

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 18 (1945)  
**Heft:** I

**Artikel:** La charge gravifique et le spin de l'électron classique  
**Autor:** Stueckelberg, E.C.G.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-111597>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# La charge gravifique et le spin de l'électron classique

par E. C. G. Stueckelberg.

(7. XI. 1944.)

## § 1. Introduction.

Nous avons établi, en I et II, une théorie de l'électron en nous basant sur une *électrodynamique linéaire*. Dans le présent article, nous envisageons le problème plus général, où les équations du champ peuvent être *non-linéaires*. Il nous sera alors possible de faire intervenir la théorie de gravitation d'EINSTEIN qui, elle aussi, amène à des *équations gravifiques non-linéaires*.

Les deux résultats sont les suivants:

1° La *charge gravifique* de tout système est la même que sa *masse inerte*. Ce théorème fondamental, à ma connaissance, n'a jamais été démontré. Tout récemment, SCHROEDINGER (1944) a établi cette équivalence pour un arrangement spécial des tensions intérieures dans un électron soumis à l'électrodynamique de BORN-INFELD (1934).

2° L'équation fonctionnelle pour la ligne d'univers de l'électron  $x = z(\lambda)$  permet, pour certaines théories non linéaires, de forme extrêmement singulière, des solutions périodiques en l'absence d'un champ incident. La théorie la plus simple donne pour la ligne d'univers:

$$x = y(\lambda) = q + p m^{-1} \lambda + \Re e (-i \omega_0)^{-1} a^{(s)} \exp(-i \omega_0 \lambda) \quad (1,1)$$

avec

$$\begin{aligned} \sqrt{2h} a^{\alpha(s)} &= p^{\alpha(s)} - i q^{\alpha(s)}; & (p^{(s)}, p^{(s)}) &= (q^{(s)}, q^{(s)}) = h (a^{(s)*}, a^{(s)}) \\ (p, a^{(s)}) &= (p^{(s)}, q^{(s)}) = 0; & (p, p) &= -m^2 \\ (\dot{y}, \dot{y}) &= (a^{(s)*}, a^{(s)}) - 1 \equiv (\gamma, \gamma) & & (1,1a)^* \end{aligned}$$

Dans le système de repos ( $\vec{p} = 0, p^4 = m$ ), l'électron décrit un cercle de rayon  $\lambda_c = \omega_0^{-1} (a^{(s)*}, a^{(s)})$  avec la vitesse  $c_c = (a^{(s)*}, a^{(s)})^{\frac{1}{2}}$ , autour de la droite d'univers

$$x = Y(\lambda) = q + p m^{-1} \lambda \quad (1,2)$$

Nous sommes ainsi amenés à voir dans le spin des particules élémentaires une propriété essentiellement classique.

\*)  $h$  et  $m$  sont, pour l'instant, des constantes quelconques.

On peut se demander comment il est possible qu'une théorie classique permette un mouvement accéléré d'une charge, sans rayonnement. La réponse est la suivante: Cela provient de ce que la charge libre, due à la polarisation du vide (électrique, gravifique et champs de soustraction en I et II), reste immobile. Cette polarisation résulte du fait que les équations du champ sont non-linéaires. Les effets de dispersion et de polarisation se sont combinés pour entourer le point chargé  $e^{(s)}$  d'une couche sphérique de charge négative  $e'$  ( $\lim e' = -e^{(s)}$ ) et pour distribuer la charge opposée  $e'' = -e'$  ( $\lim e'' = e^{(s)}$ ) uniformément sur un tube annulaire de rayon  $\lambda_c$ .

Dans l'intérieur de ce tube, la singularité (chargée maintenant avec la charge libre  $\lim (e^{(s)} + e') = 0$ ) tourne avec la vitesse  $c_c$  sans rayonner. La charge  $e''$  ne reste pas au repos, elle tourne sur le tube. Ainsi, elle produit un courant stationnaire ( $= e'' \omega''$ ) en plus de la charge statique  $e'' = e^{(s)}$ . Tandis que  $e''$  doit être rigoureusement égal à  $e^{(s)}$  pour que le rayonnement disparaisse,  $\omega''$  ne doit pas nécessairement coïncider avec  $\omega_0$ . La conséquence de cette rotation est un moment magnétique arbitraire, lié à la particule, comme c'est le cas en théorie des quanta (PAULI (1933), p. 233).

Aux §§ 9 et 10, nous avons réussi à développer un formalisme canonique pour traiter le mouvement de notre électron ponctuel. Les équations du mouvement de NEWTON ( $m\dot{z} = \pi$ ;  $\dot{\pi} = f^{(\text{inc})}$ ) étant remplacées par des équations fonctionnelles  $-f^{(\text{self})}[z(\lambda)] = f^{(\text{def})}$ , le formalisme des transformations canoniques infinitésimales

$$F(t+dt) = F(t) + \{H(t), F(t)\} dt = F(t) + \dot{F}(t) dt \quad (1,3)$$

et son intégration sur un intervalle temporel  $2T$

$$F(+T) = \left( \frac{1}{0!} F + \frac{2T}{1!} \{H, F\} + \frac{(2T)^2}{2!} \{H, \{H, F\}\} + \dots \right) (-T) \quad (1,4)$$

n'est plus possible. Par contre, une transformation canonique finie

$$F(+T) = \left( \frac{1}{0!} F + \frac{\hbar}{1!} \{\alpha, F\} + \frac{\hbar^2}{2!} \{\alpha, \{\alpha, F\}\} + \dots \right) (-T) \quad (1,5)$$

peut être employée, dont le résultat est, dans la limite  $T \rightarrow \infty$ , équivalent à la solution asymptotique de l'équation fonctionnelle.

Dans une communication suivante\*), nous démontrons que ce formalisme peut être traduit intégralement en théorie des quanta. La matrice  $S$ , introduite par HEISENBERG (1944) et par l'auteur (1944), est reliée au  $\alpha$  de (1,5) par  $S = e^{-i\alpha}$ .

\*) (1945) mécanique fonctionnelle et asymptotique (ref: IV).

En analogie parfaite avec l'Hamiltonienne  $H$  en (1,3), nous démontrons en IV, que l'opérateur  $\alpha$  en (1,5) déterminera les collisions entre particules (spectre continu de  $\alpha$ ) et les états stationnaires des systèmes composés de particules élémentaires (spectre discret de  $\alpha$ ).

## § 2. Les équations du champ.

Par le mot « champ », nous comprenons l'ensemble de tous les champs existants (électrodynamique, gravitation\*), champ de matière pondérable (= champ de DIRAC, de PROCA, etc.). Nous distinguons entre *potentiel*  $u$ , *intensité*  $U$ , (densité de) *courant*  $v$  et (densité d') *induction*  $V$ . Leurs composantes sont dénombrées par  $u_\alpha, U_A, \Delta V^A$  et  $\Delta v^\alpha$  (dans l'électrodynamique, elles sont  $\varphi_\alpha, B_{\alpha\beta}, 1 H^{\alpha\beta}$  et  $1 J^\alpha$ ).

Nous introduisons deux métriques,  $g^{\alpha\beta}$  et  $\dot{g}^{\alpha\beta}$ ; elles sont reliées par :

$$g^{\alpha\beta} = \dot{g}^{\alpha\beta} + u^{\alpha\beta} \quad (2,1)$$

Pour faciliter l'écriture, nous remplacerons les indices  $\alpha\beta$  par un seul indice  $a$  écrit en bas. Ces  $u_a$  seront appelées les composantes du *potentiel gravifique*.  $g$  est appelé „champ  $g$ “.  $\dot{g}$  est solution de l'équation homogène (2,3b) :

$$W_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}^{(-1)} (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - 2 \kappa_{(g)}) \quad (2,3a)$$

$$\dot{W}_{\alpha\beta} = 0 \quad (2,3b)$$

$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\gamma\beta}{}^\gamma$  est le tenseur de RIEMANN-CHRISTOFFEL.  $\dot{W}, \dot{R}$ , etc. sont des expressions formées en termes de  $\dot{g}$  et de ses dérivées  $\partial_\alpha \dot{g}$ , etc. Nous relierons  $\partial \dot{g}$  aux  $\dot{G}_A = \dot{G}_{\alpha\beta}{}^\gamma$  (coefficients affines) par

$$\dot{G}_{\alpha\beta}{}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\nu'} (\partial_\alpha g_{\beta\nu'} + \partial_\beta g_{\nu'\alpha} - \partial_{\nu'} g_{\alpha\beta}) \quad (2,4)$$

On peut introduire un tenseur  $\gamma^e{}_A{}^a$  (= quatre matrices rectangulaires  $A, a$ ) et son inverse  $\gamma^{(-1)A}{}_{ea}$  pour donner à (2,4) une forme plus maniable :

$$\gamma^e{}_A{}^a \partial_e g_a - G_A \equiv (\gamma, \partial g)_A - G_A = 0 \quad (2,5)$$

Son inverse est :

$$\partial_e g_a - \gamma^{(-1)A}{}_{ea} G_A = 0 \quad (2,6)$$

avec

$$\gamma^{(-1)A}{}_{ea} = \gamma^{(-1)e}{}_{\alpha\beta} (\alpha\beta) (\alpha'\beta'){}_{\gamma'} = \delta_e^{\alpha'} (g^{\alpha\beta'} \delta_{\gamma'}^\beta + g^{\beta\beta'} \delta_{\gamma'}^\alpha) \quad (2,6a)$$

Conformément aux deux métriques, nous devons distinguer entre

\*) Dans les éq. (2,14) et (2,20) la gravitation n'est pas comprise. Le terme *champ matériel* comprend alors tout champ à l'exception du *champ gravifique*  $u_{\alpha\beta}$  ou  $g_{\alpha\beta}$ .

deux dérivées tensorielles d'un tenseur  $u_a$  quelconque et de son contragrédient  $v^a$ . La dérivée covariante est définie en métrique  $g$  par

$$\begin{aligned} u_{e|a} &= \partial_e u_a - \Gamma_{ea}^{a'} u_{a'} \\ v_{e|}^a &= \partial_e v^a + v^{a'} \Gamma_{ea'}^a \end{aligned} \quad (2,7)$$

La dérivée métrique ( $\mathring{g}$ ) est donnée par

$$u_{e;a} = \partial_e u_a - \mathring{\Gamma}_{ea}^{a'} u_{a'} \quad (2,08)$$

Les  $\Gamma$  resp.  $\mathring{\Gamma}$  sont reliés à leur tour aux  $G$  (exp.  $\mathring{G}$ ) par

$$\Gamma_{ea}^b = G_{e\mu}{}^\nu \sigma_{\nu a}^b \quad (2,9)$$

Les matrices quadratiques  $\sigma_{\mu}{}^\nu$  resp.  $\mathring{\sigma}_{\mu}{}^\nu$  sont définies par la transformation infinitésimale

$$\begin{aligned} \bar{v}^a(x) &= v^a(x) + v^{a'} \sigma_{\nu a'}^{\mu} \delta \psi_{\mu}{}^\nu \\ \bar{u}_a(x) &= u_a(x) - \delta \psi_{\mu}{}^\nu \sigma_{\nu a}^{\mu} u_{a'} \end{aligned} \quad (2,10)$$

correspondant à la substitution linéaire et infinitésimale

$$\bar{x}^\alpha = x^\alpha + \delta x^\alpha = x^\alpha + \delta \tau^\alpha + x^{\alpha'} \delta \psi_{\alpha'}{}^\alpha \quad (2,11)$$

Conformément à nos deux métriques, nous avons aussi deux formes pour les équations du champ.

