

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 17 (1944)  
**Heft:** V

**Artikel:** Zur Theorie der Richtstrahlung mit Parabolspiegeln  
**Autor:** Lüdi, F.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-111511>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 19.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Zur Theorie der Richtstrahlung mit Parabolspiegeln

von F. Lüdi, Brown, Boveri & Cie., Baden.

(29. VI. 1944)

*Inhalt:* Mittels der Kirchhoff'schen Beugungsformel wird die Richtstrahlung für dm- und cm-Wellen durch ein Rotationsparaboloid berechnet und verglichen mit derjenigen anderer Richtantennen, beispielsweise elektromagnetisches Horn und Sägezahnantenne.

*Einleitung:* Beim optischen Scheinwerfer ist für die Divergenz  $\alpha$  des Lichtkegels die Ausdehnung der Lichtquelle  $a$  (Krater) im Verhältnis zur Spiegelbrennweite  $f$  gemäss der bekannten Beziehung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2f}$$

massgebend; die Beugung tritt wegen des kleinen Verhältnisses von Wellenlänge und Spiegelöffnung ganz zurück. Nicht dagegen bei den viel grösseren Mikrowellen der Hochfrequenztechnik, wo dieses Verhältnis für die Divergenz des Strahlkegels ausschlaggebend ist. Es erfolgt hier eine Berechnung auf optischer Grundlage. Der wesentliche Unterschied ist neben der viel grösseren Wellenlänge die Polarisierung der vom Brennpunkt ausgehenden Kugelwelle. Für den Strahlengang ist wie bei den Lichtwellen die geometrische Optik zuständig. Die vom Brennpunkt ausgehende Kugelstrahlung wird am Paraboloid reflektiert und verlässt die Spiegelöffnung als „Parallelstrahlung“. erinnert man sich der geometrischen Eigenschaft der Parabel, dass die Strahllänge vom Brennpunkt zum Paraboloid und zurück auf eine Fläche senkrecht zur Hauptachse z. B. die Deckfläche konstant ist, so bekommt man die wichtigste Eigenschaft, nämlich die Gleichphasigkeit der die Öffnung verlassenden „ebenen“ Welle. Dies muss auch so sein, weil das Paraboloid für den Brennpunkt ein optisch abbildendes System ist. Wir können deshalb die Parabel und den Dipol ersetzen durch eine ebene Welle, welche auf eine kreisrunde Öffnung trifft und an dieser gebeugt wird. Für die Intensitätsverteilung über den Öffnungswinkel ist nun die Amplitudenverteilung der elektromagnetischen Feldstärke auf der beugenden Öffnung massgebend. Weil wir eine polarisierte Dipolstrahlung betrachten, so tritt im Gegensatz zum Licht, wo die strah-

lenden Dipole (die Atome) alle möglichen Richtungen haben, eine charakteristische Verschiedenheit der Erregung in der beugenden Öffnung auf. Sie äussert sich in der unterschiedlichen Horizontalcharakteristik (senkrecht zum Dipol) und Vertikalcharakteristik (in der Ebene Dipol und Spiegelachse) der Strahlung.

Die Anwendung der Kirchhoff'schen Formel läuft darauf hinaus, die Erregung in der Zwischenebene der beugenden Öffnung zu kennen. Durch eine Reihe plausibler Vereinfachungen werden wir uns dabei auf die wesentliche Abhängigkeit der Feldverteilung in der Zwischenebene beschränken und so auf einfache geschlossen integrierbare Ausdrücke kommen. Sie stimmen einerseits mit den Messwerten mit relativ guter Genauigkeit überein und führen andererseits auf einen direkten analytischen Vergleich mit den Formeln für das Horn und die Sägezahnantenne, wodurch der technische Vorzug des einen oder andern Richtgebildes bewertet werden kann. Die Kirchhoff'sche Formel muss als exakte Fassung des Huygens'schen Prinzips nicht nur die relative Intensitätsverteilung über den Beugungswinkel  $\theta$  geben, sondern auch die absolute Intensität, d. h. die Verstärkung gegenüber der ungerichteten Dipolstrahlung, sofern die Erregung der Zwischenebene auf den Kugelstrahler im Brennpunkt bezogen ist. Auch dies ist von technischer Bedeutung, da ja die Richtantennen neben der eigentlichen Richtwirkung auch aus Gründen der Verstärkung der relativ kleinen Mikrowellenenergien benützt werden. Für Horn und Sägezahnantenne ist die Aufstellung einer Beziehung der Feldstärke in der Zwischenebene auf den einzelnen Dipol nicht gut möglich; trotzdem erlaubt die vorliegende Untersuchung, auch die Verstärkung dieser Richtgebilde gerade im Vergleich zum Paraboloid anzugeben. Noch eine Bemerkung analytischer Natur. Die hier geformte Problemstellung, Ersetzen des Spiegels und Dipols durch eine ebene konphase Welle, die an einer Schirmöffnung gebeugt wird, führt bei Anwendung der Kirchhoff'schen Formel auf die Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen (Lichtquelle im Unendlichen), wobei im Exponenten des Kirchhoff'schen Ausdrucks nur lineare Glieder auftreten und wodurch die Integrale besonders einfach auszuwerten sind. Lichtquelle nahe der beugenden Öffnung führt bekanntlich auf Fresnel'sche Beugungsintegrale (quadratische Glieder im Exponenten), vgl. G. Joos, Lehrbuch der theoretischen Physik.

