

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta

**Band:** 16 (1943)

**Heft:** I

**Artikel:** Instabilité d'une rangée de tourbillons de long d'une paroi

**Autor:** Patry, J.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-111394>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Instabilité d'une rangée de tourbillons de long d'une paroi

par J. Patry.

(2. II. 1943).

*Introduction.* Le problème de la stabilité des rangées de tourbillons a été étudiée d'une manière approfondie (A). On peut alors montrer que la plupart des séries doubles de tourbillons sont instables. Seule, la disposition de KARMAN ne présente pas d'instabilité propre, mais sa stabilité en première approximation n'est qu'indifférente. Un tourbillon déplacé de sa position normale reste dans sa nouvelle position.

Toutes ces études ont été effectuées avec la supposition que le fluide était infini. La série de tourbillons le long d'une paroi n'a pas encore été étudiée à notre connaissance. Elle diffère de la série double symétrique par le fait que la symétrie doit se conserver. Cette propriété modifie le mouvement des tourbillons déplacés, même en première approximation. Nous verrons que l'instabilité de cette disposition est suffisante pour justifier l'hypothèse de SCHILLER (B) sur la naissance de la turbulence dans les canaux.

## Théorie générale.

Soit une série de tourbillons régulièrement espacés le long d'une paroi, à une distance  $h$  de cette dernière. Nous choisirons les unités de longueur de façon que la distance entre deux tourbillons successifs soit de  $\pi$ . Comme la paroi doit être une ligne de courant, nous considérerons la série symétrique de la première avec la condition que cette symétrie est constamment réalisée. Les tourbillons se déplacent donc par paires et il faudra toujours tenir compte du mouvement du tourbillon symétrique.

Comme système d'axes, nous prendrons l'axe réel comme axe de symétrie. L'axe imaginaire est perpendiculaire à ce dernier, mais n'est pas autrement défini. Sa position exacte par rapport aux tourbillons n'a pas d'importance.

La vitesse d'une particule du fluide est alors donnée par la formule :

$$2\pi(v + i \cdot u) = J \cdot [\text{Cotg}(z - z_0) - \text{Cotg}(z - z_0')] \quad (1)$$

où  $z_0$  est la position d'un tourbillon réel d'intensité  $J$  et  $z_0'$ , celle du tourbillon virtuel correspondant (d'intensité  $-J$ ). En tenant compte de la relation :

$$z_0' + 2 \cdot i \cdot h = z_0. \quad (2)$$

Il est facile de déterminer la vitesse des tourbillons :

$$u_t = \frac{J \cdot \text{Coth } 2h}{2 \cdot \pi} . \quad (3)$$

La vitesse à la paroi, par contre, oscille entre les deux limites :

$$u_1 = \frac{J \cdot \text{Coth } h}{\pi} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{J \cdot \text{th } h}{\pi} . \quad (4)$$

Comme vitesse moyenne, nous prendrons :

$$u_m = \sqrt{u_1 \cdot u_2} = \frac{J}{\pi} . \quad (5)$$

Cette formule permet de déterminer les vitesses par rapport à la paroi où la vitesse moyenne doit être nulle.

$$w_t = u_t - u_m = u_m \cdot \left( \frac{\text{Coth } 2h}{2} - 1 \right) \quad (3')$$

$$w = -u_m .$$

Pour simplifier l'écriture, nous prendrons  $u_m$  comme unité de vitesse comme nous avons pris la distance entre deux tourbillons divisée par  $\pi$  comme unité de longueur. L'unité de temps se déduit facilement de ces deux définitions.

Déterminons maintenant la vitesse d'un tourbillon qui aurait été désaxé. Elle se compose de la vitesse du fluide à cet endroit sous l'influence de la série complète des tourbillons (I), moins l'influence de la paire de tourbillons déplacés (II) plus, enfin, l'influence de tourbillon symétrique à l'endroit exact (III) :

$$2 \cdot (v + i \cdot u) = \text{Cotg } (z - z_0) - \text{Cotg } (z - z_0') - \quad (I)$$

$$- \left( \frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - z_0'} \right) + \quad (II) \quad (6)$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot |y|} \quad (III).$$

Dans le cas d'un tourbillon virtuel, nous aurons exactement la même formule. En tenant compte que :

$$z' - z_0' = (z - z_0)^*$$

on obtient facilement les relations suivantes :

$$u' = u \quad \text{et} \quad v' = -v . \quad (7)$$

La symétrie est donc constamment conservée.