En métrique  $g$ , ils dérivent du principe de variation

$$\delta J = 0; \quad J = J^{(g)} + J^{(m)}; \quad J^{(\cdot)} = \int (dx)^4 \Delta L^{(\cdot)}; \quad \Delta = || -g^{\mu\nu} ||^{-\frac{1}{2}} \quad (2,12)$$

$\Delta L^{(m)}$  dépend des  $U_A$  et des  $u_a$  du champ matériel et des  $g_a$ .  $\Delta L^{(g)}$  ne dépend que des  $g_a$  et  $G_A$  du champ  $g$ . La seule forme qui rend  $J^{(g)}$  invariant est ( $\kappa_{(g)}^{-1} \sim$  rayon de courbure de l'univers):

$$L^{(g)} = g^{\mu\nu} (G_{\mu\sigma}{}^\tau G_{\nu\tau}{}^\sigma - G_{\mu\nu}{}^\sigma G_{\sigma\tau}{}^\tau) + \kappa_{(g)}^2 \quad (2,13)$$

Les intensités du champ matériel sont reliées au potentiel par un tenseur  $\gamma^e{}_A{}^a$  (différent de (2,5)):

$$\gamma^e{}_A{}^a u_{e|a} - U_A = 0 \quad (2,14)$$

(Pour le champ électromagnétique ( $u = \varphi$ ,  $U = B$ ):  $\gamma^e{}_A{}^{a'} = \gamma^e_{(\alpha\beta)}{}^{\alpha'} = \delta_\alpha^e \delta_\beta^{\alpha'} - \delta_\alpha^{\alpha'} \delta_\beta^e$ . Pour le champ de DIRAC: les  $\gamma^e{}_A{}^{a'}$  sont quadratiques ( $\gamma^e \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^e$ ) $_{a'}{}^{a'} = 2 g^{\lambda e} \delta_a{}^{a'}$ ). Nous définissons par

$$\Delta \Theta^a = \Delta \Theta_{\mu\nu} = \frac{\partial \Delta L^{(m)}}{\partial g_a} - \partial_e \frac{\partial \Delta L^{(m)}}{\partial (\partial_e g_a)} \quad (2,15)$$

(En (2,15) la dérivée est à prendre aussi par rapport aux  $g_a$  et aux  $\partial_e g_a$  contenus en  $\gamma$  et  $\Gamma$  de (2,14) et (2,7)) la densité de courant  $g$  vraie de la matière. En plus,

$$\Delta F^A = \frac{\partial \Delta L^{(g)}}{\partial g_A}; \quad \Delta f^a = \frac{\partial \Delta L^{(g)}}{\partial g_a} \quad (2,16)$$

sont respectivement l'*induction* et le *courant*  $g$  (vrai) du *champ*  $g$ . On obtient, par (2,12), l'équation de gravitation dans la forme

$$\partial_e(\Delta F \gamma^e)^a = \Delta(f^a + \Theta^a) \quad (2,17)$$

avec les  $\gamma^e$  de (2,5) et de (2,6a). Dans sa forme habituelle, en termes de (2,3a), elle est:

$$W_{\alpha\beta} = -\Theta_{\alpha\beta} \quad (2,18)$$

En termes de l'*induction*  $V^A$  et de la *densité du courant*  $v^a$

$$\Delta V^A = \frac{\partial \Delta L^{(m)}}{\partial U_A}; \quad \Delta v^a = \frac{\partial \Delta L^{(m)}}{\partial u_a} \quad (2,19)$$

les équations du *champ matériel*  $u$  sont

$$(V_e | \gamma^e)^a - v^a = 0 \quad (2,20)$$

ou

$$\partial_e(\Delta V \gamma^e)^a = \Delta v^a$$

Nous allons maintenant établir les équations *en métrique*  $\dot{g}$ . Nous définissons d'abord par

$$G_A = \dot{G}_A + U_A \quad (2,21)$$

les composantes d'un tenseur  $U_{\alpha\beta}{}^\gamma$ . Il représente l'*intensité gravifique*. (2,6), (2,6a) et (2,1) montrent qu'entre  $U_A$  et  $u_a$ , il y a une relation covariante. Son inverse est

$$\boxed{(\dot{\gamma}^e u_e;)_A - U_A = \Omega_A} \quad (2,22)$$

avec  $\Omega_A = (2,24)$ . De la Langrangienne  $\Delta L^{(g)}$ , nous formons un

$$\dot{\Delta} L^{(g)}(U, u) = \Delta L^{(g)} - \dot{\Delta} \dot{L}^{(g)}$$

fonction du *potentiel*  $u$  et de l'*intensité*  $U$  *gravifique*. Ensuite, les équations qui dérivent d'un principe semblable à (2,12) avec

$$\boxed{J = \int (dx)^4 \dot{\Delta} L; \quad \dot{\Delta} L = \dot{\Delta} L^{(g)} + \Delta L^{(m)}} \quad (2,23)$$

sont équivalentes à celles de la métrique  $g$ , si l'on varie les  $u_a$  (y compris maintenant les composantes  $u^{\alpha\beta}$ ) et les  $U_A$  (y compris les  $U_{\alpha\beta}{}^\gamma$ ) reliés entre eux par (2,22) avec

$$\boxed{\Omega_A(u, U) = (\gamma^e \Gamma_e u - \dot{\gamma}^e \dot{\Gamma}_e u)_A} \quad (2,24)$$

en gardant  $\dot{g}$  constant.  $\Omega_A$  est différent de zéro pour des champs  $u_a$  si  $g$  et  $\Gamma$  figurent en  $(\gamma^e u_e)_A$ . ( $\Omega_A = 0$  pour le champ électro-

magnétique). Les équations du champ sont: (2,20) pour le champ matériel et une équation de la forme (2,20), avec  $V_e;^A$  à la place de  $V_e|_A$  et  $\dot{v}^a = \partial L / \partial u^a$ , pour toutes les composantes matérielles et gravifiques. Nous préférons séparer  $L$  en (2,23) en termes bilinéaires  $L^{(0)}$  et en termes de plus haut ordre  $L^{(\text{int})}$

$$L = L^{(0)} + L^{(\text{int})}; \quad L^{(0)} = \frac{1}{2}(U^A \dot{\xi}^{AB} U^B + \kappa^2 u_a \dot{\xi}^{ab} u_b) \quad (2,25)$$

définissant  $U_A$  par (2,22) avec  $\Omega_A = 0$ .

$\dot{\xi}$  est un tenseur symétrique, fonction de  $\dot{g}$ .  $\kappa^{-1}$  est une longueur. Pour le champ électromagnétique et le champ gravifique, on peut poser  $\kappa^2 \rightarrow 0$  pour tout problème dans lequel la courbure de l'univers n'intervient pas. On peut donner à (2,20) une forme analogue à (2,22)

$$\boxed{(U_e; \dot{\xi} \dot{\gamma}^e)^a - \kappa^2 (u \dot{\xi})^a = \varrho^a} \quad (2,26)$$

$\varrho^a$  est la densité du courant libre

$$\boxed{\varrho^a(u, U) = \frac{\partial L^{(\text{int})}}{\partial u_a} - \partial_e \frac{\partial L^{(\text{int})}}{\partial (\partial_e u_a)}} \quad (2,26a)$$

L'avantage de la métrique  $\dot{g}$  est d'avoir ramené les équations de la gravitation et de la matière à la même forme tensorielle (2,22) et (2,26): Au premier membre figurent des expressions linéaires en  $u$  et  $U$ . Le second membre contient, sous forme de « densités de courant libre  $\varrho$  » et de « densités de moment libre  $\Omega$  », l'influence exercée par la non-linéarité.

Remarquons que la partie gravifique de  $\partial_e (U \dot{\xi} \dot{\gamma}^e)_{\alpha\beta}$  en (2,26) vaut (par comparaison avec (2,3a) et (2,18)) pour  $I^{\dot{g}}$  et  $\kappa_{(g)} \sim 0$

$$\begin{aligned} \partial_e (U \dot{\xi} \dot{\gamma}^e) &= 2(\partial_\alpha \partial_\beta u_\lambda^\lambda + \square u_{\alpha\beta} - \partial_\beta \partial_\lambda u_\alpha^\lambda - \partial_\alpha \partial_\lambda u_\beta^\lambda \\ &\quad - \dot{g}_{\alpha\beta} (\square u_\lambda^\lambda - \partial_\mu \partial_\nu u^{\mu\nu})) \end{aligned} \quad (2,27)$$

où nous avons posé  $u_\alpha^\lambda = \dot{g}^{(-1)}_{\alpha\beta} u^{\lambda\beta}$ ,  $\square = \dot{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ , etc. La divergence

$$\partial_e \partial_\alpha (U \dot{\xi} \dot{\gamma}^e)^{\alpha\beta} = 0 \quad (2,28)$$

disparaît identiquement en vertu de la symétrie de (2,27) pour  $\kappa_{(g)} = 0$ .

### § 3. Les lois de conservation du courant gravifique.

Nous distinguons entre des lois de type

$$\partial_e (\Delta \dot{g}^{e\alpha} \varrho_{\alpha\beta}) = 0 \quad (3,1)$$

contenant la divergence ordinaire et que nous appellerons équation

tions de continuité, et des lois, auxquelles nous donnerons le nom d'équations de continuité covariantes, contenant la divergence covariante

$$(g^{e\alpha}\Theta_{\alpha\beta})_{|e} = 0 \quad (3,2)$$

Le premier membre de (2,18) satisfait, en vertu de (2,3a), à l'identité (3,2). L'équation de continuité covariante (3,2) doit donc être une conséquence des seules équations du champ matériel, indépendamment de la loi suivant laquelle  $g$  varie. En termes de la divergence ordinaire (3,2) s'écrit :

$$\partial_e(\Delta g^{e\alpha}\Theta_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}\Delta\Theta_{\mu\nu}\partial_\beta g^{\mu\nu} = 0 \quad (3,3)$$

(3,1) est une conséquence de la symétrie de la partie gravifique de (2,26) (voir (2,28)) pour autant qu'on se limite à des régions petites par rapport à l'univers et qu'on y choisit un système  $\dot{g} = \text{const}$ . On établit facilement la relation

$$\dot{\Delta}\varrho_{\alpha\beta} = \Delta\Theta_{\alpha\beta} + \dot{\Delta}\left(\frac{\partial L^{(g)}(\text{int})}{\partial u^{\alpha\beta}} - \partial_e\frac{\partial L^{(g)}(\text{int})}{\partial(\partial_e u^{\alpha\beta})}\right) = \Delta\Theta_{\alpha\beta} + \dot{\Delta}\varrho_{\alpha\beta}^{(g)} \quad (3,4)$$

entre charge libre et charge vraie. En  $L^{(g)} = L^{(g)(0)} + L^{(g)(\text{int})}$ ,  $L^{(g)(\text{int})}$  est la partie non-bilinéaire de la Lagrangienne  $L^{(g)}$ . (3,1) peut ainsi être écrit sous la forme

$$\partial_e(\Delta g^{e\alpha}\Theta_{\alpha\beta}) + \partial_e(-\Delta u^{e\alpha}\Theta_{\alpha\beta} + \dot{\Delta}\varrho_{\alpha\beta}^{(g)}) = 0 \quad (3,5)$$

avec le même premier terme que (3,2). (3,5) est une conséquence de l'équation du champ pour matière et gravitation.