Die folgenden Paragraphen geben die Rechnung der hier skizzierten Methode; § 3 enthält die Zusammenstellung der Resultate und § 4 den Vergleich mit andern Theorien, welche mir während und nach der Untersuchung bekannt wurden.

### § 1. Die Feldverteilung in der Zwischenebene.

Zur Orientierung diene Fig. 1. Aus später ersichtlichen Gründen wählen wir ein Paraboloid, dessen Brennpunkt in der Deckfläche liegt und die als Zwischenebene betrachtet wird. Es gilt dann für die Brennweite

$$f = \frac{1}{2} R .$$

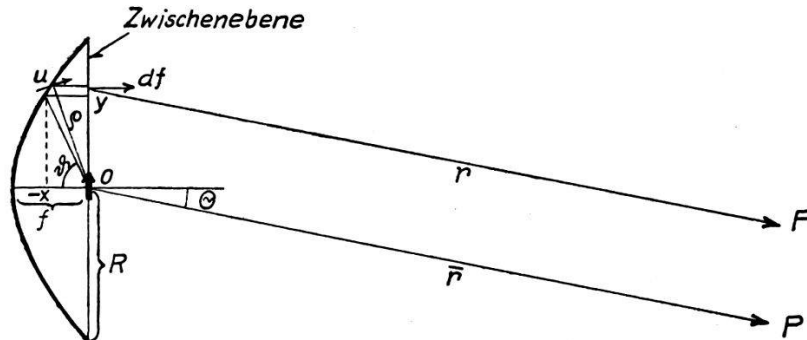


Fig. 1.

Der Ursprung des kartesischen Koordinatensystems  $O$  sei im Brennpunkt, wo sich auch der erregende Dipol befindet. Die  $x$ -Richtung fällt mit der Spiegelachse zusammen und die  $z$ -Richtung ist senkrecht auf der Zeichenebene zu denken. Die Figur ist ein Axialschnitt durch das Paraboloid in der  $x$ - $y$ -Ebene. Ein Aufpunkt  $P$ , der sich in dieser Vertikalebene in grossem Abstand  $r$  vom erregenden Flächenelement  $df$  der Zwischenebene befindet, schliesst mit der Spiegelachse den Winkel  $\Theta$  ein. Der Gangunterschied  $\Delta$  gegenüber dem erregenden Flächenelement in  $O$  beträgt

$$\Delta = y \cdot \sin \Theta$$

Diese Gangunterschiede bestimmen im wesentlichen die Beugung durch die Begrenzung der strahlenden Fläche.

Der Dipol in  $O$  sende eine Kugelwelle aus. Die Brennweite sei genügend gross, dass sich die Spiegelfläche schon in der Fernzone befindet und die Feldstärke beim Auftreffen durch

$$u = \frac{u_0}{\varrho} \cos \vartheta \quad (1)$$

gegeben sei;  $u_0$  gleich Dipolstärke. Die Abhängigkeit der Feldamplitude von der Entfernung vom Mittelpunkt  $O$  auf der Zwischenfläche ist durch zwei Gründe verursacht.

1. Auch bei unpolarisierter Strahlung (Licht) findet eine Schwächung der Amplitude nach der Begrenzung der Zwischenfläche statt durch die Vergrösserung von  $\varrho$  gegen den Rand des Spiegels. Durch die parabolische Reflexion entstehen parallele

Bündel, welche keine weitere Schwächung hervorrufen. Eine einfache Rechnung mit Hilfe der Parabelgleichung ergibt nach der Fig. 1

$$\frac{dy}{d\vartheta} = f \cdot \frac{f+2f(f+x) + (f+x)^2}{f+(f+x)}$$

Die Flächenhelligkeit in der Zwischenebene nimmt also nach dem Rand in dem Mass ab wie  $\frac{dy}{d\vartheta}$  zunimmt und zwar gerade auf die Hälfte von  $x = -f$  bis  $x = 0$ . Dies gilt für alle Flächenelemente in gleichem Abstand  $\sqrt{y^2 + z^2}$  um die  $x$ -Achse. Trotzdem vernachlässigen wir diese Abhängigkeit und ersetzen sie durch eine mittlere Feldstärke entsprechend dem mittleren Abstand  $\bar{\rho} = \frac{3}{4} R$

$$u_1 \approx \frac{4}{3} \frac{u_0}{R}$$

wodurch bereits eine wesentliche Vereinfachung im Kirchhoff'schen Integralausdruck bewirkt wird.

2. Weitaus die wichtigere Abhängigkeit der Feldamplitude entsteht durch die Winkelabhängigkeit  $\vartheta$  bei linear polarisierter Strahlung. In der  $x$ - $z$ -Ebene ( $\vartheta = 0$ ) besteht keine solche; dagegen in der  $x$ - $y$ -Ebene nimmt die Flächenhelligkeit nach dem Rand mit  $\cos \vartheta$  ab und wird Null am Rande selbst. Diese Abhängigkeit werde berücksichtigt, jedoch wieder aus rechnerischen Gründen in bezug auf das Beugungsintegral vereinfacht in der Weise, dass statt dem  $\cos$  des Winkels  $\vartheta$

