

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 19 (1946)
Heft: VI-VII

Artikel: Zur Theorie singulärer Magnetpole
Autor: Banderet, Pierre Paul
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-111714>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur Theorie singulärer Magnetpole

von Pierre Paul Banderet.

(20. VIII. 1946.)

Zusammenfassung. Im Anschluss an Arbeiten von DIRAC und FIERZ werden die singulären Magnetpole weiter untersucht. Die vorliegende Arbeit behandelt:

1) Die Streuung von geladenen Teilchen im Feld eines singulären Magnetpols. Das Problem lässt sich durch eine Reihenentwicklung nach Kugelwellen lösen. Das Resultat ist ähnlich demjenigen, das die klassische Mechanik liefert.

2) Die Eigenfunktionen der Diracschen Gleichung eines elektrisch geladenen Teilchens im magnetischen Coulomb-Feld. Physikalisch brauchbare Eigenfunktionen gibt es nur im Falle von Elektronen; für Teilchen mit anderem magnetischen Moment ist die Diracsche Gleichung singulär. Die Eigenfunktionen des Elektrons werden aufgestellt.

Einleitung.

In der klassischen Elektrodynamik ist es möglich, magnetische Ströme und Ladungen einzuführen. Die magnetische Ladung transformiert sich bei Lorentz-Transformationen wie ein Pseudoskalar. Seien nun m und m die magnetische Strom- bzw. Ladungsdichte, so lauten die zugehörigen Maxwell'schen Gleichungen:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{H}} = - \frac{4\pi}{c} m, \quad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 4\pi m.$$

Diese lassen sich im allgemeinen nicht mehr durch Einführung von Potentialen:

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{A}}, \quad \mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$$

integrieren. In den Gleichungen der Wellenmechanik kommen aber diese Potentiale explicite vor. Nur ein statisches magnetisches Coulomb-Feld:

$$\mathfrak{H}_r = \frac{p}{r^2}, \quad \mathfrak{H}_\theta = \mathfrak{H}_\varphi = 0$$

kann durch ein Potential

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$$

beschrieben werden. Die zugehörige Ladung ist aber notwendig eine Punktladung, ein singulärer Magnetpol.

Nach dem Satz von STOKES gilt für eine geschlossene Fläche Σ und ein reguläres, eindeutiges Vektorfeld \mathfrak{A} :

$$\int_{\Sigma} \text{rot } \mathfrak{A} d\sigma = 0.$$

Andererseits ergibt die Integration über eine Kugel um den Nullpunkt:

$$\int \mathfrak{H}_r d\sigma = p \int \frac{1}{r^2} d\sigma = 4\pi p.$$

Daher ist das zugehörige Vektorpotential \mathfrak{A} entweder nicht regulär wie:

$$\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_\theta = 0, \quad \mathfrak{A}_\varphi = \frac{p}{r} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \quad (1)$$

was unendlich wird für $\theta = \pi$, oder nicht eindeutig wie:

$$\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_\varphi = 0, \quad \mathfrak{A}_\theta = -\frac{p}{r} \varphi \sin \theta.$$

In beiden Fällen gibt es singuläre Linien im Raum; denn auf jeder Fläche um einen einzelnen Magnetpol gibt es mindestens einen singulären Punkt. Im zweiten Fall ist er solcher Art, dass das Vektorpotential seinen Wert ändert, wenn man ihn umfährt. Diese singulären Linien kann man durch Umeichen des Vektorpotentials im Raume verschieben, aber ihre Endpunkte liegen fest in den Singularitäten des Feldes.

DIRAC¹⁾ ist bei seiner Begründung der Wellenmechanik der Magnetpole von der Betrachtung der Phase der ψ -Funktion ausgegangen. Die Phase braucht an sich keine eindeutige Ortsfunktion zu sein, da ihr keine direkte physikalische Bedeutung zukommt. DIRAC untersuchte, welcher Art die Mehrdeutigkeit sein könne, ohne den allgemeinen Formalismus der Wellenmechanik zu stören. Er zeigte, dass es im Raume Kurven gibt, auf denen die ψ -Funktion verschwindet (Knotenlinien) und auf welchen die Phase von ψ singulär sein kann: bei einem Umlauf um eine solche Kurve kann die Phase von ψ ihren Wert um einen festen (das heisst nur von der Kurve abhängigen) Betrag ändern. Diese Knotenlinien lassen sich durch Umeichen der Phase (resp. des Vektorpotentials) im Raume verschieben. Ihre Endpunkte liegen jedoch fest in den Singularitäten des elektromagnetischen Feldes, die sich als singuläre, quantisierte Magnetpole erweisen.

Anschliessend an diese Arbeit wurde von J. TAMM²⁾ die Bewegung eines Elektrons in einem magnetischen Coulomb-Feld untersucht.

Er bestimmte die Eigenfunktionen der zugehörigen Schrödinger-Gleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2i\mu}{1+\cos\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \mu^2 \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \right] \psi \right\} = E \psi. \quad (2)$$

Hier bedeutet μ die dimensionslose Zahl $\frac{ep}{\hbar c}$.

FIERZ³⁾ hat eine einfachere Form der Lösungen von (2) angegeben. Seine Herleitung stützt sich auf die Transformationseigenschaften des Problems bei Drehungen. Die Eigenfunktionen von (2) haben die Gestalt:

$$\psi_{l,m}(kr, \theta, \varphi) = \text{const.} \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{L+1/2}(kr) e^{i(m+\mu)\varphi} {}^\mu Y_{l,m}(\cos \theta). \quad (3)$$

Dabei ist $\hbar k$ der Betrag des Teilchenimpulses. $J_{L+1/2}$ ist die Besselfunktion mit dem Index $L+1/2 = \sqrt{(l+1/2)^2 - \mu^2}$.

Die ${}^\mu Y_{l,m}(\cos \theta)$ lassen sich wie folgt darstellen ($x = \cos \theta$):

$${}^\mu Y_{l,m} = (1+x)^{-\frac{(m-\mu)}{2}} (1-x)^{-\frac{m+\mu}{2}} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} [(1+x)^{l-\mu} (1-x)^{l+\mu}]$$

wobei m , μ und $l \geq \mu$ zugleich halb- oder ganzzahlig sind*).

In der vorliegenden Arbeit werden gewisse Besonderheiten dieser Eigenfunktionen an Hand eines speziellen Problems (Streuung an einem magnetisch geladenen Zentrum) hervorgehoben. In einem zweiten Teil werden die Transformationseigenschaften des Problems dazu benützt, um die zugehörige Diracsche Gleichung zu lösen.