Enfin, une dernière identité  $(\dot{g}^{e\alpha}\dot{\Delta}\overset{\circ}{\Theta}_{\alpha\beta})_{|e} = 0$  de la forme (3,2) est valable si  $\dot{\Delta}\overset{\circ}{\Theta}$  est la « vraie charge gravifique » définie par une équation (2,15) avec le  $\dot{\Delta}L$  (de (2,23)) et le  $\dot{g}$  à la place du  $\Delta L^{(m)}$  et du  $g$ . Pour un  $\dot{g}$  euclidien, la transcription en (3,3) s'exprime par

$$\partial_e(\Delta g^{e\alpha}\Theta_{\alpha\beta}) + \partial_e(-\Delta u^{e\alpha}\Theta_{\alpha\beta} + \dot{g}^{e\alpha}\dot{\Delta}\overset{\circ}{\Theta}'_{\alpha\beta}) = 0 \quad (3,6)$$

parce que les dérivées de  $\Delta L^{(m)}$  par rapport à  $g^{\alpha\beta}$  sont les mêmes que celles de  $\dot{\Delta}(L^{(m)(0)} + L^{(m)(\text{int})})$  par rapport à  $u^{\alpha\beta}$ .  $\dot{\Delta}\overset{\circ}{\Theta}'^{(g)}$  est obtenu de  $\dot{\Delta}L^{(g)}$ . (3,6) a les mêmes deux premiers termes que (3,5).

Toute équation de continuité dans un espace à  $n$  dimensions  $x^1, x^2, \dots, x^n$  implique la conservation de l'intégrale sur le sous-espace  $V$  à  $n-1$  dimensions :

$$e^{(n)}_{\beta}(x^n) = \int_V (dx)^{n-1} \dot{\Delta}\dot{g}^{n\alpha}\varrho_{\alpha\beta}(x^1, \dots; x^n) \quad (3,7)$$

pendant l'intervalle  $2T$

$$e^{(n)}_{\beta}(x^n + T) = e^{(n)}_{\beta}(x^n - T) \quad (3,8)$$



si l'intégrand s'annule sur la surface latérale du cylindre  $n$ -dimensionnel. Pour  $x^n = t$ , nous appelons les quatre grandeurs (3,7)  $e^{(4)}_{\beta}$  les composantes du quadrivecteur de la charge gravifique (libre) contenue dans  $V$ .

#### § 4. Les lois de conservation pour le courant énergétique.

Dans le principe (2,12), nous ne varions d'abord que la partie matérielle. La densité du courant énergétique défini par

$$\Delta T^{\alpha(m)}_{\beta} = \Delta V^{\alpha} \partial_{\beta} u - \delta^{\alpha}_{\beta} \Delta L^{(m)} + \frac{\partial (\Delta L^{(m)})}{\partial (\partial_{\alpha} g_a)} \partial_{\beta} g^a; \quad V^{\alpha} = V \gamma^{\alpha} \quad (4,1)$$

satisfait, en vertu des équations du champ matériel, à

$$\partial_{\varrho} (\Delta T^{e(m)}_{\beta}) + \Delta \Theta_{\mu\nu} \partial_{\beta} g^{\mu\nu} = 0 \quad (4,2)$$

La variation des deux intégrales

$$P_{\beta}^{(m)}(t) = \int (dx)^3 \Delta T^{4(m)}_{\beta}(\vec{x}, t) \quad (4,3a)$$

$$P_{\beta(g)}^{(m)}(t) = 2 e^{(4)(m)}_{\beta}(t) = \int (dx)^3 \Delta g^{4\alpha} \Theta_{\alpha\beta}(\vec{x}, t) \quad (4,3)$$

au cours de la période  $2T$  envisagée en (3,8) et due à l'évolution arbitraire de  $g$ , doit être identique en vertu de (3,3) et (4,2). Nous les appelons le *quadrivecteur de la quantité de mouvement-énergie*  $P_{\beta}^{(m)}$  et de (deux fois) la *vraie charge gravifique*  $P_{\beta(g)}^{(m)} = 2e^{(4)(m)}_{\beta}$  portée par la matière contenue en  $V$ . Leur différence ne peut être qu'un vecteur constant. Or, un tel vecteur constant (qui doit être indépendant de  $g$ ) ne peut être que zéro dans une théorie covariante. Donc, on a une première identité

$$P_{\alpha}^{(m)} = P_{\alpha(g)}^{(m)} = 2 e^{(4)(m)}_{\alpha} \quad (4,4)$$

Si l'on varie  $u$  et  $g$  en (2,12), la densité énergétique totale  $\Delta T^{\alpha}_{\beta}$

$$\Delta T^{\alpha}_{\beta} = \Delta (T^{\alpha(m)}_{\beta} + T^{\alpha(g)}_{\beta}); \quad \Delta T^{\alpha(g)}_{\beta} = \Delta F^{\alpha} \partial_{\beta} g - \delta^{\alpha}_{\beta} \Delta L^{(g)} \quad (4,5)$$

satisfait à l'équation de continuité

$$\partial_{\varrho} (\Delta T^e_{\beta}) = 0 \quad (4,6)$$

Les quantités

$$P_{\beta} = P_{\beta}^{(m)} + P_{\beta}^{(g)} \quad (4,7)$$

restent donc constantes si les mêmes conditions sont remplies sur la surface de  $V$  que celles que nous demandions pour la conservation du  $e^{(4)}_{\beta}$  en (3,8). La comparaison entre (3,5), (3,3) et (4,2) montre la constance de

$$2 e^{(4)}_{\beta} = 2 e^{(4)(m)}_{\beta} + 2 e^{(4)(g)}_{\beta} \equiv P_{\beta(g)} \quad (4,8)$$

et l'identité

$$P_{\beta} = P_{\beta(g)} = 2 e^{(4)}_{\beta} \quad (4,9)$$

entre le quadrivecteur de quantité de mouvement total  $P_\beta$  et (le double du) quadrivecteur de la *charge gravifique libre*  $P_{\beta(g)} = 2e^{(4)}_\beta$ .

En métrique  $\mathring{g}$ , le *moment de la quantité de mouvement*  $M_{\alpha\beta(g)}$  défini par

$$M_{\alpha\beta}(t) = \int (dx)^3 \mathring{\Delta} Q^4_{\alpha\beta}(\vec{x}, t) \quad (4,10)$$

$$\partial_\lambda(\mathring{\Delta} Q^\lambda_{\alpha\beta}) = 0 \quad (4,11)$$

est également conservé. Les deux définitions, pour  $Q^\lambda_{\alpha\beta(g)}$  et  $Q^\lambda_{\alpha\beta} = Q^\lambda_{\alpha\beta(L)} + Q^\lambda_{\alpha\beta(S)}$ , sont: les densités du moment

$$\begin{aligned} \text{total: } Q_{\alpha\beta(g)} &= x_\alpha 2 \varrho^\lambda_\beta - x_\beta 2 \varrho^\lambda_\alpha \\ \text{« orbital »: } Q^\lambda_{\alpha\beta(L)} &= x_\alpha T^\lambda_\beta - x_\beta T^\lambda_\alpha \\ \text{et « intérieur »: } Q^\lambda_{\alpha\beta(S)} &= V^\lambda \sigma_{\alpha\beta} u \end{aligned} \quad (4,12)^*$$

### § 5. Le champ gravistatique et la masse gravifique.

Dans ce paragraphe, nous déterminons le champ gravifique d'un *système stationnaire*. Par un tel système, nous comprenons une solution de l'équation du champ, dans laquelle la quantité de mouvement constante  $P_\beta$  est contenue dans un volume  $V$  ( $V \sim \lambda_0^3$ ) (système de repos  $P_i = 0$ ,  $P_4 \neq 0$ ). Ceci implique que  $U_A(\vec{x}, t)$  (et  $u_a$  si  $\kappa \neq 0$ ) décroît au moins comme  $r^{-2}$  pour  $r = |\vec{x} - \vec{z}| \gg \lambda_0$ .  $\vec{z}$  est un point quelconque à l'intérieur de  $V$ . Pour  $\kappa = 0$ , cette condition implique  $\partial_t U(\vec{x}, t) = 0$  pour  $r \gg \lambda_0$ . Le champ est donc statique.

Discutons le problème en métrique  $\mathring{g}$ : Toute abréviation, par exemple  $\varrho^\alpha_\beta$  ou  $\partial^\alpha$ , signifie dès lors  $\mathring{g}^{\alpha\alpha'} \varrho_{\alpha'\beta}$  et  $\mathring{g}^{\alpha\alpha'} \partial_{\alpha'}$ , avec un  $\mathring{g}$  constant ( $\mathring{g}^{44} = -1$ ). L'équation (2,26) (avec (2,27)) prend alors la forme ( $i, k, l, \dots = 1, 2, 3$ ):

$$\frac{1}{2} (\partial_i \partial_k (u_i^l - u_{44}) + \partial_l \partial^l u_{ik}) = \varrho_{ik} - \frac{1}{2} \mathring{g}_{ik} (\varrho_i^l - \varrho_{44}) \quad (5,1)$$

$$\frac{1}{2} \partial_l \partial^l u_{44} = \varrho_{44} + \frac{1}{2} (\varrho_i^l - \varrho_{44})$$

(5,1) ne résulte de (2,26) que si la condition (compatible avec (2,26))  $\partial_\alpha u^{\alpha\beta} = 0$  (analogue à la condition de LORENTZ  $\partial_\alpha \varphi^\alpha = 0$  en électrodynamique) est imposée au potentiel  $u^{\alpha\beta}$ . Elle ne fait que limiter le *groupe de jauge*, qui, en théorie de gravitation, est donné par l'ensemble de transformations (infinitésimales) des coordonnées (dans la partie finie de l'espace temps):

$$\bar{x}^\alpha = x^\alpha + \delta \chi^\alpha(x); \quad \bar{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + \partial^\alpha \delta \chi^\beta + \partial^\beta \delta \chi^\alpha \quad (5,3)$$

\*) Voir PAULI (1941).