$$\cos \frac{\pi}{2} \frac{y}{R}$$

genommen werde. Für kleine Winkel  $\vartheta$ , wo die Feldamplitude noch gross ist, nimmt dieser Ausdruck ab wie  $\cos \vartheta$ ; erst für grössere Winkel, wo die Feldbeiträge kleiner werden, tritt eine stärkere Abweichung auf. Diese  $y$ -Abhängigkeit sei für alle  $z$ -Werte dieselbe. Auch das bedeutet eine Annäherung an die Wirklichkeit im Sinne einer Vereinfachung, weil bei seitlicher Ausschwenkung aus der  $x$ - $y$ -Ebene auch eine  $z$ -Komponente auf Kosten der  $y$ -Komponente entsteht und am einfachsten durch Fig. 2 der Aufsicht auf den Spiegel veranschaulicht wird. Der Spiegel werde an 4 symmetrischen Punkten je von einem Strahl getroffen. Weil der elektrische Vektor immer in der Meridianebene durch den Dipol liegt, enthält er vor der Reflexion die  $z$ -Komponenten, welche sich jedoch sowohl in der  $y$ -Richtung wie in der  $z$ -Richtung aufheben. Dies wird aus Symmetriegründen auch nach der Reflexion der Fall sein, so dass

wir in der Zwischenebene nur ein Feld in der  $y$ -Richtung gemäss der erwähnten Verteilung zu betrachten brauchen.

3. Eine letzte Vereinfachung werde dadurch getroffen, dass man die kreisförmige Öffnung durch eine quadratische gleicher Fläche ( $a = \sqrt{\pi} \cdot R$ ) ersetzt; dadurch ist Separation der Integrationsvariablen möglich, wodurch die Integration besonders einfach wird und zugleich auf den Vergleich mit dem Horn führt. Trotzdem die angeführten Vereinfachungen etwas rigoros erscheinen, werden wir doch sehen, dass die errechneten Resultate in brauchbarer Übereinstimmung mit den Messungen sind und vor allem die charakteristischen Merkmale wiedergeben.

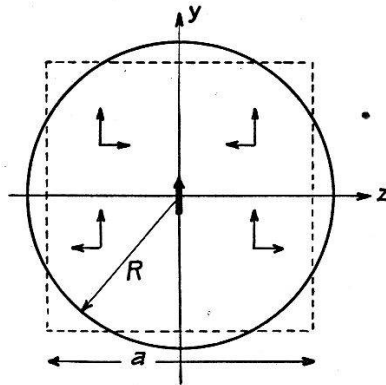


Fig. 2.

Wir setzen also für die Erregung der Zwischenfläche unter Berücksichtigung der Phase:

$$u_1 = \frac{4}{3} \frac{u_0}{R} \cos \pi \frac{y}{a} \cdot e^{-ikr_a} \quad \left( y \text{ von } \frac{-a}{2} \text{ bis } \frac{+a}{2} \right) \quad (2)$$

wo  $k = 2\pi/\lambda$  und  $r_a$  der Weg vom Brennpunkt auf die Deckfläche ist.

## § 2. Berechnung des Feldes im Aufpunkt $P$ .

Der allgemeine Ausdruck der Kirchhoff'schen Formel lautet

$$u_P = \frac{1}{4\pi} \int_F \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \text{grad } u - u \text{ grad } \frac{e^{-ikr}}{r} \right) d\mathbf{f} \quad (3)$$

wo  $u$  eine Vektorgrösse, in unserem Fall der elektrische Feldvektor ist.  $u$  ist die Erregung in der Zwischenfläche, also hier der Deckfläche,  $r$  der Abstand vom erregten Flächenelement  $d\mathbf{f}$  zum Aufpunkt  $P$ ,  $d\mathbf{f}$  das vektorielle Flächenelement mit der Flächennormalen nach aussen von der Strahlungsquelle weg. Zur Berechnung der Verstärkung kommt es auf die Absolutgrösse des Ausdrucks an.

Es ist:

$$\text{grad} \frac{e^{-ikr}}{r} = -\frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} e^{-ikr} + ik e^{-ikr} \right) \mathbf{r}_0 \approx -\frac{ik}{r} e^{-ikr}$$

für grosse Abstände von  $P$  ( $\frac{1}{r} \ll \frac{2\pi}{\lambda}$ );  $\mathbf{r}_0$  ist der Einheitsvektor in Richtung  $P$ . Ferner ist mit (2)

$$\text{grad} u_1 = -u_1 ik \cdot \mathbf{r}_{q_0} = -ik \frac{4}{3} \frac{u_0}{R} \cos \frac{\pi y}{a} \cdot e^{-ikr_a} \cdot \mathbf{r}_{q_0}$$

$\mathbf{r}_{q_0}$  Einheitsvektor in der Strahlrichtung auf die Zwischenfläche, also senkrecht wegen der Spiegelwirkung. Setzt man diese Ausdrücke in den Kirchhoff'schen Integralausdruck ein, so folgt:

$$u_P = \frac{ik}{\pi} \frac{u_0}{3R} e^{-ik2f} \int_F \cos \left( \frac{\pi y}{a} \right) \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} (\cos \Theta + 1) df \quad (4)$$

wenn berücksichtigt wird, dass  $r_a = \text{konst.} = 2f$  ist und für  $(\mathbf{r}_0, d\mathbf{f})$  und  $(\mathbf{r}_{q_0}, d\mathbf{f})$  die  $\cos$  des Strahlvektors mit der Flächennormalen  $\mathbf{n}$  d. h.  $\cos \Theta$  resp.  $-1$  geschrieben werden ( $-1$ , weil die vom Spiegel kommenden Strahlen parallel mit der nach aussen gerichteten Flächennormalen auf die Zwischenebene fallen).