I. Der magnetische Pol als Streuzentrum.

a) *Behandlung nach der Wellenmechanik.*

Wir betrachten das Problem der Streuung an einem magnetischen Teilchen, das wir uns als schwer gegen die gestreuten Partikel vorstellen. Die Differentialgleichung des Problems ist (2), wobei $\psi\psi^*$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens beschreibt, während der unendlich schwere Streuer im Nullpunkt ruht. Die Lösung, welche dieses Streuproblem beschreibt, setzt sich linear aus den Funktionen (3) zusammen. Wir werden die Konstanten so wählen, dass durch die Ebene $z = \infty$ ein homogener Teilchenstrom in der

*) Während l und m , wie üblich, dem Gesamtimpulsmoment und seiner z -Komponente zugeordnet sind, entspricht L dem Impulsmoment der Bewegung des Teilchens.

— z -Richtung fließt (diese Festsetzung ist bei der hier verwendeten Eichung des Potentials die einfachste). Es wird sich zeigen, dass diese Randbedingung sich so präzisieren lässt, dass die Konstanten dadurch völlig bestimmt werden.

Bei den meisten anderen Streuproblemen, bei denen das Potential nur vom Abstand r abhängt, führt das Verfahren von FAXÉN und HOLTSMARK (Z.S. f. Ph. 45, 307 (1927)) zum Ziel. Man nimmt dabei an, dass das Potential mit wachsendem r hinreichend rasch verschwindet, so dass sich die radialsymmetrischen Lösungen $\psi_l(kr, \cos \theta)$ asymptotisch wie

$$\frac{1}{kr} P_l(\cos \theta) \sin \left(kr - \frac{1}{2} \pi l + \delta_l \right)$$

verhalten. Macht man nun den Ansatz

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \psi_l(kr, \cos \theta), \quad (4)$$

so sind die C_l durch die Forderung bestimmt, dass ψ sich für grosse r wie:

$$e^{ikr \cos \theta} + \frac{1}{r} e^{ikr} f(\theta) + \dots \quad (5)$$

verhält; das heisst einer ebenen Welle soll sich eine Streuwelle überlagern, die nur auslaufende Kugelwellen $\sim \frac{1}{r} e^{ikr}$ enthält. Für C_l findet man bekanntlich:

$$C_l = (2l+1) i^l e^{i\delta_l}.$$

Dieses Verfahren ist nun bei unserem Problem nicht anwendbar, weil die Winkelabhängigkeit der Eigenfunktionen nicht durch Kugelfunktionen gegeben ist. Vielmehr kommen hier die achsensymmetrischen, normierten Funktionen:

$${}^{\mu}Y_{l,-\mu} = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \frac{1}{2^l (l+\mu)!} (1+x)^{\mu} \frac{d^{l+\mu}}{dx^{l+\mu}} [(x+1)^{l-\mu} (x-1)^{l+\mu}] \quad (6)$$

in Frage. Diese lassen sich jedoch nicht nach den $P_l(x)$ entwickeln; denn sie verschwinden alle für $x = -1$. Es ist auch nicht möglich, das Feld bei einem Radius r_0 abzuschneiden und für $r > r_0$ nach den $P_l(x)$ zu entwickeln; denn die Randbedingung an der Stelle $r = r_0$ kann dann nicht erfüllt werden. Infolgedessen kann man nicht verlangen, dass die Lösung die Form (5) haben solle; denn (5) ist stets nach den $P_l(\cos \theta)$ entwickelbar. Physikalisch hängt diese Schwierigkeit mit der Quantelung der Magnetpole zusammen, die ihrerseits damit zusammenhängt, dass durch die Überlagerung

des elektrischen und des magnetischen Feldes ein quantisiertes Impulsmoment um die Verbindungsrichtung der beiden Teilchen entsteht (s. FIERZ, l. c.).

Aus demselben Grunde können wir auch nicht im Sinne einer Bornschen Näherung das magnetische Feld als eine Störung behandeln. Denn die Eigenfunktionen hängen nicht stetig von der Polstärke p ab.

Gleichwohl können wir mit Hilfe eines Ansatzes der Form (4) zum Ziel gelangen, wenn wir bemerken, dass die Konstanten C_l in (4) auch durch folgende Bedingungen eindeutig festgelegt sind:

1. Die Funktionen ψ sollen im \vec{k} -Raum normiert sein, wobei \vec{k} die Wellenzahl des einfallenden Teilchens bedeutet.

2. Für $r \rightarrow \infty$ soll die Summe der einlaufenden Wellen sich als Funktion von θ wie $\delta(1 - \cos \theta)$ verhalten, wobei δ die Diracsche singuläre Funktion bedeutet.

Indem wir die bekannte asymptotische Entwicklung der Bessel-Funktionen verwenden, setzen wir für unsere Lösung ($r \rightarrow \infty$) gemäss (3)

$$\psi \sim -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\varrho} \sum_l C_l Y_l [e^{i(e-\frac{1}{2}L\pi)} - e^{-i(e-\frac{1}{2}L\pi)}].$$

Hier haben wir, abkürzend, Y_l für ${}^\mu Y_{l,-\mu}$ geschrieben; weiter ist $\varrho = kr$ und $L + \frac{1}{2} = \sqrt{(l + \frac{1}{2})^2 - \mu^2}$. Setzt man

$$\psi = u_0 + u,$$

so soll u_0 die Gesamtheit der einlaufenden, u die auslaufenden Wellen enthalten. Wir berechnen nun die C_l mit Hilfe unserer Forderungen 1 und 2:

Da die Y_l auf 1 normiert sind, folgt aus:

$$\sum_l |C_l| Y_l = \delta(1 - \cos \theta)$$

mit Hilfe von (5):

$$|C_l| = \int_0^{2\pi} \delta(1 - \cos \theta) Y_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta = Y_l(1) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}}.$$

Die Phase von C_l wird zu:

$$\text{Arg } C_l = -\frac{1}{2} L \pi$$

so dass unser Ansatz die Form annimmt:

$$\psi = \frac{K}{\sqrt{2}\varrho} \sum_{l=\mu}^{\infty} \sqrt{2l+1} e^{-\frac{1}{2}iL\pi} Y_l J_{L+\frac{1}{2}}(\varrho).$$

Die Konstante K ist durch die Normierung bestimmt. Sie lässt sich aber leichter auf andere Weise bestimmen. Sie ist ein Mass für die Intensität des einfallenden Stromes und hängt infolgedessen nur von einer beliebig kleinen Umgebung von $\theta = 0$ ab. Wir bestimmen zunächst in (6) die beiden ersten Terme der Entwicklung nach $(x-1) = v$:

$${}^{\mu}Y_{l,-\mu} = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \frac{1}{2^l (l+\mu)!} (v+2)^{\mu} \frac{d^{l+\mu}}{dx^{l+\mu}} [(v+2)^{l-\mu} v^{l+\mu}].$$

Die eckige Klammer lässt sich schreiben

$$2^{l-\mu} v^{l+\mu} + 2^{l-\mu-1} (l-\mu) v^{l+\mu+1} + \dots$$

woraus:

$${}^{\mu}Y_{l,-\mu} = \sqrt{\frac{2}{2l+1}} \left[1 + \frac{1}{2} lv + \dots \right].$$

