$\frac{E}{N} = \frac{1}{AB} \left(\frac{2 \cos \vartheta_0}{3 f(\vartheta_0)} + \frac{1}{6 g(\vartheta_0)} \right). \quad (27)$$

Die Gleichungen (25), (27) gestatten, E/N als Funktion von v/N zu berechnen.



Die Ergebnisse sind in der beistehenden graphischen Darstellung zusammengefasst: Der obere Kurvenzweig entspricht dem Fall a), bzw. der Gleichung (15); die betreffenden Kernzustände sind möglich für beliebige Werte von v/N und bei beliebigem Vorzeichen von A (8). Wenn A positiv ist, gibt es ausserdem im Intervall $v/N < 2\pi A^2 B$ den unteren Kurvenzweig; er ist im Intervall (18) durch (20) und im Intervall (26) durch (25) und (27)

bestimmt. Die verschiedenen Kurvenstücke schliessen sich überall stetig und mit stetiger Tangente aneinander an (sowohl bei $v/N = 2\pi A^2 B$ als auch bei $v/N = \frac{4\pi}{3} A^2 B$).

Da die Energie E als Funktion des Kernvolumens v kein Minimum aufweist, ist klar, dass *die Kerne mit der Hamiltonfunktion (6) innerhalb des Gültigkeitsbereiches unserer Thomas-Fermi-Näherung keinen Gleichgewichtszustand besitzen*. Charakteristisch ist speziell der asymptotische Verlauf des unteren Kurvenzweiges ($A > 0$) für sehr kleine Werte von v/N ; es wird nämlich

$$E \approx -\frac{A}{2} \cdot \frac{N^2}{v} \quad \text{für} \quad v/N \ll A^2 B. \quad (28)$$

Dieses asymptotische Verhalten ist dasselbe, wie wenn nur gewöhnliche anziehende Kräfte endlicher Reichweite, aber ohne Austauschcharakter vorhanden wären; der sich selbst überlassene Kern würde zusammenbrechen. Aus der Formel (25) kann man entnehmen, dass dieser Verlust des Sättigungscharakters mit dem früher erwähnten „Einfrieren der Winkel“ Hand in Hand geht: mit abnehmendem Kernvolumen v zieht sich die Verteilung $\varrho(\vartheta)$ auf ein immer kleineres Intervall

$$\pi - \left(\frac{15v}{4A^2BN} \right)^{1/5} < \vartheta < \pi + \left(\frac{15v}{4A^2BN} \right)^{1/5}$$

zusammen. Dass andererseits für $A < 0$ (oberer Kurvenzweig, Fall a)) immer $\varrho = \text{const}$, $U = 0$ ist, dürfte mit dem Umstand zusammenhängen, dass je zwei Partikeln — wenn man das Vorzeichen des Wechselwirkungspotentials (4) umkehrt — die Tendenz haben, mit der Phasendifferenz $\vartheta_1 - \vartheta_2 = \pi$ — statt 0 — einzufrieren.

§ 3. In der obigen Rechnung wurden einige Vernachlässigungen begangen, die aber für das Ergebnis nicht entscheidend sein können, solange die Thomas-Fermi-Methode als solche eine gute Näherung liefert. Was zunächst die Oberflächeneffekte anlangt, so werden sie den Zusammenbruch eines sehr grossen und dicht gepackten Kerns nicht verhindern können. Die ebenfalls vernachlässigte Austauschenergie ist im Limes $v \rightarrow 0$ gegenüber dem Term (28) sicher belanglos, und das gleiche gilt von der Coulomb-Energie der positiven Überschussladung¹⁰⁾. Ferner könnte man noch kurzreich-

¹⁰⁾ In der obigen Näherung ist der Mittelwert von p_ϑ aus Symmetriegründen Null, d. h. die Kernladung ist gleich $\frac{1}{2}Ne$, und die Coulomb-Energie ist von der Ordnung $(Ne)^2 v^{-1/3}$. Die Berücksichtigung der Coulombkräfte in der Hamiltonfunktion (6) würde den Ladungsschwerpunkt nach der negativen Seite verschieben und damit die Coulomb-Energie eher verringern.