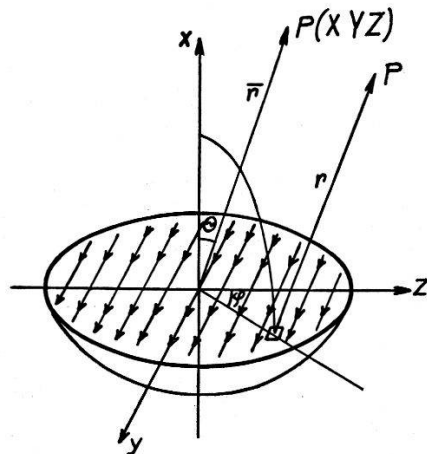


Fig. 3.

Führen wir jetzt Polarkoordinaten ein. Dann sind die Koordinaten des Aufpunktes  $P$ , Fig. 3

$$\begin{aligned} X &= \bar{r} \cos \Theta \\ Y &= \bar{r} \sin \Theta \cdot \sin \varphi \\ Z &= \bar{r} \sin \Theta \cdot \cos \varphi \end{aligned}$$

und der Abstand des Aufpunktes vom Flächenelement mit den Koordinaten  $y, z$

$$r = \sqrt{X^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2},$$

wird bei grossem Abstand  $r$  angenähert,

$$r \approx \bar{r} - \sin \Theta (y \cdot \sin \varphi + z \cos \varphi)$$

Wir setzen dies im Ausdruck (4) ein, wobei  $r$  im Nenner durch  $\bar{r}$  ersetzt werden kann (nicht aber im Exponenten, wo die Phase entscheidend wirkt) und  $(\cos \Theta + 1)$  als langsam veränderlich vor das Integral gesetzt werden darf.

$$u_P = i \frac{2 u_0}{3 R} \frac{e^{-i \frac{2 \pi}{\lambda} (2f + \bar{r})}}{\lambda \bar{r}} \cdot (\cos \Theta + 1) \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-a/2}^{+a/2} \cos \left( \frac{\pi y}{a} \right) \cdot e^{+i \frac{2 \pi}{\lambda} (y \cdot \sin \varphi + z \cos \varphi) \sin \Theta} \cdot dy dz. \quad (5)$$

Hierbei ist noch  $df = dy dz$  und  $k = \frac{2 \pi}{\lambda}$  gesetzt und die Integration erstreckt sich über die Quadratfläche gemäss Fig. 2. Durch diese Vereinfachungen wird nun der Integralausdruck für ein beliebiges Azimut  $\varphi$  in einfacher Weise lösbar.

Wird  $\cos \pi y/a$  durch

$$\frac{e^{i \frac{\pi y}{a}} + e^{-i \frac{\pi y}{a}}}{2}$$

ersetzt, dann bekommt man eine innere und äussere Integration (Separation), wobei für die innere  $z$  konst. und für die äussere  $y$  konstant ist. Die Integrale sind von der Form

$$\int_{-a/2}^{+a/2} e^{i \alpha x} \cdot dx = \frac{[e^{i \alpha x}]_{-a/2}^{+a/2}}{i \alpha} = 2 a/2 \cdot \frac{e^{i \alpha a/2} - e^{-i \alpha a/2}}{2 i \alpha a/2} = a \frac{\sin \alpha a/2}{\alpha \cdot a/2}$$

Das Schlussresultat nach Phase und Amplitude heisst:

$$u_P = i u_0 \frac{2 a^2}{3 R \lambda \bar{r}} e^{-i \left[ \frac{2 \pi}{\lambda} (2f + \bar{r}) + \pi \right]} \cdot \frac{(\cos \Theta + 1)}{2} \frac{\sin \left( \frac{\pi a}{\lambda} \cos \varphi \cdot \sin \Theta \right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \cos \varphi \cdot \sin \Theta} \cdot \left[ \frac{\sin \left( \frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi \cdot \sin \Theta + \frac{\pi}{2} \right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi \cdot \sin \Theta + \frac{\pi}{2}} + \frac{\left( \sin \frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi \cdot \sin \Theta - \frac{\pi}{2} \right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi \sin \Theta - \frac{\pi}{2}} \right] \quad (6)$$

wobei also für  $a = \sqrt{\pi} \cdot R$  in den weiteren Ausrechnungen zu setzen ist. Im Exponenten ist noch der Phasensprung  $\pi$ , der bei der Reflexion auftritt, berücksichtigt.



## § 3. Diskussion der Gleichung (6).

Dieser Ausdruck ergibt nun die Richtdiagramme in absoluter Grösse in bezug auf die Dipolstärke  $u_0$ , enthält also auch die Verstärkung. Er vereinfacht sich sofort bedeutend, wenn man das Strahlungsdiagramm in zwei charakteristischen Ebenen, der Horizontalebene und der Vertikalebene betrachtet vgl. Fig. 3.

a) Horizontalebene  $\varphi = 0$  dann wird die Winkelabhängigkeit des Absolutwertes der Feldstärke mit  $a = \sqrt{\pi} \cdot R$

$$|u_P| = u_0 \frac{8}{3} \frac{R}{\lambda \bar{r}} \frac{\cos \Theta + 1}{2} \frac{\sin \left( \pi^{3/2} \frac{R}{\lambda} \sin \Theta \right)}{\pi^{3/2} \frac{R}{\lambda} \sin \Theta} \quad (7)$$