In erster Annäherung verhalten sich alle ${}^{\mu}Y_{l,-\mu}$ mit verschiedenen μ gleich. Deshalb ist die Konstante K überall dieselbe. Für $\mu = 0$ ist aber ψ die ungestörte ebene Welle

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{l+\frac{1}{2}}(kr) P_l(\cos \theta) \quad (7)$$

wobei für die unnormierten P_l gilt

$${}^0Y_{l,0} = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l.$$

Darum wählen wir für K :

$$K = \sqrt{2\pi}.$$

Unser Ansatz wird endlich:

$$\psi = \sqrt{\frac{\pi}{\varrho}} \sum_{l=\mu}^{\infty} \sqrt{2l+1} e^{-\frac{1}{2}iL\pi} {}^{\mu}Y_{l,-\mu} J_{L+\frac{1}{2}}(\varrho)$$

und die auslaufende Welle:

$$u = -\frac{1}{\varrho} e^{i\varrho} \sum_{l=\mu}^{\infty} \sqrt{\frac{2l+1}{2}} e^{-iL\pi} {}^{\mu}Y_{l,-\mu}. \quad (8)$$

Für $\mu = 0$ ist $e^{-iL\pi} = (-1)^l$. Da weiter

$${}^0Y_{l,0}(-x) = (-1)^l {}^0Y_{l,0}(x)$$

ist die auslaufende Welle asymptotisch $\sim \delta(\pi - \theta)$, was zu erwarten war: es gibt keine Streuwelle.

Die θ -Abhängigkeit der auslaufenden Welle gemäss (8) ist unübersichtlich. Die Diskussion des Streuvorganges mit Hilfe der klassischen Mechanik (s. u.) zeigt aber, dass die Streuung im wesentlichen durch die Rutherfordsche Streuformel dargestellt wird. So liegt daher nahe, die auslaufende Welle mit einer Rutherfordschen Streuwelle

$$\psi = \frac{\text{const.}}{r(1+x)}$$

zu vergleichen. Wir entwickeln letztere nach den Y_l und beschränken uns auf ganzzahlige μ .

$$\frac{1}{x+1} = \sum_l c_l Y_l$$

$$c_l = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \frac{1}{2^l (l+\mu)!} \int_{-1}^{+1} (1+x)^{\mu-1} \frac{d^{l+\mu}}{dx^{l+\mu}} [(x+1)^{l-\mu} (x-1)^{l+\mu}] dx \quad (9)$$

$(\mu-1)$ -fache partielle Integration ergibt:

$$c_l = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \frac{(-1)^{\mu-1} (\mu-1)!}{2^l (l+\mu)!} \frac{d^l}{dx^l} [(x+1)^{l-\mu} (x-1)^{l+\mu}] \Big|_{-1}^{+1}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet an der oberen Grenze. Für die untere Grenze schreiben wir ($v = x+1$):

$$c_l = \left\{ \text{const.} \frac{d^l}{dv^l} [v^{l-\mu} (v-2)^{l+\mu}] \right\}_{v=0} = (-1)^{l+\mu} \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \frac{1}{\mu}$$

so dass die auslaufende Welle u sich schreiben lässt:

$$u = \frac{\mu}{\varrho} e^{i\varrho} \frac{1}{x+1} - i \sqrt{2} \sum_{l=\mu}^{\infty} \sqrt{2l+1} e^{-\frac{1}{2}i(l+L)\pi} \sin \frac{1}{2} (l-L) \pi \cdot Y_l. \quad (10)$$

Für grosse l ist:

$$L = \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \mu^2} - \frac{1}{2} \sim \left(l + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{l + \frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$$

und deshalb

$$\sin \frac{1}{2} (l-L) \pi \sim \frac{\mu^2}{2(2l+1)}.$$

Daraus ist ersichtlich, dass bei der Summe in (10) nur die kleinen l

eine Rolle spielen, denn die Faktoren der Y_l nehmen ab wie $\frac{1}{\sqrt{l}}$ *). Die Streuung ist also auch im wellenmechanischen Falle, ausser bei grossen Streuwinkeln, eine Rutherford-Streuung.

Dieses Ergebnis kann man besser verstehen, wenn man das Problem nach der klassischen Mechanik untersucht. Man zeigt dort leicht, dass die Partikel im Coulomb-Magnetfeld sich auf den geodätischen Linien eines raumfesten Kegels bewegen. Der Öffnungswinkel ϑ des Kegels ist durch

$$\cos \vartheta = - \frac{p}{\sqrt{b^2 v^2 + p^2}}$$

gegeben, wobei p die Polstärke, b den Minimalabstand des Teilchens zum Mittelpunkt und v die konstante Geschwindigkeit darstellen^{3) 4)}.

Wir suchen die Durchstosspunkte der Bahn mit einer grossen Kugel vor und nach der Streuung. Der feste Kegel sei längs der Bahnnormalen S aufgeschnitten (Fig.). Asymptotisch verhält sich die Bahn wie die zu ihr parallele Kegelerzeugende. Aus der Figur entnimmt man die folgenden Beziehungen:

$$\alpha = \frac{1}{2} \pi - n \gamma$$

$$\gamma = 2 \pi \sin \vartheta = \frac{2 \pi b v}{\sqrt{b^2 v^2 + p^2}}.$$

Auf dem Kegel gemessen ist der Winkel dieser zwei Erzeugenden:

$$2 \alpha = \left[1 - \frac{4 n b v}{\sqrt{b^2 v^2 + p^2}} \right].$$

Daraus errechnet man leicht mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie, dass für den Ablenkungswinkel ω :

$$\cos \omega = - \frac{p^2 + b^2 v^2 \cos \frac{\pi \sqrt{b^2 v^2 + p^2}}{b v}}{p^2 + b^2 v^2} \quad (11)$$

gilt.

*) Man kann mit Hilfe der DARBOUXSchen Methode (Journ. math. pures et appl. série 3, Bd. 4, S. 5—56) zeigen, dass für grosse l die ${}^\mu Y_{l, -\mu}$ sich wie

$$\sqrt{\frac{2l+1}{\pi(l+\mu) \sin \theta}} \cos \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right]$$

verhalten. Die hierzu notwendige erzeugende Funktion bekommt man nach POLYA-SZEGÖ, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. I, S. 127. Die ${}^\mu Y_{l, -\mu}$ lassen sich, bis auf einen Faktor $(1+x)^\mu$, als Jacobische Polynome darstellen deren erzeugende Funktion l. c. (S. 303) angegeben ist.