à des  $\delta\chi^\alpha$  soumis à  $\square\delta\chi^\alpha + \partial^\alpha(\partial_\beta\delta\chi^\beta) = 0$ . Posant encore  $\dot{\Lambda} = 1$ , la continuité de  $\varrho_{\alpha\beta}$  montre que

$$\varrho_{i4} = 0 \quad \text{et} \quad \int_V (dx)^3 \varrho_{ik} = 0 \quad (5,4)$$

La deuxième équation (5,1) admet le potentiel Newtonien

$$u_{44}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{e_{44}}{r} + \text{termes en } \frac{1}{r^n} \right)$$

avec la charge gravifique (cf. (3.7), (4.5), (4.7) et (4.3a))

$$e_{44} = \int (dx)^3 \varrho_{44} = -\int (dx)^3 \dot{g}^{4a} \varrho_{a4} = -\frac{1}{2} \int (dx)^3 \Lambda T^4_4 = \frac{1}{2} P^4 \equiv \frac{1}{2} m \quad (5,5)$$

$$e_{i4} = e_{ik} = 0$$

comme seule solution dont le potentiel disparaît pour  $r \rightarrow \infty$ . La charge gravifique  $e_{44}$  dans  $V$  est donc proportionnelle (facteur  $1/2$ )\* à l'énergie totale  $P^4 = m$  contenue en  $V$ .  $m$  sera appelé la masse gravifique du système. Dans un système d'axes quelconque,  $m$  est défini par

$$(P, P) = P_\alpha P^\alpha = -m^2; \quad m = F^\alpha |P^\alpha|^{-1} \quad (5,6)$$

## § 6. L'équation de mouvement pour les centres d'énergie et de gravité du système et la masse inerte.

Nous discutons d'abord le système stationnaire envisagé au § 5. Nous définirons les centres d'énergie et de gravité par

$$z^i(\lambda) = m^{-1} \int (dx)^3 x^i \Lambda T^{44}(\vec{x}, \lambda)$$

$$Z^i(\lambda) = m^{-1} \int (dx)^3 x^i \mathcal{Z} \varrho^{44}(\vec{x}, \lambda) \quad (6,1)$$

dans le système de repos à l'époque  $\lambda = t$ . On vérifie facilement les relations (nous écrivons  $y^i$  et  $Y^i$  pour  $z^i$  et  $Z^i$  et  $\dot{F}^i$  pour  $dF/d\lambda$ )

$$\dot{y}^i(\lambda) = m^{-1} \int (dx)^3 \Lambda T^{i4} \mp P^i, \quad \text{si } T^{\alpha\beta} \mp T^{\beta\alpha}$$

$$\dot{Y}^i(\lambda) = m^{-1} \int (dx)^3 \mathcal{Z} \varrho^{i4} = P^i = 0 \quad (6,2)$$

\*) En unités conventionnelles, le  $\Theta_{\alpha\beta}$  (et donc  $\varrho_{ik}$  en (5,1)) contient le facteur  $8\pi k^2/c^2$  ( $k = \text{const. de gravitation Newtonienne}$ ). Aussi définit-on l'énergie par  $\bar{P}^4 = \int (dx)^3 \varrho^{44}$ . Introduisant alors la masse (gravifique) par  $\bar{P}^4 = \bar{m}c^2$  et le potentiel Newtonien par  $2\Phi = u_{44}$ , (5,5) prend la forme conventionnelle

$$\Phi(\vec{x}) = -k \frac{\bar{m}}{r} + \text{termes en } \frac{1}{r^2} \quad (5,5a)$$

en vertu des théorèmes de continuité. Le centre de gravité reste ainsi en repos en vertu de la symétrie de  $\rho^{\alpha\beta}$ . Par contre, le centre d'énergie peut avoir un mouvement intérieur. Pourtant, dans le cas stationnaire,  $\vec{y}$  ne s'éloigne jamais « infiniment loin » de  $\vec{Y}$ . (On remarque l'analogie entre le mouvement (1,1) et (1,2) de la particule avec spin.)

Considérons maintenant un système quasistationnaire, dont les  $u$  et  $U$  ne disparaissent pas sur la surface de  $V$  (à distance  $r \gg \lambda_0$ ). Pour  $r \rightarrow \infty$ ,  $u$  est tellement faible qu'à toute décomposition

$$u = u^{(\text{stat})} + u^{(\text{def})} \quad (6,3)$$

correspond une décomposition de  $V$  en  $V^{(\text{stat})} + V^{(\text{def})}$ . La théorie est donc linéaire sur cette surface lointaine. Aussi voulons-nous, dans le cas  $\kappa \neq 0$ , supposer que (6,3) soit valable déjà dans une région  $r$  soumise à

$$\kappa^{-1} \gg r \gg \lambda_0 \quad (6,4)$$

(6,3) est le cas où une onde incidente  $u^{(\text{inc})}$  déforme le champ du système stationnaire. (Cette déformation  $u^{(\text{def})}$  est égale à  $u^{(\text{inc})}$ , si la théorie est partout linéaire ou si  $u^{(\text{inc})}$  est infiniment faible.) Aussi allons-nous soumettre la longueur d'onde de  $u^{(\text{def})}$  à

$$\lambda_{(\text{inc})} \gg \lambda_0 \quad (6,5)$$

sur toute la surface. Dans ce cas, on démontre que la relation (6,2)

$$m \dot{Z}^\alpha(\lambda) = P_{\alpha(g)}^\alpha(\lambda) \quad (6,6)$$

reste valable. Si  $T^{4\alpha}$  et  $2\rho^{4\alpha}$  ne disparaissent pas sur la surface de  $V$ , les deux définitions (4,3) pour  $P_\alpha$  et pour  $P_{\alpha(g)}$  peuvent différer. On calcule d'abord la variation de  $P^\alpha$ . Dans le système de repos, on trouve, après quelques transformations,

$$\delta P^\alpha = -\delta \lambda \oint_r d\sigma_i T^{i\alpha} = e^{a(\text{stat})} \partial^\alpha u_a^{(\text{def})} \delta \lambda \quad (6,7)$$

avec

$$e^{a(\text{stat})} = \oint_r d\sigma_i V^a i^{(\text{stat})} = \int_V (dx)^3 \rho^a(\text{stat}) \quad (6,7a)^*$$

Pour établir (6,7), seule la linéarité pour des champs faibles (6,3) et les conditions (6,4) et (6,5) ont été utilisées.  $e^{a(\text{stat})}$  est la *charge libre statique*. Pour le champ gravifique, elle est donnée par (5,5). Dans un système d'axes quelconques, elle vaut ainsi

$$e_{\alpha\beta}^{(\text{stat})} = \frac{1}{2} m \dot{Z}_\alpha \dot{Z}_\beta = \frac{1}{2} P_{\alpha(g)} \dot{Z}_\beta \quad (6,8)$$

\*)  $V^{gi} = V^A \gamma_A^i$ ,  $d\sigma_i =$  élément de surface.

Pour trouver la ligne d'univers, il nous faut le  $\delta P_{(g)}^\alpha$ . On peut démontrer (PAULI (1941), équations (14) et (13c)) que la relation

$$2 \varrho^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} + \partial_\lambda f^{\alpha\beta\lambda} \quad (6,9)$$

$$2 f^{\alpha\beta\lambda} = -2 f^{\lambda\beta\alpha} = (V^\lambda \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\beta} + V^\beta \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\lambda} - V^\alpha \overset{\circ}{\sigma}^{\lambda\beta}) u$$

existe dans toute région où les équations de champ sont satisfaites. Après des calculs assez longs, se servant de la symétrie  $u_a = u_{(\alpha\beta\gamma\dots)} = u_{(\beta\alpha\gamma\dots)}$ ,  $V^A = V^{\varrho(\alpha\beta\dots)} = -V^\alpha \varrho^{\beta\dots}$  et de la définition

$$\overset{\circ}{\sigma}_{\mu a}^{\nu \alpha'} = \sigma_{\mu(\alpha\beta\dots)}^{\nu(\alpha'\beta'\dots)} = (\overset{\circ}{g}_{\mu\alpha}^{(-1)} \overset{\circ}{g}^{\nu\alpha'} - \delta_\alpha^\nu \delta_\mu^{\alpha'}) \delta_{\beta\dots}^{\beta'} + \delta_\alpha^{\alpha'}(\dots)\dots + \dots$$

on établit, dans le système en repos,

$$\delta P_{\varrho(g)} = e^{(44\dots)(stat)} n U_{(44\dots)\varrho}^{(def)} \delta \lambda \quad (6,10)$$

$U_A = U_{(\alpha\dots)\varrho} \equiv U_{a\varrho}$  est l'intensité tensorielle générale introduite au § 3.  $n$  est un facteur ( $= +1$  resp.  $-2$  pour l'électrodynamique resp. pour la gravitation). (6,10) avec (6,6) se combine en

$$m \ddot{Z}^e = n e^{a(stat)} U_a^{(def)\varrho} \quad (6,11)$$

$m$  est le même facteur qu'en (5,5). Il représente ici la *masse inerte*.

Si le champ incident est purement gravifique et s'il est trop faible pour «polariser les masses» ( $U^{(def)} \rightarrow U^{(inc)}$ ) (6,8) montre que (6,11) prend la forme

$$\ddot{Z}^e + G_{\alpha\beta}^{(inc)\varrho} \dot{Z}_\alpha \dot{Z}_\beta = 0 \quad (6,12)$$

(Nous avons posé  $G^{(inc)} = \overset{\circ}{G} (= 0) + U^{(inc)} + \Omega (= 0)$ ). Le centre de gravité décrit donc une «géodésique de la métrique incidente  $g^{(inc)}$ » qui régnerait si le système n'était pas présent. C'est la conséquence de l'équivalence entre masse gravifique ( $= 2e_{44}$  dans le système de repos) et masse inerte ( $P^4$  dans le système de repos), qui fut le point de départ de la théorie d'EINSTEIN\*).

L'équation de la géodésique (6,12) semble être contraire à l'invariance de jauge (postulat que les observables physiques sont invariantes par rapport à la substitution (5,3). Car, contrairement au cas électromagnétique où  $B_{\alpha\beta}$  est invariant par rapport à la substitution  $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha + \partial_\alpha \chi$ , les intensités gravifiques

\*) Remarquons que (6,12) est valable pour tout système. Par exemple, la goutte incompressible ( $w^\alpha =$  quadrivitesse,  $p =$  pression,  $w_\beta|^\alpha w^\beta + p|^\alpha = 0$ ,  $w^\beta w_\alpha|_\beta = 0$ , soumis à  $w_\alpha|^\alpha = 0$ ) n'est qu'un cas particulier d'une théorie d'un champ à 5 composantes intensives ( $U_A$  et  $u_a = w_\alpha$  et  $p$ ). Cette théorie est intéressante en ce qu'elle permet des solutions statiques, tandis que toute autre théorie où les  $\gamma$  diffèrent de zéro pour  $r \rightarrow \infty$  (ici on a  $\gamma = w \rightarrow 0$ ) n'admet des solutions statiques que si les équations du champ ne sont pas vérifiées en certains points singuliers.

$U_{\alpha\beta}{}^\gamma$  (resp.  $G$ ) en (6,12) ne le sont pas. Cependant, on peut montrer que le changement intégral de la tangente (nous écrivons l'équation contragrédiente à (6,12)

$$\delta \dot{Z}_\sigma = \int_{-A}^{+A} dZ^\alpha G_{\alpha\sigma}^{(\text{inc})} \dot{Z}_\sigma(\lambda) \quad (6,13)$$

est invariante.

En effet, supposons qu'il existe un autre chemin  $C(\lambda)$  (non géodésique) reliant les points  $x^\alpha = Z^\alpha(\pm A)$  qui est situé entièrement dans une région  $g^{(\text{inc})}$  euclidienne (région sans champ gravifique). Ce chemin  $C(\lambda)$  permet de comparer les deux vecteurs  $\dot{Z}^\alpha(\pm A)$ . Le théorème de STOKES pour le contour fermé  $Z(\lambda) - C(\lambda)$  ( $\Sigma$  = surface entourée par ce contour) montre que

$$\begin{aligned} \delta \dot{Z}_\sigma &= - \oint_{Z-C} dZ^\alpha G_{\alpha\sigma}^{(\text{inc})} \dot{Z}_\sigma \underline{\underline{\circ}} - \int_{\Sigma} d\sigma^{\alpha\beta} (\partial_\alpha G_{\beta\sigma} - \partial_\beta G_{\alpha\sigma})^{(\text{inc})} \dot{Z}_\sigma \\ &\underline{\underline{\circ}} \dot{Z}_\sigma(A) \int_{\Sigma} d\sigma^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta\sigma}^{(\text{inc})} \end{aligned} \quad (6,14)$$

est une grandeur invariante par rapport aux transformations de jauge (5,3). En (6,14), les termes prop. à  $G^2$  ont été négligés. Pour les inclure, une prolongation du «champ  $\dot{Z}_\sigma(Z)$ ,» à l'intérieur de la surface  $\Sigma$  (entourée par  $Z(\lambda) - C(\lambda)$ ) doit être faite. Le résultat contiendra des puissances et des dérivées du tenseur de RIEMAN-CHRISTOFFEL  $R_{\alpha\beta\sigma}^{(\text{inc})}$ . Les observables physiques (par exemple la déflexion  $\delta P^\alpha = m \delta \dot{Z}^\alpha$ ) sont ainsi indépendantes de la jauge des  $g^{(\text{inc})\mu\nu}$  en analogie parfaite avec l'électrodynamique.