Das erste Minimum bestimmt sich aus:

$$\pi^{3/2} \frac{R}{\lambda} \sin \Theta = \pi$$

zu

$$\Theta = \arcsin \frac{\lambda}{\sqrt{\pi} \cdot R}$$

b) Vertikalebene  $\varphi = \pi/2$ . Man erhält für  $|u_P|$  aus (6) nach einfacher Umformung:

$$|u_P| = u_0 \frac{2\pi}{3} \frac{R}{\lambda \bar{r}} \frac{\cos \Theta + 1}{2} \frac{-\pi \cos \left( \pi^{3/2} \frac{R}{\lambda} \sin \Theta \right)}{\left( \pi^{3/2} \frac{R}{\lambda} \sin \Theta \right)^2 - \left( \frac{\pi}{2} \right)^2} \quad (8)$$

Die beiden Ausdrücke (7) und (8) werden für  $\Theta = 0$  identisch wie es sein muss. Der Winkel für das erste Minimum folgt aus

$$\pi^{3/2} \frac{R}{\lambda} \sin \Theta = \frac{3}{2} \pi$$

(nicht  $\pi/2$ , weil dafür auch der Nenner 0 wird) zu

$$\Theta = \arcsin \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\sqrt{\pi} \cdot R}$$

Für kleine Winkel ist also der Öffnungswinkel des Hauptkegels in der Vertikalebene 1,5mal grösser als in der Horizontalebene. Dafür sind die Nebenmaxima bedeutend kleiner, vgl. Fig. 4, wo die beiden Richtdiagramme für eine Apertur  $\frac{2R}{\lambda} = 12$  nach Gleichung (7) und (8) aufgetragen sind.  $\frac{\cos \Theta + 1}{2}$  kann für kleine Winkel durch 1 ersetzt werden. Die Verstärkung ist für dieses Beispiel nach Gleichung (9) 16fach für die Feldstärke.

c) Verstärkung in der Spiegelachse ( $\Theta = 0$ ). Aus (6) folgt mit  $a = \sqrt{\pi} \cdot R$

$$|u_P| = \frac{8}{3} \frac{u_0}{\bar{r}} \frac{R}{\lambda}$$

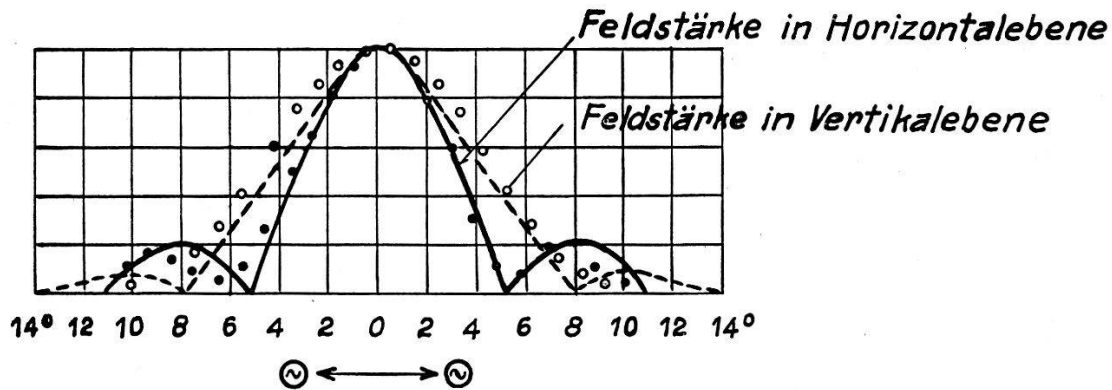


Fig. 4.

◦ Messpunkte nach Staal --- Berechnung nach Gleichung (7) und (8).

für Spiegelöffnung  $\frac{2R}{\lambda} = 12$ .

Vergleichen wir diesen Wert mit der freien Dipolstrahlung senkrecht zum Dipol ( $\vartheta = 0$ ) im Abstand  $\bar{r}$ , Gleichung (1)

$$u = \frac{u_0}{\bar{r}}$$

so folgt für die Verstärkung:

$$V = \frac{|u_P|}{|u|} = \frac{8}{3} \frac{R}{\lambda} = 2,65 \cdot \frac{R}{\lambda} \quad (9)$$

ein äusserst einfacher Ausdruck, der vor allem zeigt, dass diese durch dasselbe Verhältnis  $R/\lambda$  wie der Öffnungswinkel bestimmt ist. Das ist auch einleuchtend, denn die grössere Verstärkung wird durch die stärkere Bündelung erzielt. Weil die durch einen Senderdipol im Abstand  $r$  erzeugte Feldstärke proportional mit der Quadratwurzel der Leistung zunimmt, ist es bemerkenswert, dass ein Spiegel des dreifachen Durchmessers dieselbe Verstärkungssteigerung bewirkt wie ein Sender neunfacher Leistung!

d) Das elektromagnetische Horn. Ein Wellenleiter quadratischen Querschnitts werde mit einer  $H_{01}$ -Welle erregt. Das charakteristische dieses Wellentyps ist das Vorhandensein nur dreier Feldkomponenten, zwei magnetische in der Achsrichtung und eine elektrische senkrecht dazu, z. B. in der  $y$ -Richtung. Die Randbedingun-

gen ergeben eine Amplitudenverteilung der elektrischen Feldstärke in der  $z$ -Richtung gemäss

$$u_0 \cos \frac{\pi z}{b}$$

und zwar ist dies die exakte Abhängigkeit.