Wir betrachten nun einen homogenen Teilchenstrom, der durch die Ebene $z = \infty$ in der $-z$ -Richtung fortschreitet. Es sei in dieser Ebene b der Abstand des Durchstosspunktes der z -Achse vom betrachteten Teilchen (Stossparameter). Die Ablenkung eines Teilchens mit Stossparameter b ist durch die Formel (11) gegeben, denn wegen des Drehimpulssatzes sind Stossparameter und Mini-

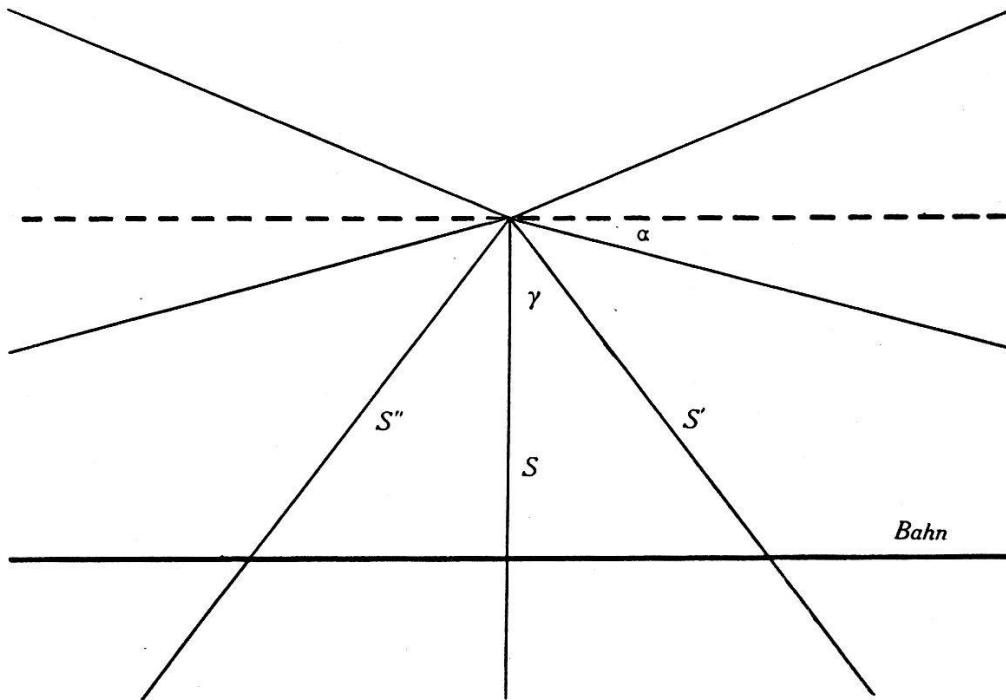


Fig. 1.

Die S sind die Bilder derselben Erzeugenden. S ist senkrecht zur Bahn. Im Raum ist asymptotisch die gestrichelte Erzeugende parallel zur Bahn.

malabstand des Teilchens vom Mittelpunkt einander gleich. Für grosse b -Werte ist angenähert:

$$\frac{\sqrt{b^2 v^2 + p^2}}{b v} \sim 1 \quad \text{und} \quad \cos \omega \sim - \frac{p^2 - b^2 v^2}{p^2 + b^2 v^2}.$$

Bei der Rutherford'schen Streuung gilt bekanntlich:

$$\text{ctg } \frac{1}{2} \omega = b v^2$$

wenn Masse und Ladung gleich 1 gesetzt werden; v bedeutet die Geschwindigkeit für $r = \infty$. Diese letzte Formel lässt sich auch schreiben:

$$\cos \omega = - \frac{1 - b^2 v^4}{1 + b^2 v^4}.$$

Also verhalten sich für kleine Ablenkungswinkel ($\cos \omega \sim 1$), $v = 1$ und $p = 1$ magnetische und elektrische Streuzentren gleich.

*

Man sieht jetzt die Bedeutung der einzelnen Terme in (10). Für kleine Streuwinkel ($\theta \sim \pi$, d.h. $\omega \sim 0$) hat man ziemlich genau Rutherfordsche Streuung, der erste Term überwiegt. Die Konvergenz der Reihe (9) ist schlecht, weil die Y_l für $\theta = \pi$ verschwinden; deshalb werden die c_l gross. Für grosse Streuwinkel ist klassisch der Faktor $\cos \frac{\pi \sqrt{\hbar^2 v^2 + p^2}}{b v}$ wesentlich: für $b \rightarrow 0$ schwankt $\cos \omega$ unendlich oft zwischen $-\frac{p^2 - b^2 v^2}{p^2 + b^2 v^2}$ und -1 . Diese Abweichungen der Rutherford-Streuung werden durch den zweiten Summanden in (10) beschrieben, für diesen Teil sind die Y_l mit kleinem l , d.h. die Teilchen mit kleinem Drehimpuls (resp. mit kleinem Stossparameter) massgebend. Es ist aber klar, dass für diesen Teil die Wellenmechanik etwas anderes liefern wird als die „geometrische Optik“, denn in der Nähe des Mittelpunktes sind die Bahnen stark gekrümmt. Wir werden jetzt untersuchen, wie genau die klassische Mechanik in diesem Fall die wellenmechanische Lösung wiedergibt.

Die allgemeine Methode (W.K.B.-Verfahren) ist folgende⁵⁾: man mache den Ansatz:

$$\psi = e^{\frac{i}{\hbar} S}$$

und entwickle S nach Potenzen von $\frac{\hbar}{i}$:

$$S = S_0 + \frac{\hbar}{i} S_1 + \dots$$

Es gilt dann für S die Hamilton-Jacobische partielle Differentialgleichung der Mechanik. Die Gleichung für S_1 erweist sich als Kontinuitätsgleichung für die Dichte $\varrho = e^{2S_1}$. In dieser Näherung verhalten sich die Wellenpakete genau wie eine Gesamtheit von Massenpunkten, die sich auf den klassischen Bahnen bewegen.

Die Näherung ist dann gut, wenn in allgemeinen Koordinaten⁵⁾ gilt:

$$g^{\kappa\lambda} \left(\frac{\partial S}{\partial q_\lambda} + A_\lambda \right) \left(\frac{\partial S}{\partial q_\kappa} + A_\kappa \right) \gg \frac{\hbar}{D} \frac{\partial}{\partial q_\kappa} D g^{\kappa\lambda} \left(\frac{\partial S}{\partial q_\lambda} + A_\lambda \right). \quad (12)$$

Das Linienelement hat die Form

$$ds^2 = g_{\kappa\lambda} dq_\kappa dq_\lambda,$$

die $g^{\kappa\lambda}$ bilden die zu $(g_{\kappa\lambda})$ reziproke Matrix und D ist $\sqrt{|g_{\kappa\lambda}|}$. Die Relation (12) bedeutet, dass S_{n+1} klein gegen S_n wird.