*Instabilité de la série régulière.*

Soit maintenant  $z - z_0 = \xi + i\eta$ , avec  $|\xi + i\eta| \ll 1$ , nous avons :

$$\text{Cotg}(z - z_0') = \text{Coth } 2h + (\xi + i\eta) \cdot \frac{1}{Sh^2 2h}$$

$$\text{Cotg}(z - z_0) - \frac{1}{z - z_0} = \frac{1 - \delta z \cdot \text{Cotg } \delta z}{\delta z} = \frac{\delta z}{3}$$

$$\frac{1}{z - z_0'} + \frac{i}{2 \cdot |y|} = \frac{\delta z^*}{(2h)^2}$$

On en déduit alors facilement les équations du mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -\frac{1}{2} \cdot \left( A + \frac{1}{(2h)^2} \right) \cdot \eta \\ \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{1}{2} \cdot \left( A - \frac{1}{(2h)^2} \right) \cdot \xi \end{aligned} \quad (9)$$

avec

$$A = \frac{1}{Sh^2 2h} + \frac{1}{3}.$$

Introduisons la quantité toujours réelle :

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{A^2 - \frac{1}{(2h)^4}}.$$

Les équations de mouvement pourront s'écrire :

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = \omega^2 \xi; \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \omega^2 \eta. \quad (10)$$

Il y aura donc instabilité dans tous les cas.

Supposons maintenant que le déplacement initial soit perpendiculaire à la paroi. On aura alors :

$$\eta = \eta_0 \cdot Ch \omega t; \quad \xi = -\eta_0 \cdot \left( A + \frac{1}{(2h)^2} \right) \cdot \frac{Sh \omega t}{2 \cdot \omega}. \quad (11)$$

La table 2 donne la valeur du facteur de  $Sh \omega t$  dans  $\xi$ . La fig. 1 montre les trajectoires du tourbillon par rapport à sa position normale. La valeur envisagée pour  $\eta_0$  est toujours celle de  $h \cdot (0,1)$ .

Un calcul semblable nous conduira, pour un écart initial tangent, aux relations :

$$\xi = \xi_0 \cdot Ch \omega t; \quad \eta = - \xi_0 \cdot \left( A - \frac{1}{(2h)^2} \right) \cdot \frac{Sh \omega t}{2 \cdot \omega}. \quad (12)$$

**Table 1.**  
Calcul de  $\omega$  et de  $u_t$ .

$h$	$A + \frac{1}{(2h)^2}$	$A - \frac{1}{(2h)^2}$	$\omega$	$u_t$
0,00	$\infty$	0,00000	0,182	$\infty$
0,05	200,0007	0,00066	0,182	5,01
0,10	50,0026	0,00265	0,182	2,53
0,15	22,2281	0,00592	0,182	1,72
0,20	12,5104	0,01040	0,181	1,32
0,25	8,0160	0,01603	0,180	1,08
0,30	5,5782	0,02269	0,178	0,93
0,35	4,1119	0,03030	0,177	0,83
0,40	3,1637	0,03869	0,175	0,76
0,45	2,5169	0,04777	0,174	0,70
0,50	2,0574	0,05739	0,172	0,66
0,55	1,7203	0,06744	0,170	0,63
0,60	1,4667	0,07778	0,169	0,60
0,65	1,2717	0,08829	0,168	0,58
0,70	1,1193	0,09889	0,166	0,57
0,75	0,9983	0,10945	0,165	0,55
0,80	0,9011	0,11990	0,164	0,54
0,85	0,8222	0,13018	0,164	0,54
0,90	0,7575	0,14022	0,163	0,53
0,95	0,7040	0,14995	0,163	0,53
1,00	0,6594	0,15936	0,162	0,52
$\infty$	0,3333	0,33333	0,167	0,50

**Table 2.**  
Valeurs de  $B = (A + 1/(2h)^2) \cdot 1/2 \cdot \omega$

$h$	$B$	$h$	$B$	$h$	$B$	$h$	$B$
0,00	$\infty$	0,25	22,33	0,50	6,00	0,75	3,03
0,05	549,5	0,30	15,67	0,55	5,06	0,80	2,75
0,10	137,37	0,35	11,65	0,60	4,35	0,85	2,51
0,15	61,23	0,40	9,04	0,65	3,80	0,90	2,32
0,20	34,65	0,45	7,25	0,70	3,37	0,95	2,17
1,00	2,04			$\infty$	1,00		

Le facteur de  $Sh \omega t$  dans  $\eta$  est donc dans ce cas très petit, ce qui fait que le mouvement est très lent. Nous ne l'étudierons pas plus, car la turbulence ne sera pas produite par un tel mouvement.