### § 7. Les singularités du champ.

Les solutions statiques possèdent des lignes singulières sauf dans le cas où les  $\gamma$  pour une partie du champ (par expl. pour le liquide dans la note p. 32) disparaissent à l'infini. Sur ces lignes, les équations du champ ne sont donc plus valables. (2,20) et (2,26) contiennent alors une inhomogénéité singulière

$$(V_{el} \gamma^e)^a - v^a = \partial_e (U \dot{\xi} \dot{\gamma}^e)^a - \kappa^2 (u \dot{\xi})^a - \rho^a = \rho^{(s)a} \quad (7,1)$$

$$\rho^{(s)a}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{(s)a} \delta(x - z(\lambda))$$

$\delta(x)$  est défini par la relation invariante:

$$\dot{z}^4(\lambda(t)) \int_{V'} (dx)^3 \rho^{(s)a}(\vec{x}, t) w(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & ; \vec{z} \subset V' \\ e^{(s)a}(\lambda(t)) w(\vec{z}(\lambda(t))) & ; \vec{z} \supset V' \end{cases}$$

$e^{(s)a}$  représente la charge vraie située au point  $\vec{z}(\lambda(t))$ . Elle est une fonction contragrédiente à  $u_a$  de la ligne d'univers, par exemple  $= \varepsilon \dot{z}^\alpha(\lambda)$  ou  $= \varepsilon_{(g)} \dot{z}_\alpha \dot{z}_\beta$ . Jusqu'à présent, les lois de continuité

étaient des conséquences des équations du champ. Mais, maintenant, elles ne le sont plus, car

$$\partial_\alpha T^\alpha_\beta = \varrho^{(s)a} \partial_\beta u_a, \quad \partial_\alpha 2 \varrho^\alpha_\beta = n \varrho^{(s)a} U_{a\beta} \quad (7,2)$$

Pour que l'identité entre  $P^\alpha$  et  $P^\alpha_{(g)}$  soit établie, il faut que  $P^\alpha$  soit formé à partir d'un  $T'^\alpha_\beta$  soumis à:

$$\partial_\alpha T'^\alpha_\beta = \partial_\alpha 2 \varrho^\alpha_\beta = n \varrho^{(s)a} U_{a\beta} \quad (7,2a)$$

Pour l'obtenir nous ajoutons à  $T^\alpha_\beta$  un terme singulier:

$$T'^\alpha_\beta = T^\alpha_\beta - n \varrho^{(s)\alpha\mu\nu\dots} u_{\beta\mu\nu\dots} \quad (7,2b)$$

(Il faut alors que  $u_a$  satisfasse à l'équation de continuité  $\partial_\alpha u^\alpha_{\beta\gamma\dots} = 0$ .)

Pour une ligne d'univers donnée  $x = z(\lambda)$ , les solutions de (7,1) sont des fonctionnelles  $u(x) = u(x)[z(\lambda)]$  des quatre fonctions  $z^\alpha(\lambda)$ . La condition de continuité pour  $x = z$ :

$$\begin{aligned} \dot{z}^4(\lambda(t)) \int (dx)^3 \partial_\alpha T'^\alpha_\beta &= n e^{(s)a}(\lambda(t)) U_{\alpha\beta}(\vec{z}(\lambda(t)), t)[z(\lambda)] = \\ &= f_\beta(\lambda(t))[z(\lambda)] \end{aligned} \quad (7,3)$$

contient quatre équations fonctionnelles pour les quatre  $z^\alpha(\lambda)$ . Nous appelons  $f_\beta(\lambda)[z(\lambda)]$  la *force totale* agissant à l'instant  $\lambda = \lambda(t)$  sur la singularité. Une solution particulière de (7,1) et (7,3) est la droite  $\dot{z}^\alpha = \text{const}$ . Alors, le *champ est statique*. Son vecteur  $P_\alpha$  doit être parallèle à  $\dot{z}$

$$P_\alpha^{(\text{stat})} = m \dot{z}_\alpha \equiv \pi_\alpha \quad (7,4)$$

$m$  est la *masse inerte et gravifique*, parce que (5,5) et (6,8) sont restés valables. Les *théories linéaires simples* donnent pour le facteur de proportionnalité  $m$  une valeur infinie. Mais des *théories linéaires complexes* (faisant intervenir plusieurs champs) (STUECKELBERG (1939), BOPP (1940), LANDÉ et THOMAS (1941)), des *théories linéaires limites* (WENTZEL (1934), DIRAC (1938), et STUECKELBERG (1944)) et des *théories non-linéaires* (BORN et INFELD (1934), SCHROEDINGER (1943)) existent, qui donnent, pour  $m$ , une valeur finie.  $m$  dépend des constantes qu'on a introduites dans ces théories. Considérons d'autres solutions et cherchons des lignes  $z^\alpha(\lambda)$  qui ne s'éloignent pas infiniment loin de deux droites asymptotiques (1,2) pour  $\lambda = \pm A \rightarrow \pm \infty$  caractérisées par  $8 + 8n$  constantes  $p^\alpha(\pm A)$ ,  $q^\alpha(\pm A)$ ,  $p_\alpha^{(s)}(\pm A)$ ,  $q_\alpha^{(s)}(\pm A)$ . Les solutions de l'équation du champ (7,1) sont, aux époques  $t = \pm T = z^4(\pm A)$  au voisinage fini de  $z^\alpha$ , le champ stationnaire envisagé au § 5. La décomposition (6,3) est, à ces époques, rigoureusement possible, car le champ d'ondes  $u^{(\text{out})}_{(\text{inc})}$  s'est séparé du champ stationnaire.  $u^{(\text{out})}_{(\text{inc})}$  est même devenu

infiniment faible sous l'influence de sa dispersion naturelle. Nous écrivons, *toujours à ces deux époques*, avec DIRAC :

$$\lim u(\pm T) \rightarrow u^{(\text{out})}_{\text{inc}} + u^{(\text{av})}_{\text{ret}} [z(\lambda)] \quad (7,5)$$

Les parties  $u^{(\text{out})}_{\text{inc}}$  sont, à ces époques, solutions de l'équation homogène.  $u^{(\text{av})}_{\text{ret}}$  sont, à ces deux époques, les solutions inhomogènes et stationnaires, provoquées par l'une ou l'autre des branches asymptotiques  $z(\lambda \gtrless \pm A)$  de la ligne.

A des *époques finies*, nous *définissons* par le symbole  $u^{(\text{av})}_{\text{ret}}(x)[z(\lambda)]$  les fonctionnelles particulières, solutions de (7,1) et soumises à l'une ou l'autre des deux conditions aux limites :

$$\lim u^{(\text{av})}_{\text{ret}}(\pm T) \rightarrow u^{(\text{stat})} \quad (7,6)$$

La solution générale  $u(x)$ , qui satisfait aux conditions aux limites (7,5), définit à chaque instant deux  $u^{(\text{def})}$  par :

$$u(x) = u^{(\text{def out})}_{\text{inc}} + u^{(\text{av})}_{\text{ret}} \quad (7,7)$$

Ces équations représentent la généralisation de la décomposition de DIRAC (7,5) pour des théories non-linéaires. Nous rappelons les définitions et relations suivantes pour les potentiels

$$\begin{aligned} 2 u^{(\text{sym})} &= u^{(\text{ret})} + u^{(\text{av})} \\ 2 u^{(\text{rad})} &= u^{(\text{ret})} - u^{(\text{av})} \end{aligned} \quad (7,8)$$

Pour les grandeurs non-linéaires, par exemple pour les intégrales  $P_\beta$  ou leurs dérivées, la décomposition est de la forme

$$\frac{d}{dt} \left( (P^{(\text{sym})} + P^{(\text{rad})} + P^{(\text{sym, rad})}_{(\text{pair})}) \pm P^{(\text{sym, rad})}_{(\text{impair})} + P^{(\text{ret, def inc})}_{\text{av, def out}} \right)_\beta = 0^* \quad (7,9a)$$

Elle correspond, terme par terme, à (7,3) décomposé en

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} P_\beta &= n e^{(s)a}(\lambda) \left( U^{(\text{sym})} \pm U^{(\text{rad})} + U^{(\text{def inc})}_{\text{def out}} \right)_{a\beta} \\ &\equiv f^{(\text{sym})}_\beta \pm f^{(\text{frein})}_\beta + f^{(\text{def})}_\beta = f^{(\text{self})} [z(\lambda)] + f^{(\text{def})} = 0 \end{aligned} \quad (7,9)$$

Aux limites asymptotiques, on a

$$\lim u^{(\text{sym})}(\pm T) \rightarrow u^{(\text{stat})} + \frac{1}{2} u^{(\text{rad})} \quad (7,10)$$

$$\lim (P^{(\text{sym})} + P^{(\text{rad})} + P^{(\text{sym, rad})}_{(\text{pair})})_\beta(\pm T) \rightarrow \pi_\beta(\pm T) + \frac{1}{4} P_\beta^{(\text{rad})}(\pm T)$$

(avec  $P^{(\text{rad})}(+T) = P^{(\text{rad})}(-T)$ ).  $\pi_\beta$  est la quantité de mouvement

\*) Puissances « paires » ou « impaires » en  $u^{(\text{rad})}$ .