Die $\frac{\partial S}{\partial q_k}$ lassen sich aus den bekannten Integralen bestimmen zu:

$$P_r = \frac{\partial S}{\partial r} = mv \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}}$$

$$P_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \sqrt{m^2 b^2 v^2 - p^2 \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

$$P_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0.$$

Diese Funktionen setzen wir in (12') ein. Nach entsprechenden Kürzungen erhält man:

$$\begin{aligned} m^2 v^2 + p^2 \left[\frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} \right]^2 &\gg \\ &\gg \hbar \left\{ mv \frac{2 - \frac{b^2}{r^2}}{\sqrt{r^2 - b^2}} + \frac{p^2 - (m^2 b^2 v^2 + p^2) \cos \theta}{\sqrt{m^2 b^2 v^2 \sin^2 \theta - p^2 (1 - \cos \theta)^2}} \right\}. \end{aligned}$$

Die Darstellung ist offenbar schlecht, wenn $r = b$, das heisst, wenn das Teilchen möglichst nahe am Zentrum ist, und wenn:

$$m^2 b^2 v^2 \sin^2 \theta - p^2 (1 - \cos \theta)^2 = 0,$$

d. h.

$$\cos \theta = 1 \quad \text{und} \quad \cos \theta = \frac{p^2 - m^2 b^2 v^2}{p^2 + m^2 b^2 v^2}.$$

Diese letzte Bedingung sagt aus, dass die Näherung an den Stellen schlecht ist, wo $\omega(b)$ ein Extremum hat. Für diese θ -Werte ist für grosse r die Ablenkung gerade die doppelte Kegelöffnung ϑ . Dass dort die Näherung schlecht sein muss, ist leicht einzusehen: der differentielle Streuquerschnitt $d\Phi$ ist proportional $\frac{db}{d\omega}$, wobei über alle Zweige des mehrdeutigen $b(\omega)$ zu summieren ist. Wenn $\omega(b)$ ein Maximum hat, so hört ein Zweig auf beizutragen, und $d\Phi$ als Funktion von b hat eine Ecke, so dass Beugungserscheinungen auftreten. Es ist jedoch zu sagen, dass die Stellen, wo (12) nicht erfüllt ist, wegen der Quadratwurzel schmal sind. Das von der klassischen Mechanik gegebene Bild ist gut, vor allem für kleine Ablenkungswinkel.

II. Die Diracsche und die Paulische Gleichung.

Die bisher behandelte Schrödinger-Gleichung ist unrelativistisch. Die entsprechende Lorentzinvariante-Gleichung für das Einkörperproblem wurde von DIRAC aufgestellt. Dort ist die ψ -Funktion kein Skalar mehr, sondern ein Spinor mit vier Komponenten, das heisst, sie genügt einem bestimmten Transformationsgesetz bei Lorentz-Transformationen, insbesondere bei Drehungen. Im letzteren Fall transformieren sich die Komponenten paarweise unter sich. Bei nicht allzugrossen Geschwindigkeiten ist ein Paar gross gegen das andere. Man kann deshalb, bei Vernachlässigung von Termen mit höheren Potenzen der Lichtgeschwindigkeit im Nenner, aus der Diracschen Gleichung die Paulische Gleichung ableiten; letztere ist nur noch eine Beziehung zwischen den zwei grossen Spinorkomponenten.

Wir betrachten wieder ein magnetisches Coulomb-Feld, wobei das Zentrum im Ursprung liegt, und beschreiben es durch das Vektorpotential (1). Die Symmetrie des wellenmechanischen Problems wurde von FIERZ³⁾ untersucht. Obwohl nämlich das Feld drehinvariant ist, ist es das Vektorpotential nicht: übt man eine Drehung aus, so addiert sich zum Vektorpotential ein Gradient. Entsprechend wird die Eigenfunktion mit einem Phasenfaktor multipliziert, der bei der Bildung aller messbaren Grössen herausfällt. Die Hamiltonfunktion ist daher invariant gegen Drehung und anschliessende Umeichung. Entsprechend treten in den Operatoren der infinitesimalen Drehungen d_i zu μ proportionale Zusätze auf, die der zur infinitesimalen Drehung gehörigen infinitesimalen Umeichung entsprechen (FIERZ, l. c.).

Die d_i erfüllen unter sich die bekannten Vertauschungsrelationen:

$$d_x d_y - d_y d_x = i d_z, \dots$$

Die ${}^\mu Y_{l,m}$ bilden die zu den d_i gehörige Darstellung der Drehgruppe. Insbesondere folgt, dass wir die Y so auf 1 normieren können, dass

$$\begin{aligned} (d_x + i d_y) {}^\mu Y_{l,m} &= \sqrt{(l-m)(l+m+1)} {}^\mu Y_{l,m+1} \\ (d_x - i d_y) {}^\mu Y_{l,m} &= \sqrt{(l+m)(l-m+1)} {}^\mu Y_{l,m-1} \\ d_z {}^\mu Y_{l,m} &= m {}^\mu Y_{l,m} \end{aligned} \quad (14)$$

Die Diracsche ψ -Funktion ist in unserem Fall auch eine Darstellung der Drehgruppe⁶⁾ mit den d_i als Operatoren des Dreh-

*) Die der Gleichung (13) zugrundegelegte Normierung der ${}^\mu Y_{l,m}$ entspricht derjenigen bei VAN DER WAERDEN⁶⁾.

impulses. Die allgemeine Darstellungstheorie gibt uns die Mittel, einen Ansatz für ψ zu finden, so dass die partielle Differentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung in r zurückgeführt wird.

Jedes Komponentenpaar der ψ -Funktion bildet eine halbzahlige Darstellung der Drehgruppe. Wir können deshalb sofort den Winkelteil der Eigenfunktionen angeben.

Das Gesamtimpulsmoment j setzt sich aus dem räumlichen Teil l , den wir schon in der nichtrelativistischen Theorie hatten (er besteht aus Bahnimpuls und Feldimpuls), und aus dem Spin zusammen. Zu einem gegebenen j gibt es zwei Arten von Darstellungen, je nachdem der Spin parallel oder antiparallel zum räumlichen Impulsmoment steht. Nach VAN DER WAERDEN⁷⁾ sind die winkelabhängigen Bestandteile der Eigenfunktionen:

$$\begin{aligned} W_{m+\frac{1}{2}, l}^j &= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} -\sqrt{l-m} & Y_{l, m} \\ \sqrt{l+m+1} & Y_{l, m+1} \end{pmatrix} = W_{m+\frac{1}{2}, l}^{l-\frac{1}{2}} \\ W_{m+\frac{1}{2}, l-1}^j &= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \sqrt{l+m} & Y_{l-1, m} \\ \sqrt{l-m-1} & Y_{l-1, m+1} \end{pmatrix} = W_{m+\frac{1}{2}, l-1}^{l-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (15)$$

und als Ansatz werden wir eine lineare Kombination beider W^j mit Funktionen von r als Faktoren wählen.