En tenant compte que l'unité de temps est donnée par le temps pris par le fluide à l'infini pour parcourir la distance entre

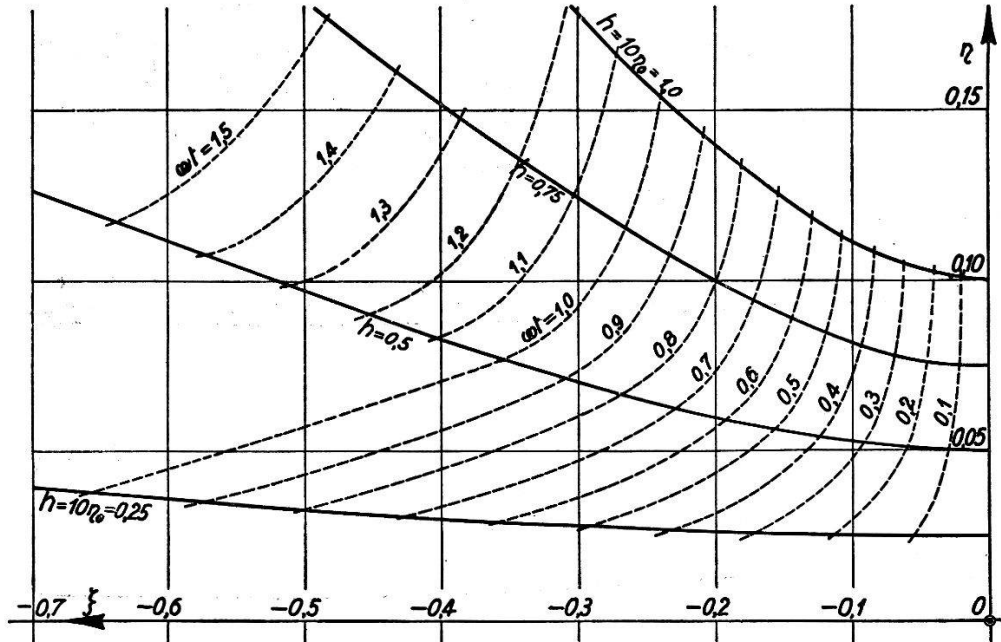


Fig. 1.

*Mouvement en première approximation.*

Les traits pleins représentent les trajectoires d'un tourbillon qui a été déplacé perpendiculairement à la paroi. Les traits pointillés donnent une idée sur la vitesse du mouvement. L'unité de temps est le temps pris par le fluide pour parcourir la distance entre deux tourbillons divisée par  $\pi$ . En tenant compte de la valeur approchée de 0,18 pour  $\omega$ , on constate que le tourbillon a une vitesse du même ordre de grandeur que celle du fluide, si sa position régulière est considéré comme immobile.

deux tourbillons, divisé par  $\pi$ , on constatera que l'instabilité est très forte et que le temps mis par un tourbillon pour sortir manifestement de sa place et pour avoir une influence destructrice sur la série, est relativement minime. Ce résultat sera confirmé par une étude plus exacte sur le mouvement.

*Mouvement en seconde approximation.*

Considérons maintenant l'équation (6) et résolvons-la par une méthode point-par-point. Nous obtiendrons le mouvement exact du tourbillon si tous les autres étaient à leur place. Nous donnons dans la figure 2, les résultats obtenus avec:

$$h = 0,25, \quad \text{d'où } \frac{d}{h} = 12,566.$$

La vitesse des tourbillons est de :

$$u_t = 1,08 \cdot u_m$$

ce qui correspond environ à des tourbillons immobiles par rapport à la paroi. Une valeur inférieure de  $h$  aurait conduit à une vitesse des tourbillons dans le même sens que le fluide et à une instabilité encore plus rapide, comme on peut le constater sur la fig. 1.