weitige abstossende Kräfte ohne Austauschcharakter als zusätzlich wirkend annehmen. In der Tat liefert die skalare Mesontheorie solche Zusatzkräfte, die allerdings nur über Entfernungen von der Grössenordnung des Protonradius a wirksam sind (vgl. I, Gl. (132), erster Term; die weiteren Terme stellen Dreikörperkräfte dar). In dieser Hinsicht brauchen wir aber die Aussagen der Feldtheorie nicht einmal als bindend anzusehen, da ja Kräfte der Reichweite a den Charakter von „Nahewirkungen“ haben, über die man im Prinzip nach Belieben verfügen kann. Doch wird auch dadurch das Resultat nicht verbessert, wenigstens solange die Thomas-Fermi-Näherung als zuverlässig gelten kann. Die entsprechende Verallgemeinerung der obigen Rechnung ergibt nämlich nur einen Zusatzterm $\text{const} \cdot N^2/v$ in der Energie, so dass z. B. statt (28) gilt:

$$E \cong \frac{A' - A}{2} \cdot \frac{N^2}{v} \quad \text{für} \quad v/N \ll A^2 B. \quad (29)$$

Unter der Voraussetzung $A' > A$ wird also zwar $\lim_{v=0} E = +\infty$ (auch noch für $A' = A$); doch ergibt sich auch dann kein Gleichgewichtszustand, da E mit zunehmendem v (auch im Bereich $v/N \sim A^2 B$) monoton abfällt.

Nun ist aber zu beachten, dass unsere Näherungsrechnung für v/N -Werte oberhalb eines kritischen Wertes unbrauchbar wird. Die Vorstellung einer Thomas-Fermi-Verteilung im 8-dimensionalen Phasenraum $(x y z \vartheta, p_x p_y p_z p_\vartheta)$ ist nämlich (wie schon bemerkt wurde; vgl. Fussnote 8 auf S. 691) nur dann sinnvoll, wenn der realisierte Maximalwert von $|p_\vartheta|$ gross gegen \hbar ist, d. h. wenn Isobare hoher Ladungszahl im Kern tatsächlich vorhanden sind. Der Maximalwert von $|p_\vartheta|$ ist aber nach (9) und (14) gleich

$$\sqrt{\frac{2}{\varepsilon} (W - U(\pi))} = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} (W + C)};$$

mit zunehmendem v/N fällt er monoton gegen 0 ab, und zwar sowohl für $A > 0$ als für $A < 0$ (untere bzw. obere Kurve in der Figur). Wir können also den kritischen v/N -Wert V definieren durch die Gleichung

$$W + C = \varepsilon \hbar^2 = \delta c^2.$$

Während für $v/N < V$ die obigen Formeln verwendet werden können, wird für $v/N > V$ die bekannte Kerntheorie mit gewöhnlichen Austauschkräften gelten; denn bei diesen geringen Kerndichten ist eben die maximale kinetische Energie $(W + C)$ der Nucleonen so gering, dass ihre höheren Zustände nicht angeregt

sind, d. h. dass sie sich nur im Proton- oder Neutron-Zustand befinden können. Wird $A < 0$ angenommen, so findet man mittels der Formeln für den Fall a) für den kritischen Wert:

$$V = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{h}{c\sqrt{M\delta}} \right)^3. \quad (30)$$

Ist dagegen $A > 0$, so kann V noch in die Intervalle

$$0 \text{ bis } \frac{4\pi}{3} A^2 B, \quad \frac{4\pi}{3} A^2 B \text{ bis } 2\pi A^2 B, \quad \text{oder } 2\pi A^2 B \text{ bis } \infty$$

fallen (vgl. (18), (26)); sind die Konstanten so beschaffen, dass $V \ll A^2 B$ wird, so ergibt sich auf Grund der asymptotischen Formeln für Fall c):

$$V = \frac{1}{8} \left(\frac{15}{2\pi} \right)^{2/3} h^2 M^{-1} A^{1/3} (\delta c^2)^{-4/3} (\ll A^2 B). \quad (31)$$

In allen Fällen ist das kritische Volumen V umso kleiner, je grösser — ceteris paribus — die Isobaren-Anregungsenergie δc^2 angenommen wird¹¹⁾.