Nun schreiben wir die vollständige Diracsche Gleichung auf. Sie lautet (für negativ geladene Teilchen):

$$\sum_{\mu=1}^4 \gamma^\mu \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} \Phi_\mu \right) \Psi - imc \Psi + \frac{M}{c} \sum_{\mu} \sum_{\nu} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \Psi = 0.$$

Es ist $x^4 = ict$. Die γ^μ sind vierreihige Matrizen, die den Relationen:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 \delta_{\mu\nu}$$

genügen. Das Glied mit M beschreibt ein für das Teilchen charakteristisches zusätzliches magnetisches Moment; dieses ist Null für Elektronen. $\Phi_{1,2,3}$ ist das Vektorpotential, $1/i \Phi_4$ das skalare Potential des Feldes $F_{\mu\nu}$. Es gilt also:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\nu}, \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}.$$

In unserem Falle sind (p = Polstärke):

$$\Phi_1 = -\frac{py}{r(r+z)}, \quad \Phi_2 = \frac{px}{r(r+z)}, \quad \Phi_3 = \Phi_4 = 0$$

$$\mathfrak{S}_1 = F_{23} = \frac{px}{r^3}, \quad \mathfrak{S}_2 = F_{31} = \frac{py}{r^3}, \quad \mathfrak{S}_3 = F_{12} = \frac{pz}{r^3}, \quad F_{i4} = 0.$$

Man macht wie üblich den Ansatz:

$$\Psi = \psi e^{-\frac{iE}{\hbar}t} = \psi e^{-\frac{E}{\hbar c}x^4}$$

wo $\psi = \psi(x, y, z)$ von t nicht abhängt. ψ genügt sodann der Gleichung:

$$i \left(\frac{E}{c} \gamma^4 - mc \right) \psi + \sum_{\mu=1}^3 \gamma^\mu \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} \Phi_\mu \right) \psi + \frac{M}{c} \sum_{\mu} \sum_{\nu} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi = 0.$$

Wir wählen für die γ^μ die Darstellung:

$$\gamma^\mu = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ -\sigma_\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \mu = 1, 2, 3. \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

wobei I die Einheitsmatrix und die σ_μ die gewöhnlichen Pauli-Matrizen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bedeuten, die die Relationen

$$\sigma_\mu^2 = I, \quad \sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i = i \sigma_k \quad (i, j, k \text{ zyklisch}) \quad (16)$$

erfüllen. Daraus folgt weiter

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = - \begin{pmatrix} \sigma_\mu \sigma_\nu & 0 \\ 0 & \sigma_\mu \sigma_\nu \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \sigma_\rho & 0 \\ 0 & \sigma_\rho \end{pmatrix} \\ (\mu, \nu, \rho = 1, 2, 3; \mu, \nu, \rho \text{ zyklisch}).$$

Wir setzen nun:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^s \\ \psi^a \end{pmatrix}$$

wobei ψ^s und ψ^a selbst zwei Komponenten haben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & + \left(\frac{E}{c} - mc \right) \psi^s - \sum_{\mu=1}^3 \sigma_\mu \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} \Phi_\mu \right) \psi^a - \frac{2M}{c} \sum_{\mu=1}^3 \sigma_\mu \mathfrak{S}_\mu \psi^s = 0 \\ & + \left(\frac{E}{c} + mc \right) \psi^a - \sum_{\mu=1}^3 \sigma_\mu \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} \Phi_\mu \right) \psi^s + \frac{2M}{c} \sum_{\mu=1}^3 \sigma_\mu \mathfrak{S}_\mu \psi^a = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Bei Spiegelungen ist ψ^s symmetrisch und ψ^a antisymmetrisch. Wir führen jetzt Polarkoordinaten ein. Dabei gilt für den Spinvektor:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sin \theta \cos \varphi + \sigma_2 \sin \theta \sin \varphi + \sigma_3 \cos \theta &= \sigma_r = \varepsilon \\ \sigma_1 \cos \theta \cos \varphi + \sigma_2 \cos \theta \sin \varphi - \sigma_3 \sin \theta &= \sigma_\theta \\ -\sigma_1 \sin \varphi + \sigma_2 \cos \varphi &= \sigma_\varphi \end{aligned} \quad (18)$$

Die Vertauschungsrelationen (16) werden:

$$\sigma_r \sigma_\theta = i \sigma_\varphi, \quad \sigma_\theta \sigma_\varphi = i \sigma_r, \quad \sigma_\varphi \sigma_r = i \sigma_\theta, \quad \sigma_r^2 = \sigma_\theta^2 = \sigma_\varphi^2 = 1. \quad (19)$$

Mit ε multipliziert nehmen die Gleichungen (17) die folgende Gestalt an:

$$\varepsilon \left(\frac{E}{c} - mc \right) \psi^s - \frac{\hbar}{i} \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i \sigma_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{i \sigma_\theta}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\mu \sigma_\theta}{r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right] \psi^s + \frac{2Mp}{cr^2} \psi^s = 0 \quad (20)$$

$$\varepsilon \left(\frac{E}{c} + mc \right) \psi^a - \frac{\hbar}{i} \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i \sigma_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{i \sigma_\theta}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\mu \sigma_\theta}{r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right] \psi^s - \frac{2Mp}{cr^2} \psi^a = 0.$$

Beachten wir, dass die Drehimpulsoperatoren sich schreiben lassen:

$$\begin{aligned} d_x &= i \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} - \mu \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \cos \varphi \\ d_y &= -i \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} - \mu \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \sin \varphi \\ d_z &= -i \frac{\partial}{\partial \varphi} - \mu, \end{aligned}$$

so zeigt eine leichte Rechnung mit Hilfe von (18) und (19), dass:

$$(\vec{\sigma}, \vec{d}) = -i \sigma_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i \sigma_\theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\mu \sigma_\theta}{\sin \theta} (1 - \cos \theta) - \mu \sigma_r.$$

Damit wird die Gleichung (20):

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\frac{E}{c} - mc \right) \psi^s - \frac{\hbar}{i} \left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{(\vec{\sigma}, d) + \mu \varepsilon}{r} \right] \psi^a + \frac{2Mp}{cr^2} \psi^s &= 0 \\ \varepsilon \left(\frac{E}{c} + mc \right) \psi^a - \frac{\hbar}{i} \left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{(\vec{\sigma}, d) + \mu \varepsilon}{r} \right] \psi^s - \frac{2Mp}{cr^2} \psi^a &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Wir müssen nur noch wissen, wie die einzelnen Operatoren auf die W^j wirken.

ε ist ein Skalar; denn es ist das Produkt des symbolischen Vektors $\vec{\sigma}$ mit dem Einheitsvektor. Die $W_{m+\frac{1}{2}, l-1}^j$ und die $W_{m+\frac{1}{2}, l}^j$ bilden zusammen ein vollständiges System: jedes Funktionenpaar lässt sich nach den W^j entwickeln. Das Produkt εW^j transformiert

sich wie W^j selbst, seine Entwicklung enthält also nur die beiden W^j . Es muss demnach gelten:

$$\begin{aligned} \varepsilon W_{m+\frac{1}{2}, l}^{l-\frac{1}{2}} &= a W_{m+\frac{1}{2}, l}^{l-\frac{1}{2}} + b W_{m+\frac{1}{2}, l-1}^{l-\frac{1}{2}} \\ \varepsilon W_{m+\frac{1}{2}, l-1}^{l-\frac{1}{2}} &= c W_{m+\frac{1}{2}, l}^{l-\frac{1}{2}} + d W_{m+\frac{1}{2}, l-1}^{l-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Die Koeffizienten hängen von m und von θ nicht ab. Wir bestimmen sie deshalb aus speziellen Werten der W , indem wir $m = l-1$, $\varphi = 0$ und $\cos \theta = 0$ (daher $\varepsilon = \sigma_1$) setzen.