Pour déterminer le domaine où la solution ainsi obtenue est exacte, nous avons calculé l'influence de ce mouvement sur le tourbillon le plus influencé, qui est le tourbillon le plus proche en aval

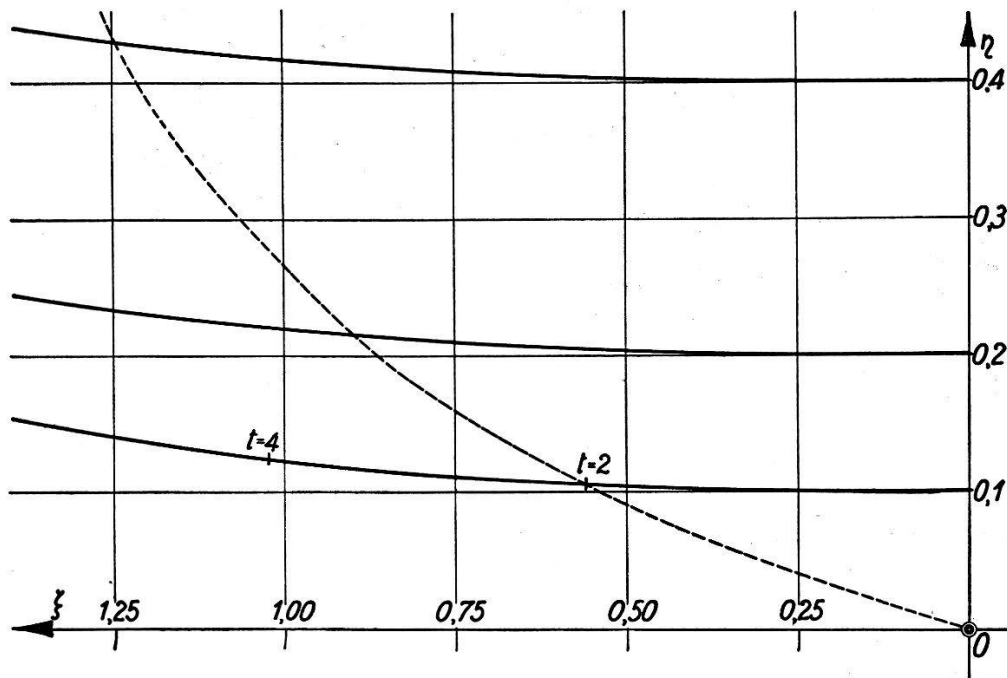


Fig. 2.

*Mouvement du tourbillon déplacé en seconde approximation.*

Les traits pleins représentent les trajectoires du tourbillon que l'on aurait éloigné de la paroi. La valeur choisie pour  $h$  est 0,25. La vitesse des tourbillons est alors presque nulle par rapport à la paroi. Une valeur plus faible de  $h$  conduirait à un mouvement encore plus rapide du tourbillon par rapport à sa position normale et à une vitesse d'ensemble dans le même sens que le fluide, ce qui est réalisé dans la réalité. Il est évidemment possible que notre définition de la vitesse moyenne ne corresponde pas exactement à la vitesse à la paroi par rapport au fluide à l'infini.

dans notre cas. Le résultat est donné dans la fig. 3. La trajectoire est tracée pour un temps égal au temps nécessaire au tourbillon désaxé pour parcourir la trajectoire de la fig. 2. Nous pouvons donc considérer ces trajectoires comme exactes dans les limites tracées.

On constate ainsi que le tourbillon désaxé se déplace avec une vitesse environ moitié de celle du fluide à l'infini. L'instabilité est encore plus rapide qu'en première approximation.

*Discussion qualitative.*

Ayant ainsi obtenu quelques données numériques sur le temps pris par un tourbillon pour s'échapper, il est possible de discuter avec fruits, le problème très complexe de l'influence ultérieure de ce premier désordre. Considérons tout d'abord les deux tourbillons que nous avons déjà suivis, le mouvement va continuer comme il a commencé jusqu'au moment où les deux tourbillons se seront trop rapprochés et qu'ils seront arrivés à la même abscisse (même partie réelle de  $z_0$  et de  $z_{-1}$ ). A partir de cet instant, ils formeront une paire de tourbillons associés, tournant l'un autour de l'autre tout en continuant à descendre la série en raison de l'influence de

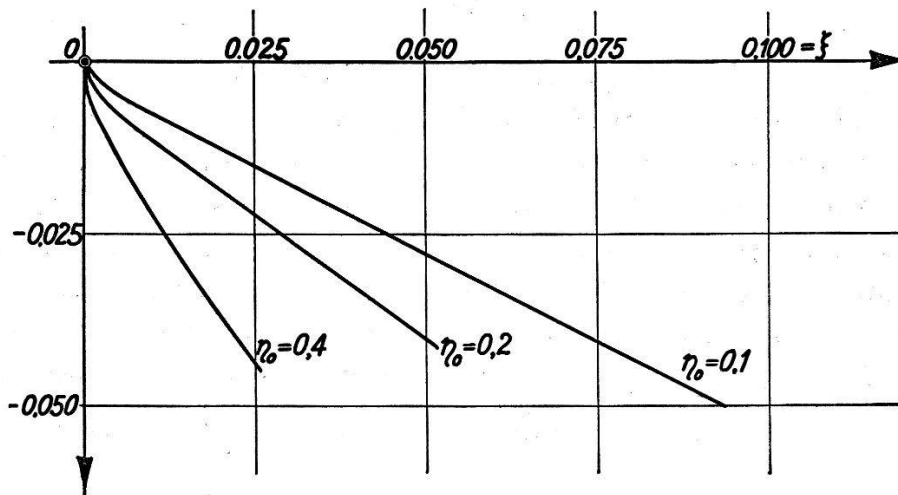


Fig. 3.