du champ stationnaire entourant  $z^\alpha (\neq (7,4), \text{ pour } \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}, \dots \neq 0)$ .  $P_\beta^{(\text{rad})}$  est celle portée par les ondes émises. L'identité

$$\lim u^{(\text{ret})}_{(\text{av})} (\pm T) \rightarrow u^{(\text{stat})} (\pm T) + u^{(\text{rad})} (\pm T) \quad (7,11)$$

et les équations (7,6) et (7,11) permettent d'établir la relation suivante:

$$\lim (P^{(\text{ret})}_{(\text{av})} (+T) - P^{(\text{ret})}_{(\text{av})} (-T))_\beta = \pi_\beta (+T) - \pi_\beta (-T) \pm P_\beta^{(\text{rad})} \quad (7,12)$$

qu'on compare avec l'intégrale de (7,9a) et de (7,9). Les deux premiers termes de la fonctionnelle  $f$  en (7,9) sont indépendants de  $u^{(\text{inc})}(x)$ . Leurs intégrales

$$\begin{aligned} - \lim_{-A}^{+A} \int d\lambda f_\beta^{(\text{sym})}(\lambda) &= \pi_\beta (+A) - \pi_\beta (-A) = \delta \pi_\beta \\ - \lim_{-A}^{+A} \int d\lambda f_\beta^{(\text{frein})}(\lambda) &= P_\beta^{(\text{rad})} \end{aligned} \quad (7,13)$$

doivent ainsi représenter l'augmentation  $\delta \pi_\beta$  de la constante de mouvement portée par le champ stationnaire et celle portée par l'onde émise  $P_\beta^{(\text{rad})}$ . Les développements suivants avec des coefficients constants  $\eta_{ik..}$  et  $\xi_{ik..}$ , dépendant du choix de la théorie, expriment que  $f^{(\text{sym})}$  et  $f^{(\text{rad})}$  sont des fonctionnelles paires et impaires de  $z(\lambda)$  et que  $f^{(\text{def})}$  peut être développé en termes de  $f^{(\text{inc})}$ :

$$\begin{aligned} f_\beta^{(\text{sym})} &= -m \left( \ddot{z} - 4 \eta_2 \lambda_0^2 (\ddot{\ddot{z}} - 3 \dot{z} (\ddot{z}, \ddot{z})) + 16 \eta_4 \lambda_0^4 (\ddot{z}^{(6)} - \dots) + \dots \right. \\ &+ \lambda_0^2 (\eta_{02} \ddot{z} - 4 \eta_{22} \lambda_0^2 (\ddot{\ddot{z}} - \dots) + \dots) (\ddot{z}, \ddot{z}) \\ &\left. + \lambda_0^4 (\eta_{04} \ddot{z} + \dots) (\ddot{z}, \ddot{z})^2 + \dots \right)_\beta \end{aligned} \quad (7,14)^*$$

$$\begin{aligned} f_\beta^{(\text{frein})} &= m \lambda_0 \left( (\ddot{z} - \dot{z} (\ddot{z}, \ddot{z})) - 4 \xi_2 \lambda_0^2 (\ddot{\ddot{z}} - \dot{z} (4 (\ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}) \right. \\ &+ 3 (\ddot{z}, \ddot{z})) + \dots \\ &\left. + \lambda_0^2 (\xi_{02} (\ddot{z} - \dots) + \dots) (\ddot{z}, \ddot{z}) + \dots \right)_\beta \end{aligned} \quad (7,15)^{**}$$

$$\begin{aligned} f^{(\text{def inc})} &= e^{\alpha (\text{stat})} (\lambda) n U_{\alpha\beta}^{(\text{inc})} (z(\lambda)) \\ &+ (\text{termes en } \partial_\alpha U^{(\text{inc})}, \partial_\alpha \partial_\gamma U^{(\text{inc})}, \dots \text{ et } (U^{(\text{inc})})^2, (U^{(\text{inc})})^3, \dots \\ &\text{dépendant de } \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}, \dots) \end{aligned} \quad (7,16)$$

Le facteur  $m$  de  $-\ddot{z} (-\dot{z}, \dot{z})^{-1}$  en (7,14) doit être la même constante qu'en (7,4) parce que les considérations du § 5 restent va-

\*) Dans les théories envisagées (électrodynamique, gravitation), la force  $f$  satisfait à l'identité  $(f, \dot{z}) = 0$ . Cette relation détermine les coefficients numériques des  $\dot{z}$  en (7,14), (7,15) et (8,8). Les  $\dot{F}$  en (7,14) à (7,16) sont les dérivées par rapport au temps propre  $(= \dot{F} (-\dot{z}, \dot{z})^{-\frac{1}{2}})$ .

\*\*\*) si  $\kappa = 0$ .

lables: Comme rien n'a été changé dans les équations du champ à grande distance  $r$ , l'équation (6,11) est encore juste dans la limite  $\ddot{z} = \ddot{z} = \dots = 0$  (cas quasistatique). Cette même considération limite nous a obligé à poser la *charge totale*  $e^{(\text{stat})}$  (et non  $e^{(s)a}$ ) comme facteur de  $U^{(\text{inc})}_{a\beta}$  dans le développement (7,16) de  $f^{(\text{def})}$  en termes de  $U^{(\text{inc})}$ . Les généralisations contenues en (7,9), (7,14), (7,15) et (7,16) par rapport à notre théorie linéaire en I et à notre théorie limite en II sont les suivantes:

1° Contrairement à I, les coefficients  $\eta_{ik\dots}$  des termes non-linéaires en  $\overset{(n)}{z}$  sont maintenant indépendants des coefficients des termes linéaires  $\eta_i$ . Nous avons montré en II que les  $\eta_i$  pourraient être choisis arbitrairement ( $\eta(2\lambda_0\omega) = 1 + \eta_2(2\omega\lambda_0)^2\eta_2 + \dots =$  fonction du modèle). La liberté additionnelle dont on dispose dans une forme non-linéaire de la théorie du champ  $\varphi = u$  (et des champs additionnels  $\Phi^{(i)}$  de II) nous permet de prendre aussi pour les  $\eta_{ik\dots}$  des constantes arbitraires.

2° La force de freinage  $f^{(\text{frein})}$  détermine, en (7,13), la quantité de mouvement rayonnée. Le coefficient de cette force (la longueur  $\lambda_0$ ) est ainsi obtenu en calculant l'énergie du *rayonnement dipole* de la charge libre  $e^{(\text{stat})}$ . Si l'on connaît la charge électrique  $\varepsilon$ , portée par un corps, on a  $e^{(\text{stat})\alpha} = \varepsilon\dot{z}^\alpha = e^{(s)\alpha}$  et, conformément à (5,5),  $e^{(\text{stat})\alpha\beta} = \frac{1}{2}m\dot{z}^\alpha\dot{z}^\beta \equiv \varepsilon_{(g)}\dot{z}^\alpha\dot{z}^\beta$ , la théorie de rayonnement (pour la gravitation cf. PAULI (1921), éq. (450)) détermine  $4\pi\lambda_0 = (\frac{2}{3}\varepsilon^2 + \frac{3}{5}\varepsilon_{(g)}^2)m^{-1}$ . Dans une théorie non-linéaire, cette charge libre se trouve distribuée sur une étendue finie. Il en résulte un *freinage multipole*, exprimé par les termes  $\overset{(\dots)}{z}$ , etc., avec des coefficients  $\xi_{ik\dots} \neq 0$ .

3° Pour l'approximation linéaire, le résultat correspond à l'équation (1,17) et (1,19) de II, avec une fonction de modèle complexe

$$(g(2\lambda_0\omega))^{-1} = \eta(2\lambda_0\omega) + \frac{i}{2}(2\lambda_0\omega)\xi(2\lambda_0\omega) = 1 + \eta_2(2\lambda_0\omega)^2 + \dots + i\lambda_0\omega(1 + \xi_2(2\lambda_0\omega)^2 + \dots) \quad (7,17)$$

à la place du  $1 + \eta_2(2\lambda_0\omega)^2 + \dots + i\lambda_0\omega$  en II. Le  $g(2\lambda_0\omega)$  en (7,17) est la nouvelle «fonction de prémonition». ( $= 2\pi g_0$  en II, équation (1,23)).

### § 8. Discussion des solutions stationnaires.

Les solutions de l'équation fonctionnelle avec  $U^{(\text{inc})} = 0$  représentent le mouvement de la singularité dans le cas stationnaire. La droite (1,2) est une solution possible. Considérons d'autres solutions:

1° Si tous les  $\xi_i \dots$  sont nuls (théorie du champ linéaire), la droite d'univers est la seule solution car, sinon, pour  $t = +T$ , la solution devient une hyperbole (accélération continue vers la vitesse de lumière. Cf. DIRAC (1938) et II), ce qui est contradictoire à la décomposition faite.

2° Pour le modèle  $\xi_i \dots \neq 0$ , par expl. pour

$$4 \eta_2 \lambda_0^2 = 4 \xi_2 \lambda_0^2 = -\omega_0^{-2}; \quad \eta_4 = \dots = \xi_4 = \dots = \eta_{ik..} = \xi_{ik..} = 0 \quad (8,1)$$

on a, comme solution générale, la spirale d'univers (1,1). Discutons ce cas intéressant et déterminons le moment magnétique du modèle.

Nous calculons d'abord la moyenne de la force (pour  $z = y$  (1,1)) sur une période  $\omega_0^{-2}$

$$\bar{f}_\beta^{(\text{def inc})} = \varepsilon \overline{\dot{z}^\alpha B_{\alpha\beta}^{(\text{inc})}(z)} (\dot{z}, \dot{z})^{-\frac{1}{2}} = \varepsilon \dot{Y}^\alpha B_{\alpha\beta}^{(\text{inc})}(Y) + \mu_{(0)}^{\gamma\beta} \partial_\gamma B_{\alpha\beta}^{(\text{inc})} + \dots \quad (8,2)$$

et nous trouvons

$$\mu_{(0)}^{\gamma\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon \omega_0 \int_\lambda^{\lambda + \omega_0^{-1}} (y - Y)^\gamma d y^\beta = \frac{1}{2} \varepsilon \omega_0 (q^{\gamma(s)} p^{\beta(s)} - q^{\beta(s)} q^{\gamma(s)}) \quad (8,3)$$

Mais, en (7,16), nous avons vu que d'autres termes, linéaires en  $U^{(\text{inc})}$  mais dépendant des  $\overset{(n)}{z}$ , peuvent s'ajouter à  $f^{(\text{inc})}$ . Les termes suivants

$$f^{(\text{def})} = f^{(\text{inc})} + \zeta_1 \lambda_0^2 \ddot{z}^\alpha B_{\alpha\beta}^{(\text{inc})} (-\dot{z}, \dot{z})^{-\frac{3}{2}} \quad (8,4) \\ + \lambda_0^2 (\zeta_2 \dot{z}_\beta (\dot{z}, \dot{z}) + \zeta_3 \ddot{z}_\beta) \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu B_{\mu\nu}^{(\text{inc})} (-\dot{z}, \dot{z})^{-\frac{5}{2}} + \dots$$

ne dépendent que de  $\dot{z}$  et  $\ddot{z}$ .  $\zeta_2$  et  $\zeta_3$  doivent être déterminés en termes de  $\zeta_1$  pour avoir  $(f^{(\text{inc})}, \dot{z}) = 0$ . Alors, (8,4) contribue à un moment magnétique additionnel

$$\mu_{(1)}^{\gamma\beta} = \zeta_1 (\lambda_0 \omega_0)^2 (1 - (a^{(s)*}, a^{(s)})) \mu_{(0)}^{\gamma\beta} \quad (8,5)$$

La quantité de mouvement  $\pi^\alpha$  du champ stationnaire ne peut être parallèle qu'au seul vecteur constant  $\dot{Y}^\alpha$ . Le moment intérieur (spin)  $\sigma^{\alpha\beta}$  ne peut dépendre que du seul tenseur antisymétrique constant  $(y - Y)^\alpha \dot{y}^\beta - (y - Y)^\beta \dot{y}^\alpha$ . En termes des constantes de (1,1), ceci revient à dire que

$$\pi^\alpha = \frac{m'}{m} p^\alpha, \quad M^{\alpha\beta} = Y^\alpha \pi^\beta - Y^\beta \pi^\alpha + \frac{h'}{h} (q^{\alpha(s)} p^{\beta(s)} - q^{\beta(s)} p^{\alpha(s)}) \quad (8,6)$$

doivent représenter la quantité de mouvement et le moment. Les scalaires  $m'$  et  $h'$  sont, dans le cas général, fonctions de l'amplitude  $a^{(s)}$  du spin.