Nun ist ($x = \cos \theta$)

$$\begin{aligned} {}^\mu Y_{l, l} &= \frac{1}{2^l} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(2l)!}{(l+\mu)!(l-\mu)!}} (1+x)^{\frac{l-\mu}{2}} (1-x)^{\frac{l+\mu}{2}} \\ {}^\mu Y_{l, l-1} &= \frac{1}{2^{l-1}} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(2l-1)!}{(l+\mu)!(l-\mu)!}} \frac{l x + \mu}{1-x^2} (1+x)^{\frac{l-\mu}{2}} (1-x)^{\frac{l+\mu}{2}}. \end{aligned}$$

Woraus mit

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2^l} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(2l)!}{(l+\mu)!(l-\mu)!}} \\ {}^\mu Y_{l, l}(0) &= B \quad {}^\mu Y_{l-1, l}(0) = 0 \\ {}^\mu Y_{l, l-1}(0) &= -\mu \sqrt{\frac{2}{l}} B \quad {}^\mu Y_{l-1, l-1}(0) = \sqrt{\frac{2}{2l+1} \frac{(l+\mu)(l-\mu)}{l}} B \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (23) bekommt man

$$\begin{aligned} a &= \frac{\mu}{l} & b &= \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{l^2}} \\ c &= \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{l^2}} & d &= -\frac{\mu}{l}. \end{aligned}$$

$(\vec{\sigma}, \vec{d})$ lässt sich mit Hilfe der Drehimpulsrelationen angeben:

$$\left(\vec{d} + \frac{1}{2} \vec{\sigma}\right)^2 = j(j+1) = l^2 - \frac{1}{4} = \vec{d}^2 + (\vec{d}, \vec{\sigma}) + \frac{3}{4}.$$

Also ist

$$(\vec{d}, \vec{\sigma}) = l^2 - 1 - d^2.$$

*) Die ${}^\mu Y_{l, m}$ gehören zum Spiegelungscharakter $(-1)^{l+\mu}$, und die $W_l^{l\pm\frac{1}{2}}$ daher auch. Der Pseudoskalar μ kehrt bei Spiegelungen sein Vorzeichen ebenfalls um. Man kann deshalb nicht, wie bei der Lösung der Diracschen Gleichung eines Elektrons im elektrischen Coulomb-Feld:

$$\varepsilon W_{m+\frac{1}{2}, l}^{l-\frac{1}{2}} = k W_{m+\frac{1}{2}, l-1}^{l-\frac{1}{2}}$$

schliessen, weil ε schiefssymmetrisch ist, sondern nur

$$\varepsilon W_{m+\frac{1}{2}, l}^{l-\frac{1}{2}} = k W_{m+\frac{1}{2}, l-1}^{l-\frac{1}{2}} + \mu k' W_{m+\frac{1}{2}, l}^{l-\frac{1}{2}},$$

wo k und k' gewöhnliche Konstanten sind.

Es gilt

$$\begin{aligned}\vec{d}^2 W_{m+\frac{1}{2}, l-1}^{l-\frac{1}{2}} &= l(l-1) W_{m+\frac{1}{2}, l-1}^{l-\frac{1}{2}} \\ \vec{d}^2 W_{m+\frac{1}{2}, l}^{l-\frac{1}{2}} &= l(l+1) W_{m+\frac{1}{2}, l}^{l-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}(\vec{\sigma}, \vec{d}) W_{m+\frac{1}{2}, l}^{l-\frac{1}{2}} &= -(l+1) W_{m+\frac{1}{2}, l}^{l-\frac{1}{2}} \\ (\vec{\sigma}, \vec{d}) W_{m+\frac{1}{2}, l-1}^{l-\frac{1}{2}} &= (l-1) W_{m+\frac{1}{2}, l-1}^{l-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

ψ^s und ψ^a sind Darstellungen der Drehgruppe; der allgemeinste Ansatz ist deshalb nach dem bisherigen:

$$\begin{aligned}\psi^s &= f_1(r) W_{m+\frac{1}{2}, l}^{l-\frac{1}{2}} + f_2(r) W_{m+\frac{1}{2}, l-1}^{l-\frac{1}{2}} \\ \psi^a &= f_3(r) W_{m+\frac{1}{2}, l}^{l-\frac{1}{2}} + f_4(r) W_{m+\frac{1}{2}, l-1}^{l-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Diesen setzen wir in die Diracsche Gleichung (21) ein und bringen in jeder Gleichung den Faktor der verschiedenen W zum Verschwinden. Das bedeutet, dass der symmetrische und der schiefsymmetrische Teil der Gleichung getrennt verschwindet. Das gibt:

$$\begin{aligned}\frac{\hbar}{i} f_1' &= \left(\frac{E}{c} + mc\right) \left(\frac{\mu}{l} f_3 + \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{l^2}} f_4\right) \\ &\quad - \frac{\hbar}{ir} \left[\left(l+1 - \frac{\mu^2}{l}\right) f_1 - \mu \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{l^2}} f_2\right] - \frac{2Mp}{cr^2} f_3 \\ \frac{\hbar}{i} f_2' &= \left(\frac{E}{c} + mc\right) \left(\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{l^2}} f_3 - \frac{\mu}{l} f_4\right) \\ &\quad - \frac{\hbar}{ir} \left[-\mu \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{l^2}} f_1 - \left(l-1 - \frac{\mu^2}{l}\right) f_2\right] - \frac{2Mp}{cr^2} f_4 \quad (24) \\ \frac{\hbar}{i} f_3' &= \left(\frac{E}{c} - mc\right) \left(\frac{\mu}{l} f_1 + \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{l^2}} f_2\right) \\ &\quad - \frac{\hbar}{ir} \left[\left(l+1 - \frac{\mu^2}{l}\right) f_3 - \mu \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{l^2}} f_4\right] + \frac{2Mp}{cr^2} f_1 \\ \frac{\hbar}{i} f_4' &= \left(\frac{E}{c} - mc\right) \left(\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{l^2}} f_1 - \frac{\mu}{l} f_2\right) \\ &\quad - \frac{\hbar}{ir} \left[-\mu \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{l^2}} f_3 - \left(l-1 - \frac{\mu^2}{l}\right) f_4\right] + \frac{2Mp}{cr^2} f_2.\end{aligned}$$

Das System (24) hat, wegen der Terme proportional M , für $r = 0$ eine starke Singularität. Es lässt sich leicht zeigen, dass, falls $M \neq 0$ ist, es keine Lösungen der Form:

$$f_i = r^{\alpha_i} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}^{(i)} r^{\nu}$$

gibt. Die f_i sind daher in diesem Falle nicht quadratintegrierbar. Das Glied mit M entspricht im unrelativistischen Grenzfall einem

(winkelabhängigen) Potential; d. h. es ist formell E durch $E - \frac{2 M p}{r^2}$ ersetzt. Das Teilchen besitzt ein zusätzliches Dipolmoment und wird vom Zentrum mit einer Kraft proportional $1/r^3$ angezogen resp. weggestossen, je nach der Richtung dieses Momentes. Dann ist aber kein stationärer Zustand mehr möglich; denn im Falle der Anziehung fällt das Teilchen in das Zentrum hinein.