*Mouvement du tourbillon d'ordre -1 sous l'influence du déplacement du tourbillon d'ordre 0.*

Les traits pleins représentent la trajectoire résultant du mouvement du tourbillon d'ordre 0 représenté dans la fig. 2. Il est donc manifeste que l'écart entre ce tourbillon d'ordre -1 et sa position normale est restée faible, ce qui justifie les suppositions que nous avons faites pour ce calcul.

tous les autres tourbillons de la série. Ils atteindront donc le tourbillon d'ordre -2 et se l'associeront. La série sera donc complètement désorganisée en aval du tourbillon perturbateur. C'est le résultat obtenu si ce premier tourbillon s'est éloigné de la paroi. Si, par contre, le tourbillon a été comprimé contre la paroi, c'est la partie en amont qui sera désorganisée. Cependant, le groupe des tourbillons associés a une vitesse comparable à celle du fluide. L'influence de ce groupe ne se fera donc pas sentir en amont d'un certain point de la paroi. C'est ainsi que l'on pourrait expliquer pourquoi les séries de tourbillons le long des canaux ne comprennent qu'un nombre fini de tourbillons, nombre en général assez restreint (cf. les études expérimentales sur la turbulence dans les canaux (B)).



Ayant étudié l'influence sur une des deux régions intéressantes, il nous faut maintenant considérer l'autre partie. Le tourbillon d'ordre 1 dans le cas considéré, tendra à se rapprocher de la paroi, car l'influence opposée du tourbillon perturbateur aura disparu. Cette influence sera faible, car elle sera compensée en partie par l'éloignement du tourbillon virtuel d'ordre 0. Une fois rapproché de la paroi, il subira l'influence de toute la série et remontera la série selon le procédé que nous avons décrit à la fin du dernier alinéa. Cette influence se manifestera aussi au début de la formation de la série. Cette raison explique clairement le petit nombre des tourbillons dans de telles séries dans les canaux.

### *Conclusion.*

L'étude de l'instabilité d'une série de tourbillons le long d'une paroi montre que le seul fait qu'un tourbillon se rapproche de la paroi peut empêcher la série de dépasser ce point de la paroi. Il se forme un agglomérat de tourbillons qui donnent lieu à une forte turbulence. Si cet agglomérat se désagrège et se trouve emporté par le courant, le simple fait que la série est interrompue, provoque la répétition du phénomène. Nous confirmons donc l'hypothèse de SCHILLER sur l'origine de la turbulence dans les canaux.

Institut d'Aérodynamique de l'E. P. F. Zurich.

### **Bibliographie.**

#### A — *Stabilité des files de tourbillons.*

- DOLAPTSCHIEV, Zeitschrift für ang. Mathematik und Mechanik, **17**, 313, 1937.  
 DOLAPTSCHIEV, Zeitschrift für ang. Mathematik und Mechanik, **18**, 263, 1938.  
 MAUE, Zeitschrift für ang. Mathematik und Mechanik, **20**, 129, 1940.  
 SCHMIEDEN, Ingenieur-Archiv **7**, 215 et 337, 1936.

#### B — *Expériences sur la naissance de la turbulence.*

- HAHNEMANN, Forsch. auf dem Gebiete des Ingenieurwesens **8**, 226, 1937.  
 KURZWEG, Annalen der Physik **18**, 193, 1933.  
 NAUMANN, Forsch. auf dem Gebiete des Ingenieurwesens **2**, 85, 1931.  
 NAUMANN, Forsch. auf dem Gebiete des Ingenieurwesens **6**, 139, 1935.  
 SCHILLER, Verh. des 3. intern. Kongresses für technische Mechanik I, 226, 1931.  
 SCHILLER, Zeitschrift für ang. Mathematik und Mechanik **14**, 36, 1934.  
 SCHILLER, Proc. of the fifth Congress for applied Mechanics 315, 1938.