On obtient un modèle particulièrement simple admettant (1,1) si l'on introduit encore

$$\eta_{02} \lambda_0^2 = \xi_{02} \lambda_0^2 = -\frac{3}{2} \omega_0^{-2} \quad (8,7)$$

Alors, le terme  $f_\beta^{(\text{sym})}$  est une différentielle totale

$$\begin{aligned} f_\beta^{(\text{sym})} = & -\dot{\pi}_\beta (-\dot{z}, \dot{z})^{-\frac{1}{2}}, \pi_\beta = m (\dot{z} (1 - \frac{3}{2} \omega_0^{-2} (\ddot{z}, \ddot{z}) (-\dot{z}, \dot{z})^{-2}) \\ & + \omega_0^{-2} \ddot{z} (-\dot{z}, \dot{z})^{-1}) (-\dot{z}, \dot{z})^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (8,8)$$

La fréquence  $\omega'_0$  et le facteur  $m'$  en (8,6) du spin dépendent de l'amplitude  $a^{(s)}$ .

L'analogie avec la théorie des quanta devient encore plus évidente si l'on remarque que (1,1) est la solution ( $\lim B^{(\text{inc})} \rightarrow 0$ ) de

$$\begin{aligned} \dot{z}^\alpha = \gamma^\alpha; \dot{\gamma}^\alpha = \omega_0^2 m^{-2} \sigma^{\alpha\beta} \pi_\beta \\ \dot{\sigma}^{\alpha\beta} = \gamma^\alpha \pi^\beta - \gamma^\beta \pi^\alpha; \dot{\pi}_\alpha = \varepsilon (\gamma^\beta B_{\beta\alpha}^{(\text{inc})} + \dots) \end{aligned} \quad (8,10)$$

avec  $\omega_0'^2 = -\omega_0^2 (\pi, \pi) m^{-2}$ . Ces équations rappellent nettement la théorie du spin de DIRAC (STUECKELBERG (1942), Q. d. Ch. équation (19,4)). Mais, ici, la masse ( $m' = +\sqrt{-(\pi, \pi)}$ ) et la fréquence  $\omega'_0$  sont fonctions de l'amplitude ( $a^{*(s)}, a^{(s)}$ ) du spin, tandis que  $\hbar' = \hbar$ . (Il est possible qu'un choix particulier pour les  $\eta_{ik..}$ ,  $\xi_{ik..}$  et  $\zeta_{ik..}$  existe, qui rend  $(a^*, a)^{(s)}$  constant.) Pour  $B^{(\text{inc})} = 0$ ,  $\pi^\alpha$  et le moment  $M^{\alpha\beta}$

$$M^{\alpha\beta} = L_{(s)}^{\alpha\beta} + S_{(s)}^{\alpha\beta}; L_{(s)}^{\alpha\beta} = z^\alpha \pi^\beta - z^\beta \pi^\alpha; S_{(s)}^{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta} \quad (8,11)$$

sont les constantes d'intégration.

Enfin, les considérations de § 1 montrent que  $\varrho_{\alpha\beta}$  doit être statique, dans le système de repos. Par contre, le terme en  $\varrho^{(s)\alpha}$  de (7,2b) montre que  $T'^\alpha_\beta$  ne l'est pas. Donc, le  $\vec{y} - \vec{Y}$  défini par (6,2) décrit le mouvement circulaire prévu en (1,1).

Le modèle particulier que nous venons de discuter a donc *4 degrés de liberté intérieurs* (restreints par (1,1 a)). Le modèle général (avec  $\eta_{ik..}$  et  $\xi_{ik..} \neq 0$ ) peut avoir  $4n$  degrés (restreints par certaines conditions du type (1,1 a)).

## § 9. Le formalisme canonique pour les champs sans singularité.

Le champ  $u(x) = u(\vec{x}, t) = u(\vec{x})(p(t), q(t))$ , peut être exprimé comme fonction de  $2 \infty$  variables  $p(k)(t)$  et  $q(k)(t)$ , numérotées par l'indice  $k = 1, 2, \dots$  et fonctions de la coordonnée  $t = x^4$ . Il est quelquefois avantageux de relier  $p(k)$  et  $q(k)$  en une variable

complexe  $a(k)$  (éq. (1,1a)). Entre deux fonctions  $F(p, q)$  et  $G(p, q)$ , on définit par

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \{F, G\}_{(-)} = \sum_k \left( \frac{\partial F}{\partial p(k)} \frac{\partial G}{\partial q(k)} - \frac{\partial F}{\partial q(k)} \frac{\partial G}{\partial p(k)} \right) \\ &= -\frac{i}{\hbar} \sum_k \left( \frac{\partial F}{\partial a^*(k)} \frac{\partial G}{\partial a(k)} - \frac{\partial F}{\partial a(k)} \frac{\partial G}{\partial a^*(k)} \right) \quad (9,1)^* \\ \{F, G\}_{(+)} &= \frac{1}{\hbar} \sum_k \left( \frac{\partial F}{\partial a^*(k)} \frac{\partial G}{\partial a(k)} + \frac{\partial F}{\partial a(k)} \frac{\partial G}{\partial a^*(k)} \right) \end{aligned}$$

les parenthèses et antiparenthèses de Poisson. Le choix particulier des variables satisfaisant

$$\{V^{4a}(\vec{x}, t), u_{a'}(\vec{x}', t)\} = -\delta_{a'}^a \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (9,2)$$

définit, à une transformation canonique près, les *variables canoniques* du champ. La substitution infinitésimale (2,10) peut alors être obtenue par

$$F(\bar{u}_a(\bar{x})) - F(u_a(x)) = -\{P_\alpha(t) \delta \tau^\alpha + M_{ik}(t) \delta \psi^{ik}, F\} \quad (9,3)$$

Avec  $\delta x^4 = dt$  et  $P^4 = H$ , (9,3) contient le formalisme Hamiltonien (1,3) et (1,4).  $F(t + dt)$  resp.  $F(+T)$  est ainsi le résultat d'une transformation (canonique) infinitésimale (1,3) resp. d'une transformation finie (1,4). Elle exprime la valeur finale  $p(t + dt)$  resp.  $p(+T)$  d'une variable en termes des valeurs initiales  $p(t)$  resp.  $p(-T)$  des  $2 \infty$  variables.

Pour la théorie des champs, la méthode de la variation des constantes est avantageuse. On définit par

$$\begin{aligned} u_a(\vec{x}, t) &\equiv u_a(x)(t) = s_a(x/k) a(k)(t) + a^*(k)(t) s(k/x)_a \\ \dots k)(k \dots &= \sum_k; s_a(x/k) = s(k/x)_a^* = \tau_a(k) (h/2V)^{-\frac{1}{2}} \exp(i(k, x)) \quad (9,6)^* \\ (k, k) &= -\kappa^2(\tau); k^4 \geq 0; k^4 \tau_a^*(k) \tau^{a'}(k) = \delta_a^{a'} \quad ** \end{aligned}$$

des « constantes » canoniques  $a(k)(t)$ , qui varient avec  $t$ , dès que la théorie devient non-linéaire. Les  $s_a(x/k)$  sont solutions des équations linéaires (2,22) et (2,26) ( $\Omega = \varrho = 0$ ). La dérivée totale est

$$\partial_t u_a(\vec{x}, t) = \lim_{t=t'} (\partial_4 u_a(x)(t') + \{H(t'), u_a(x)(t')\}) \quad (9,7)$$

avec

$$H(t) = - \int (dx)^3 L^{(\text{int})}(x)(t) \quad (9,8)$$

$L^{(\text{int})}(x)(t)$  est l'intégrale formée par les  $u(x)(t)$  en (9,6).

\*)  $h$  est une constante quelconque pour donner aux  $a$  la dimension [1].  $\tau(k)$  dénombre les tenseurs des polarisations  $\tau$ .

\*\*\*) sommé sur les polarisations  $\tau$ .

Chaque transformation finie (1,4) étant une transformation canonique, il doit exister une grandeur  $\alpha(p(-T), \dots) = \alpha(-T)$  telle que la transformation canonique générale finie (1,5) est équivalente à (1,4). Pour un  $L^{(int)}$  exprimé par la série  $\varepsilon L^{(1)} + \varepsilon^2 L^{(2)} + \dots$ , on trouve (cf. II, éq. (6,20))

$$\alpha = \varepsilon \alpha^{(1)} + \varepsilon^2 \alpha^{(2)} + \dots$$

$$\alpha^{(1)} = - \int_{-T}^{+T} (dx)^4 L^{(1)}(x) (-T) \quad (9,10)$$

$$\alpha^{(2)} = \left( -\frac{1}{2} \int_{-T}^{+T} (dx)^4 \int_{-T}^{x^4} (dx')^4 \{L^{(1)}(x), L^{(1)}(x')\} - \int_{-T}^{+T} (dx)^4 L^{(2)}(x) \right) (-T)$$

$$\alpha^{(3)} = \dots$$

Mais, naturellement, des transformations  $\alpha$  finies et irréductibles existent, pour lesquelles il n'existe pas de  $H$ .

Pour en donner un exemple, nous introduisons les deux fonctions  $D^{(\pm)}$  à composantes  $D_{aa'}^{(\pm)}$ ,  $D_{aA'}^{(\pm)}$  et  $D_{AA'}^{(\pm)}$  :

$$D^{(\pm)}(xa / x' A') = D_{aA'}^{(\pm)}(x/x') = \{u_a(x), U_{A'}(x')\}_{(\pm)} \quad (9,11)$$

L'une d'elles sert à représenter les potentiels et champs retardés et avancés d'une inhomogénéité quelconque  $\varrho^a$  en (2,26)

$$\underset{\pm T}{\text{ret}} \underset{\text{av}}{\varrho}_a(x) = \int_{\pm T}^{x^4} (dx')^4 D_{aA'}^{(0)}(x/x') \varrho^{a'}(x') \quad (9,12)^*$$

et l'autre permet d'exprimer la moyenne des deux potentiels par l'intégrale complexe dans le plan  $x'^4$  le long d'un contour

$$(C) = \frac{1}{2} ((-\infty - i|\tau| \rightarrow 0 \rightarrow +\infty + i|\tau|) + (-\infty + i|\tau| \rightarrow 0 \rightarrow +\infty - i|\tau|))$$

$$\frac{1}{2} (\text{ret} + \text{av}) \varrho_a(x) = \text{sym} \varrho_a(x) = \underset{(c)}{\Im \text{mag}} \int (dx')^4 D_{aA'}^{(1)}(x/x') \varrho^{a'}(x') \quad (9,13)$$

Pour des champs tensoriels (resp. spinoriels) on a  $D^{(-)}$  (resp.  $D^{(+)} = D^{(0)}$  et  $D^{(+)}$  (resp.  $D^{(-)} = D^{(1)}$ ).

Ainsi, d'une expression  $\alpha^{(n)}$  du  $(n+2)$ ième ordre dans les  $u$ , on obtient en

$$\alpha_{(2)}^{(n)} = \int (dx)^4 u_a(x) \underbrace{u_b(x) \dots \text{op}(u^a(x) \dots \text{op}(\dots u^b(x) \dots))}_{(c)} \quad (9,14)$$

une expression  $\alpha_{(2m)}^{(n)}$  du  $(n+2-2m)$ ième ordre, si l'on substitue pour  $m$  paires la fonction  $D^{(1)}$ :

$$\underbrace{u_b(x) \dots u^{b'}(x')}_{(c)} = D_b^{(1) b'}(x/x') \quad (9,15)$$

$\text{op}$  est une opération différentielle ( $\gamma^e, \partial_e, \sigma^{\mu\nu} \dots$ ) ou intégrale (ret, av) quelconque. Naturellement, on doit se limiter à des  $\alpha_{(2m)}^{(n)}$  qui ne divergent pas.