Man kann nun offenbar δc^2 so gross annehmen, dass V wesentlich kleiner wird als die tatsächlichen v/N -Werte der schweren Kerne; dann würden sich die Stabilitätsbetrachtungen wieder auf Grund der bekannten Theorie durchführen lassen, in der man nur Protonen und Neutronen mit gewöhnlichen Austauschkräften hat. Natürlich ist dabei vorauszusetzen, dass im Bereich $v/N < V$, wo die Thomas-Fermi-Näherung gilt, die Energie E als Funktion von v/N so beschaffen ist, dass kein Kernzusammenbruch stattfindet; im Falle $A > 0$ wären also etwa abstossende Nicht-Austauschkräfte anzunehmen, so dass die asymptotische Formel (29) mit $A' > A$ gilt (an der Formel (31) ändert dies nichts). Freilich wäre eine Theorie, die ohne Annahmen ad hoc auskommt, vorzuziehen.

¹¹⁾ Berücksichtigt man die Austauschenergie nach dem Verfahren von DIRAC (Proc. Cambr. Phil. Soc. **26**, S. 376, 1930), so erweist sich der Austauschterm als belanglos für $v/N \ll V'$, wo V' durch die Gleichung

$$W + C = \frac{1}{8\pi^4} \left(\frac{g^2}{\hbar c} \right)^2 M c^2$$

bestimmt ist, vorausgesetzt dass die r -Abhängigkeit der Potentialfunktion $J(r)$ gemäss (4) gewählt wird. Im Falle

$$V \ll V', \quad \text{d. h. } \frac{\delta}{M} \gg \frac{1}{8\pi^4} \left(\frac{g^2}{\hbar c^2} \right)^2,$$

kann also die Austauschenergie im ganzen Gültigkeitsbereich der Thomas-Fermi-Näherung vernachlässigt werden. Andernfalls ist die Rechnung für $V' \lesssim v/N \lesssim V$ zu korrigieren, worauf aber hier nicht eingegangen werden soll.

Fordert man also, dass V genügend klein sei, so zeigt sich, dass es kaum möglich ist, die charakteristische Massendifferenz der Isobaren δ kleiner als die Mesonmasse anzunehmen; eher kommt die Grössenordnung der Protonmasse in Betracht. Mit der Annahme starker Kopplung, d. h. mit der Bedingung (1, a), wäre dies nicht mehr verträglich. Es lohnt sich nicht, genauer auf diese Abschätzungen einzugehen, da sie sich in den Einzelheiten zu sehr auf die *skalare* Mesontheorie stützen, die ja aus bekannten Gründen nicht ausreichend ist.

Was die anderen Varianten der Mesontheorie anlangt, dürfte aus den obigen Ergebnissen soviel hervorgehen, dass es unerlässlich ist, eine *jede* Feldtheorie nicht nur in ihrer Anwendung auf leichte Kerne zu prüfen sondern auch hinsichtlich der Stabilität der schweren Kerne zu diskutieren, weil sich hieraus stark einschränkende Kriterien für ihre Brauchbarkeit ergeben können. Dies gilt besonders von solchen Feldtheorien (wie der pseudoskalaren und der vektoriellen Theorie), bei denen die Kopplung tatsächlich als stark zu gelten hat, so dass man mit der Existenz der Isobaren rechnen muss. Es ist der Zweck dieser Arbeit, darauf hinzuweisen, dass für eine solche Diskussion der schweren Kerne die Thomas-Fermi-Näherung gute Dienste leisten kann.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.