Stationäre Zustände gibt es demnach nur für $M = 0$. Dies kann man als einen Grund betrachten, warum es keine magnetischen Teilchen gibt. Denn in Wirklichkeit ist für Protonen $M \neq 0$; diese haben ein Moment von 2,7 Kernmagnetonen. Sie könnten also nicht in „stabiler“ Wechselwirkung sein mit den singulären Magnetpolen.

Für $M = 0$ findet sich aber leicht ein Ansatz. Die beiden Gleichungen (21) unterscheiden sich nur im konstanten Faktor $E/c \pm mc$. Es liegt nahe

$$\psi^s = A \psi^a \quad \text{d. h.} \quad \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}$$

zu setzen; für

$$A = \sqrt{\frac{E + mc^2}{E - mc^2}}$$

gilt

$$\left(E' = \frac{E^2 - m^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \right)$$

$$f_1' = i\sqrt{E'} \left(\frac{\mu}{l} f_1 + \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{l^2}} f_2 \right) - \frac{l+1 - \frac{\mu^2}{l}}{r} f_1 + \frac{\mu}{r} \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{l^2}} f_2$$

$$f_2' = i\sqrt{E'} \left(\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{l^2}} f_1 - \frac{\mu}{l} f_2 \right) + \frac{\mu}{r} \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{l^2}} f_1 + \frac{l-1 - \frac{\mu^2}{l}}{r} f_2$$

sowie dasselbe System für f_3 und f_4 .

Das System lässt sich durch die Transformation:

$$\begin{aligned} f_1 &= \mu g_1 + \frac{1}{2l} g_2 \\ f_2 &= l \left(\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{l^2}} - 1 \right) g_1 + \frac{1}{2\mu} \left(\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{l^2}} + 1 \right) g_2 \end{aligned} \quad (25)$$

vereinfachen. Es gilt:

$$\begin{aligned} g_1' &= -\frac{1}{r} \left(\sqrt{l^2 - \mu^2} + 1 \right) g_1 + \frac{1}{2\mu^2} i\sqrt{E'} \left(\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{l^2}} \right) g_2 \\ g_2' &= -2i\sqrt{E'} l^2 \left(\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{l^2}} \right) g_1 + \frac{1}{r} \left(\sqrt{l^2 - \mu^2} - 1 \right) g_2 \end{aligned} \quad (26)$$

woraus nach kurzer Rechnung:

$$g_1'' - \frac{2}{r} g_1' + \left[E' - \frac{l^2 - \mu^2 + \sqrt{l^2 - \mu^2}}{r} \right] g_1 = 0$$

$$g_2'' - \frac{2}{r} g_2' + \left[E' - \frac{l^2 - \mu^2 - \sqrt{l^2 - \mu^2}}{r} \right] g_2 = 0.$$

Die g_i sind im wesentlichen Bessel-Funktionen:

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} J_{\sqrt{l^2 - \mu^2 + \sqrt{l^2 - \mu^2} + 1/4}}(\varrho)$$

$$g_2 = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} J_{\sqrt{l^2 - \mu^2 - \sqrt{l^2 - \mu^2} + 1/4}}(\varrho)$$

wo $\varrho = \sqrt{E'} r$.

Demnach ist die Lösung der Diracschen Gleichung:

$$\psi^s = \left[\mu J_{\sqrt{\lambda_1 + 1/4}}(\varrho) + \frac{1}{2l} J_{\sqrt{\lambda_2 + 1/4}}(\varrho) \right] W_l \quad (27)$$

$$+ \left[l \left(\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{l^2}} - 1 \right) J_{\sqrt{\lambda_1 + 1/4}}(\varrho) + \frac{1}{2\mu} \left(\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{l^2}} + 1 \right) J_{\sqrt{\lambda_2 + 1/4}}(\varrho) \right] W_{l-1}$$

wobei

$$\lambda_{1,2} = l^2 - \mu^2 \pm \sqrt{l^2 - \mu^2}$$

und die W_l durch (15) gegeben sind.

(Die zweite Lösung bekommt man durch Vertauschen von λ_1 und λ_2 und Ändern des Vorzeichens von $\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{l^2}}$).

Weiter ist

$$\psi^a = \sqrt{\frac{E - mc^2}{E + mc^2}} \psi^s.$$

Die eigentümliche Form der Lösung versteht man besser, wenn man die iterierte Diracsche Gleichung⁸⁾ löst. Diese zerfällt in zwei identische Systeme*) für ψ^s und ψ^a ; denn sie lautet:

$$\sum_{\nu=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{ie}{\hbar c} \Phi_\nu \right]^2 \psi + \frac{1}{2} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \frac{e}{i\hbar c} \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu} \psi + E' \psi = 0.$$

Sie lässt sich separieren durch

$$\psi = R(r) \Theta(\theta, \varphi)$$

*) In Abwesenheit eines elektrischen Feldes zerfällt die Diracsche Gleichung immer in zwei identische Gleichungen mit zwei Komponenten. Dann sind die Diracsche Gleichung und die Paulische Gleichung einander gleich. Man vergleiche z. B. die Gleichungen (7. 10) S. 303 und (8. 5) S. 305 im Artikel von H. BETHE Handbuch der Physik, XXIV₁.

und $\lambda_{1,2}$ ist dann der Eigenwert der Winkelgleichung. Für R bekommt man die Funktionen g_i , und Θ ist eine lineare Kombination der W , so dass in etwas anderer Form wieder die Lösungen (27) herauskommen. Was die iterierte Gleichung nicht liefern kann, ist der Faktor $\frac{\psi^s}{\psi^a}$.

Herzlichen Dank schulde ich Herrn Prof. M. FIERZ, unter dessen Leitung die vorliegende Arbeit entstanden ist.

Basel, Seminar für theoretische Physik.

Literatur.

- 1) P. A. M. DIRAC, Proc. Roy. Soc. London **133**, 60 (1931).
 - 2) J. TAMM, Zs. f. Phys. **71**, 141 (1931).
 - 3) M. FIERZ, Helv. Phys. Acta XVII, 27 (1944).
 - 4) H. POINCARÉ, C.R. **123**, 530 (1896₂).
 - 5) W. PAULI, Handb. d. Phys. XXIV₁, 166—169.
 - 6) Die allgemeine Darstellungstheorie der Drehgruppe findet sich z. B. in B. L. VAN DER WAERDEN, Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Springer (1932).
 - 7) Ebenda S. 70 und S. 100.
 - 8) W. PAULI, l. c. S. 232, Gl. III; für den Zusatz S. 233.
-