\*)  $\dots a' \varrho^{a'} = \dots a' \varrho^{a'} + \dots A' \Omega^{A'}$ .

Les  $\alpha(-T)$  définis par (9,10) (ou par les formes plus générales (9,14)) sont invariants, dans la limite  $T \rightarrow \infty$ . Les fonctions de  $p, q$

$$\begin{aligned} P_\alpha^{(0)}(t) &= \int (dx)^3 T_\alpha^{(0)}(x)(t) = \sum_k N(k)(t) h k_\alpha \\ a^*(k) a(k) &= N(k) \\ M_{\alpha\beta}^{(0)}(t) &= L_{\alpha\beta}^{(0)} + S_{\alpha\beta}^{(0)} \\ L_{ik}^{(0)}(t) &= \frac{h}{i} \sum a^*(k) \left( k_i \frac{\partial}{\partial k^k} - k_k \frac{\partial}{\partial k^i} \right) a(k)(t) \\ S_{ik}^{(0)}(t) &= h \sum a^*(k) \sigma_{ik}(k/k') a(k')(t) \end{aligned} \quad (9,16)$$

avec

$$\sigma_{ik} a' s_{\alpha'}(x/k) = s_\alpha(x/k') \sigma_{ik}(k'/k)$$

sont les  $P_\alpha$  et  $M_{ik}$  de la théorie linéaire. Ils transforment donc en (9,3) toute fonction des  $u(x)(t')$  à  $t' = \text{const.}$  Or, l'invariance des  $\alpha(-T)$  dans la limite  $T \rightarrow \infty$  s'exprime par  $\bar{\alpha} - \alpha = 0$  en (9,3). Ceci équivaut à dire

$$\begin{aligned} \lim P_\alpha(+T) &= P_\alpha(-T) \\ \lim M_{\alpha\beta}(+T) &= M_{\alpha\beta}(-T) \end{aligned} \quad (9,17)$$

parce que la transformation des  $P_\alpha$  et  $M_{\alpha\beta}$  en (1,5) est devenue l'identité. Nous avons écrit en (9,17)  $P_\alpha$  et  $M_{\alpha\beta}$  pour  $P_\alpha^{(0)}$  et  $M_{\alpha\beta}^{(0)}$ , parce que la dispersion naturelle réduit, à ces époques asymptotiques, les champs à des intensités infiniment faibles. La quantité de mouvement et l'énergie portées par de telles ondes sont identiques à celles de la théorie linéaire.

### § 10. Le formalisme canonique pour les singularités.

Il est inutile de vouloir chercher des transformations infinitésimales pour représenter la solution de l'équation fonctionnelle. Par contre, une transformation finie du type (1,5) existe. Pour la trouver, nous cherchons d'abord la transformation (9,3) pour  $u(x)(\pm T)$  aux époques asymptotiques où la décomposition (7,5) est possible.

La partie  $u^{(\text{inc})}(\pm T)$ , solution infiniment faible du problème homogène, se transforme avec les  $P^{(0)}$  et  $M^{(0)}$  de (9,16).  $u^{(\text{av})}(\pm T)$  est la solution statique caractérisée par les 8 constantes  $p, q, p^{(s)}$  et  $q^{(s)}$  de la ligne (1,2) (resp. par  $4 + n4$  constantes dans un modèle plus compliqué). Les fonctions

$$\begin{aligned} P_\alpha(-T) &= P_\alpha^{(0)}(-T) + p_\alpha(-T) \\ M_{\alpha\beta}(-T) &= M_{\alpha\beta}^{(0)}(-T) + (q_\alpha p_\beta - q_\beta p_\alpha)(-T) + (q_\alpha^{(s)} p_\beta^{(s)} - q_\beta^{(s)} p_\alpha^{(s)})(-T) \end{aligned} \quad (10,1)$$

transforment les deux parties de  $u$ , si les  $p, q$  et  $p^{(s)}, q^{(s)}$  sont des variables conjuguées. Tout  $\alpha(-T)$ , fonction invariante des  $a(-T)$  et des  $(p^\alpha, q^\alpha, a^{(s)\alpha})(-T)$ , satisfait à  $\{M_{\alpha\beta}(-T), \alpha(-T)\} = \{P_\alpha(-T), \alpha(-T)\} = 0$ . La transformation  $\alpha$ , finie et asymptotique, garantit ainsi, en vertu de l'invariance, les lois de conservation intégrale, que nous avons postulées sous forme différentielle pour établir l'équation fonctionnelle.

Le problème s'est ainsi réduit à chercher un invariant  $\alpha$  qui correspond à un modèle  $(\eta_{ik..}, \xi_{ik..}$  et  $\zeta_{ik..})$  donné. Ainsi, la série  $(\varphi \equiv \varphi(y(\lambda)), \varphi' \equiv \varphi(y(\lambda')^*))$ :

$$h \varepsilon \alpha^{(1)}[\varphi] = -\varepsilon \int_{-A}^{+A} d\lambda \varphi \quad (10,2)$$

$$h \varepsilon^2 \alpha^{(2)}[\varphi][\varphi] = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 m^{-1} \left( \int_{-A}^{+A} d\lambda \partial^\alpha \varphi \int_{-A}^{\lambda} d\lambda' (\lambda - \lambda') \partial_\alpha \varphi' - \int_{-A}^{+A} d\lambda \varphi^2 \right)$$

$\varepsilon^3 \alpha^{(3)}[\varphi][\varphi][\varphi] =$  fonctionnelle trilineaire en  $\varphi$ , etc.

est équivalente au problème du mouvement d'une singularité  $e^{(s)} = \varepsilon$  sans spin d'un champ scalaire  $u = \varphi$  (électrodynamique longitudinale, cf. II). Les coefficients de FOURIER de  $\varphi(x)(t)$  (nous écrirons, en  $\varphi(9,6)$ ,  $c(\mu)$  à la place de  $a(k)$ ) subissent, dans l'approximation linéaire, les changements

$$\delta c(\mu') = c(\mu')(+T) - c(\mu')(-T) = -i(\alpha^{(2)} g(\alpha^{(2)})) (\mu'/\mu) c(\mu)(-T) \quad (10,3)$$

$g(\alpha^{(2)})$  est la fonction matricielle  $g(\alpha) = 1 + g_1 \alpha + g_2 \alpha^2 + \dots$  de la matrice

$$\alpha^{(2)}(\mu'/\mu) = \varepsilon^2 2\pi \delta(m^{-1}(\mu' - \mu, p)) \quad (10,4)$$

$$h m^{-1} (2V(\mu'^4 \mu^4)^{\frac{1}{2}})^{-1} (1 + (\mu', \mu) m^2 \frac{1}{2} ((\mu', p)^{-2} + (\mu, p)^{-2}))$$

Les coefficients de  $g$  sont  $g_n = (-i)^n / (n+1)!$ . (10,3) est la formule (2,6) de II, écrite de façon covariante pour le *modèle quantique*. Mais des termes, bilinéaires en  $\varphi$ , du type  $\alpha_{(2m)}^{(2m+2)}$  (9,14) peuvent être ajoutés

$$\alpha_{(2)}^{(4)}[\varphi][\varphi] = \underbrace{(\alpha^{(2)}[\varphi][\varphi]) (\alpha^{(2)}[\varphi][\varphi])} \quad (10,5)$$

$$h \{ \alpha_{(2)}^{(4)}, c(\mu') \} = 2i (-i \alpha^{(2)})^2 (\mu'/\mu) c(\mu) \text{ etc.}$$

Ils remplacent, dans la série  $g$ , les coefficients  $g_n$  par des constantes arbitraires.  $g$  a ainsi la forme

$$g(\alpha) = (\eta(\alpha) + \frac{i}{2} \alpha \xi(\alpha))^{-1} \quad (10,6)$$

\*) Nous écrivons  $\varphi$  pour le champ scalaire  $u$ .



avec  $\eta_0 = \xi_0 = 1$ . Dans le système en repos, on a  $\alpha' = 2\lambda_0 k^4 = 2\lambda_0 \omega^*$ . Ainsi, le  $\alpha$  de (10,2) avec les termes arbitraires  $\alpha_{(2m)}^{(2m+2)}$ , caractérise en (1,5) une transformation finie, qui correspond à la solution de l'équation fonctionnelle pour le modèle le plus général  $\eta(2\omega\lambda_0) + i\omega_0\lambda\xi(2\omega\lambda_0)$  (défini en (7,17)\*\*). Une application de ce formalisme pour l'électron de DIRAC a été donnée autre part par M. BOUVIER et l'auteur (1944).

Je tiens à remercier mon ami et collègue, Monsieur J. WEIGLE, pour la mise au point du présent article.

Genève, Institut de Physique de l'Université.

Lausanne, Laboratoire de Physique de l'Université.

Novembre 1944.

#### Bibliographie (ordre alphabétique).

- BOPP (1940) et (1943), Ann. d. Phys. **38**, 345 et **43**, 573.  
 BORN et INFELD (1934), Proc. Roy. Soc. **144**, 425.  
 BOUVIER et STUECKELBERG (1944), C. R. Soc. Phys. et Hist. nat. Genève **61**, 162.  
 DIRAC (1938), Proc. Roy. Soc. **167**, 148.  
 HEISENBERG (1943), Zs. f. Phys. **120**, 513 et 673.  
 LANDÉ et THOMAS (1941), Phys. Rev. **60**, 514.  
 PAULI (1921), Relativitätstheorie, Encycl. Math. Wiss. **5**, 539.  
 PAULI (1933), Hdb. der Physik, Bd. **24** (I), p. 233.  
 PAULI (1941), Relativistic field theories, Rev. Mod. Phys. **13**, 203.  
 SCHROEDINGER (1944), Proc. Roy. Irish Acad. A. **49**, 25.  
 STUECKELBERG, Théorie de l'électron (1939), Nature **144**, 118; (1941), Helv. Phys. Acta **14**, 51 (réf. I); (1943), Helv. Phys. Acta **16**, 427; (1944), Nature **153**, 143; (1944), Helv. Phys. Acta **17**, 3 (réf. II). (1945) Helv. Phys. Acta **18**, (sous presse) (réf. IV).  
 STUECKELBERG (1942), Quantification des champs, Arch. Soc. phys. et natur. Genève **24** et **25** (réf. Q. d. Ch.).  
 STUECKELBERG (1944), Mécanique asymptotique, C. R. Soc. phys. et Hist. nat. Genève **61**, 155 et 159.  
 WENTZEL (1934), Zs. f. Phys. **86**, 479 et 635.

\*)  $\alpha'$  est le nombre en  $(f(\alpha)\alpha)(\mu'/\mu) = f(\alpha')\alpha(\mu'/\mu)$ , défini en II (4,5).

\*\*\*) On remarque que  $\eta$  et  $\xi$  en (10,6) peuvent contenir des puissances impaires, tandis qu'en (7,19) ils ne contenaient que des puissances paires de  $2\lambda_0\omega$ .