Man kann sich nun vorstellen, dass durch einen aufgesetzten Trichter keine Veränderung im stetigen Feldverlauf eintritt (keine weitere Knotenbildung), sondern lediglich eine ähnliche Vergrößerung auf die Trichtermündung erfolgt, wo die Feldverteilung jetzt

$$u_1 \cos \frac{\pi z}{a}$$

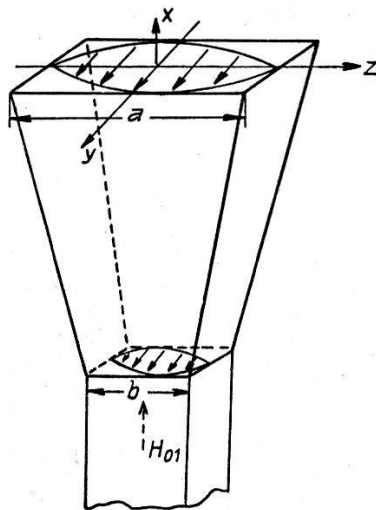


Fig. 5.

ist, die für  $z = \pm a/2$  verschwindet. Die Feldverteilung ist in Fig. 5 wie in Fig. 3 durch die Länge der Pfeile angedeutet. Vergleichen wir jetzt mit dem Spiegel bei den oben gemachten Vereinfachungen, so erkennen wir, dass die Feldverteilung dieselbe ist und damit die Winkelabhängigkeit der Strahlung bei gleicher Strahlungsfläche *dieselbesein* muss (in den Formeln tritt an Stelle von  $\pi^{3/2} R/\lambda$  einfach  $\pi a/\lambda$ ) mit dem einzigen Unterschied, dass *Vertikal- und Horizontalcharakteristik vertauscht sind*, weil hier die  $\cos$ -Abhängigkeit senkrecht zur Dipolrichtung erfolgt.

e) Die Sägezahnantenne. Dieser ebenfalls bekannte Richtstrahler ist ein Drahtgebilde nach Fig. 6, welches in der Mitte durch eine Lecherleitung gespiesen wird. Die Schenkellänge  $\lambda/2$  bewirkt, dass die durch die Pfeilrichtung angedeutete Stromverteilung  $J$  zustande kommt. Da sich die Horizontalkomponenten sowohl in der  $z$ - als auch in der  $y$ -Richtung aufheben, kann der Strahler durch die darunter gezeichnete gleichphasig schwingende „Dipolfläche“ und

\*

bei genügend grosser Schenkelzahl durch eine homogene Feldverteilung ersetzt werden. Als Zwischenebene zur Berechnung der Beugung nach der Kirchhoff'schen Formel kann die Dipolebene selbst genommen werden. Ein zweites Gebilde gleicher Form im Abstand  $\lambda/2$  wirkt als Reflektorantenne, so dass die Fläche nur nach vorn strahlt. Bei konstanter Feldverteilung resultiert für die Winkelabhängigkeit Gleichung (7), wo wieder statt  $\pi^{3/2} \frac{R}{\lambda} \frac{\pi a}{\lambda}$  zu setzen ist. Es sei hier bemerkt, dass dies der bekannte Ausdruck der Optik für die Lichtbeugung an einem Spalt der Breite  $a$  ist, wodurch die volle Analogie mit dieser hervortritt. Durch die Strahlungsdämpfung werden die äusseren Schenkel etwas schwächer als die inneren erregt sein, so dass im äussersten Fall mit einer cos-Verteilung gerechnet werden kann, dann gilt Gleichung (8). Man kann sagen, das Richtdiagramm wird bei gleicher Strahlungsfläche nahezu dasselbe wie für Horn und Spiegel.

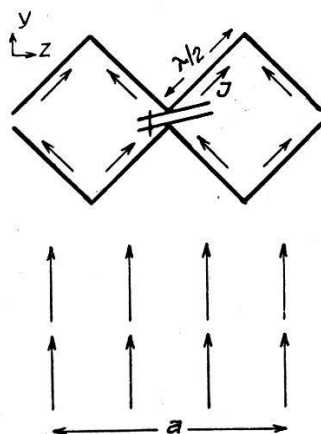


Fig. 6.

Zur direkten Bestimmung der Verstärkung würde beim Horn wie bei der Sägezahnantenne eine Beziehung der Feldamplitude in der „Zwischenebene“ auf den freistehenden Dipol erforderlich sein, die aber in den beiden Fällen nicht leicht anzugeben ist. Jedoch gibt folgende Überlegung eine indirekte Bestimmung der Verstärkung: Weil gezeigt wurde, dass die Strahlungsdiagramme bei gleich gross strahlender Fläche von Spiegel, Horn und Sägezahnantenne nahezu gleich sind, so muss bei gleicher Senderleistung bei angepasster Antenne die Verstärkung gleich sein wie beim Spiegel, also

$$V = \frac{8}{3} \frac{a}{\sqrt{\pi \lambda}}$$

denn die zugeführte Generatorleistung kommt ja bis auf die vernachlässigbaren Leitungsverluste als Strahlungsleistung zum Vor-

schein, welche mittels des Poynting'schen Vektors ( $\approx |u_P|^2$ ) als Flächenintegration über das Strahlungsdiagramm erhalten wird. Jedoch mit einem Unterschied: dass die Verstärkung der beiden letzteren Richtstrahler noch um etwa einen Faktor  $\sqrt{2}$  besser ist als die des Spiegels gleicher Richtfläche. Dies aus dem Grunde, weil bei diesem nach Fig. 1 nur die hintere Halbkugel der Dipolstrahlung ohne zusätzliche Verwendung eines Reflektordipols oder -spiegels gerichtet wird. Man kann also bei kurzen Wellen für die Richtwirkung mit ebenso gutem Vorteil die einfacheren Drahtgebilde an Stelle der teuren und umständlichen Parabolspiegel benützen.

#### § 4. Vergleich mit anderen Theorien.

Die Theorie von DARBORD behandelt bereits die Verstärkung des Parabolspiegels in exakter Weise<sup>1)</sup>. STAAL<sup>2)</sup> berechnete dann auf Grund der Darbord'schen Theorie das Strahlungsdiagramm und führte auch Messungen zum Vergleich mit der Theorie aus. METSCHL<sup>3)</sup> gibt in seinem Referat einen guten Überblick über die Methoden der Berechnung.

Weil DARBORD nicht die Kirchhoff'sche Formel benützt, muss er auf einem Umweg, um im Hinblick auf die Verstärkung die charakteristische  $\frac{1}{r\lambda}$  Abhängigkeit nach Gleichung (6) zu bekommen, die Beugung (Diffraktion) der einzelnen Spiegelemente mittels Energiesatz und Poynting'scher Strahlung berechnen.

Die exakte Verstärkungsformel, welche auch noch die Abhängigkeit von der Brennweite  $p = 2f$  enthält, lautet

$$V = \frac{2\pi p}{\lambda} \left\{ \ln \left( \frac{R^2}{p^2} + 1 \right) - \frac{R^4}{(p^2 + R^2)^2} \right\}$$

Für  $p = R$  (unser Beispiel der Fig. 1) wird daraus

$$V = 2,85 \frac{R}{\lambda}$$

Der Faktor 2,65 in Gleichung (9) weicht um weniger als 10% hiervon ab. Der Einfluss der Brennweite ist hauptsächlich darauf zurückzuführen, dass mehr oder weniger als die Halbkugel der Dipolstrahlung gerichtet wird. Um mit der Spiegelfläche möglichst in die Wellenzone des Dipols zu gelangen, wird man eine grössere Brennweite wählen, jedoch mit Rücksicht auf die damit abnehmende Verstärkung nicht zu gross, so dass die Bauart  $f = R/2$  nach Fig. 1 für übersichtliche Verhältnisse ein annehmbarer Kompromiss ist. Eine kritische Abhängigkeit von der Brennweite wegen

Phasenauslöschung mit der ungerichteten Vorwärtsstrahlung wird erst für sehr kleine Spiegelöffnungen im Verhältnis zur Wellenlänge zu erwarten sein; denn der Winkel, unter dem ein Objekt vom Dipol aus erscheint, ist für grosse Distanzen sehr klein im Vergleich zum Gesamtwinkel der gerichteten Strahlung.

Zur Bestimmung der Winkelabhängigkeit berechnet STAAL die Feldverteilung in der Brennebene und damit nach dem Huyghens'schen Prinzip die Superposition in  $P$  für die Vertikal- und Horizontalebene. OLLENDORFF hat schon früher<sup>4)</sup> bei der Berechnung der Fernwirkungskennlinie einer Zylinderparabel aus Stäben diese durch die Deckfläche konstanter Dipolstärke (ohne nähere Begründung) ersetzt. Nach unserer Darlegung ist ersichtlich, dass die Zylinderparabel viel ungünstiger als Paraboloid, Horn oder Sägezahnantenne ist, weil die Phasengleichheit nur in der Äquatorebene erfüllt ist.

Für das Horn wurde bereits von BARROW und LEWIS<sup>1)</sup> die Winkelabhängigkeit nach Gleichung (8) in analoger Weise ausgerechnet und in guter Übereinstimmung mit den Messungen befunden. Nach der vorliegenden Betrachtung liegt jedoch die Ursache der kleineren Nebenmaxima gegenüber dem Spiegel nicht in der focusfreien Führung des Wellenfeldes, sondern in der verschiedenen Feldverteilung in der Zwischenebene. Eine solche ist ja beim Spiegel auch in der Horizontalebene durch geeignete Mittel, wie z. B. durch ein schwächeres Reflexionsvermögen nach dem Rand ebenfalls zu erreichen.

Für die Sägezahnantenne sind ebenfalls schon spezielle Formeln aufgestellt worden<sup>6)</sup>, welche für grosse Öffnungen die gleiche Winkelabhängigkeit wie hier ergeben.

Die Fig. 4 ist im selben Masstab wie im Referat von METSCHL aufgetragen und die eingezeichneten Messpunkte zeigen, dass die Winkelabhängigkeit in der Horizontalebene mit hinreichender Genauigkeit wiedergegeben wird. Die Abweichung in der Vertikalebene ist auf die starke Vereinfachung der  $\cos$ -Abhängigkeit nach § 1 zurückzuführen; sie gibt aber die im Referat METSCHL betonte Niedrigkeit der gemessenen Nebenmaxima gut wieder.

Wenn auch nicht die volle Exaktheit mit unserer vereinfachten Theorie wiedergegeben wird (die durch bessere Berücksichtigung der Feldverteilung in der Zwischenebene beliebig weit getrieben werden könnte), so hat sie doch den Vorteil der Einheitlichkeit und Übersichtlichkeit im Hinblick auf eine vergleichende Beurteilung der verschiedenen Richtstrahler. Sie zeigt vor allem auch, dass für nicht zu kleine Aperturen die Grösse des  $\lambda/2$ -Dipols und dessen Stromverteilung für das Richtdiagramm ganz zu vernachlässigen ist.

**Nachtrag.**

Für konstante Feldverteilung in der Zwischenebene lässt sich das Doppelintegral in Gleichung (5) auch für kreisrunde Spiegelöffnung relativ einfach ausrechnen. Es wird statt (5) für die  $x$ -,  $z$ -Ebene ( $\varphi = 0$ ), Fig. 3

$$\int_{z=-R}^{+R} \int_{y=-\sqrt{R^2-z^2}}^{+\sqrt{R^2-z^2}} \cdot e^{i \frac{2\pi}{\lambda} z \cdot \sin \Theta} \cdot dy dz \quad (10)$$

Die Integration von  $-\sqrt{R^2-z^2}$  bis  $+\sqrt{R^2-z^2}$  bedeutet zuerst Summation über alle gleichphasig mitwirkenden Felder in der  $y$ -Richtung und dann erst Phasenaddition in der  $z$ -Richtung. Für die Vertikalebene ( $xy$ )  $\varphi = \pi/2$  sieht das Doppelintegral gleich aus bei Vertauschung der Integrationsvariablen und man muss also dieselbe Richtungsabhängigkeit bekommen. Die Ausrechnung führt auf Besselfunktionen erster Ordnung

$$u_P \approx 2 R^2 \pi \frac{J_1 \left( 2 \frac{R\pi}{\lambda} \sin \Theta \right)}{\frac{2\pi R}{\lambda} \sin \Theta} \quad 1. \text{ Nullstelle: } \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \Theta = 3,83$$

welcher Ausdruck mit demjenigen für die Beugung an einem Loch in der Optik identisch ist. Für das Beispiel der Fig. 4 ist das Minimum nur 25' weiter aussen. Der Öffnungswinkel ist rund 1,2mal grösser als für einen Spalt *gleicher* Breite wie der Lochdurchmesser. Für die Verstärkung bekommt man anstatt Gleichung (9)

$$V = \frac{4}{3} \pi \frac{R}{\lambda} = 4,2 \frac{R}{\lambda}$$

also eine viel grössere Abweichung gegenüber dem exakteren Wert 2,85  $R/\lambda$  als nach (9) unter Berücksichtigung der angenäherten Feldverteilung in der Öffnung.

Wird die Feldverteilung nach § 1 berücksichtigt, so ist das auszuwertende Integral für die kreisrunde Öffnung von der Form:

$$\int_{z=-R}^{+R} \int_{y=-\sqrt{R^2-z^2}}^{+\sqrt{R^2-z^2}} \cos \left( \frac{\pi y}{2 R} \right) \cdot e^{A y + B z} dy dz \quad (11)$$

Seine Ausrechnung ist bedeutend komplizierter als (10) und konnte

nur mit Hilfe der Laplace-Transformation gefunden werden. Der allgemeine Ausdruck für ein beliebiges Azimut  $\varphi$  wird

$$R \pi \left\{ \frac{J_1 (R \sqrt{\alpha^2 - B^2})}{\sqrt{\alpha^2 - B^2}} + \frac{J_1 (R \sqrt{\beta^2 - B^2})}{\sqrt{\beta^2 - B^2}} \right\} \quad (12)$$

worin

$$\alpha = iA + \frac{\pi}{2R}, \quad \beta = iA - \frac{\pi}{2R} \text{ ist.}$$

Für die Wurzeln gilt mit

$$A = 2 \frac{i\pi}{\lambda} \sin \varphi \cdot \sin \Theta \quad B = 2 \frac{i\pi}{\lambda} \cos \varphi \cdot \sin \Theta$$

$$\sqrt{\alpha^2 - B^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\left( \sin \varphi \sin \Theta - \frac{\lambda}{4R} \right)^2 + \cos^2 \varphi \sin^2 \Theta}$$

$$\sqrt{\beta^2 - B^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\left( \sin \varphi \sin \Theta + \frac{\lambda}{4R} \right)^2 + \cos^2 \varphi \sin^2 \Theta}$$

Die Verstärkung wird  $V = 16/3 R/\lambda J_1(\pi/2) = 3,02 R/\lambda$ , also etwas grösser als nach Gleichung (9), während der ursprüngliche Wert von DARBORD  $\pi R/\lambda$  ist.

Der Vergleich von (12) mit der entsprechenden Gleichung (6) für quadratische Öffnung und also mit Horn und Sägezahnantenne ist nicht so übersichtlich und bleibe dem Leser überlassen. Die wenig grössere Genauigkeit wird nur mit unverhältnismässigem Aufwand erzielt. Herrn A. KÄCH, der die Ausrechnung der beiden Integrale durchgeführt hat, danke ich auch an dieser Stelle bestens für seine Bereitwilligkeit und gehabte Mühe.

#### Literaturangabe.

<sup>1)</sup> R. DARBORD, L'Onde Electrique **11** (1932), S. 54 und A. CLAVIER, L'Onde Electrique **13** (1934), S. 101.

<sup>2)</sup> C. I. H. A. STAAL, Philips Transmitting News **3** (1937), S. 14.

<sup>3)</sup> E. C. METSCHL, HF-Tech. & El. Ak. **50** (1937), S. 206.

<sup>4)</sup> F. OLLENDORFF, Die Grundlagen der HF-Technik 1926.

<sup>5)</sup> W. L. BARROW & F. D. LEWIS, Proc. of the I.R.E. (1939), S. 41. (Siehe auch W. L. BARROW und F. M. GREENE, Proc. the I.R.E. **26** (1938), S. 1498.

<sup>6)</sup> M. H. CHIREX, L'Onde Electrique **5** (1926), S. 237; L'Onde Electrique **7** (1928), S. 168.