

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 26 (1953)
Heft: III-IV

Artikel: Contribution à l'étude des ondes superficielles et interfaciales
Autor: Mercier, Robert
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-112419>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Contribution à l'étude des ondes superficielles et interfaciales

par Robert Mercier (E. P. U. L., Lausanne).

(6 V 1953.)

§ 1.

L'existence dans les corps, même homogènes, d'une part d'énergie libre qui est proportionnelle à l'aire des surfaces qui les limitent entraîne la notion d'énergie et de tension superficielle H . On sait qu'une surface possédant une densité d'énergie se comporte comme une membrane dont la tension, isotrope, serait précisément égale à la densité d'énergie, ici H . De plus cette dernière, dans le cas de solutions liquides ou de suspension, dépend de la concentration superficielle en soluté ou micelles, ainsi que le montre la thermodynamique.

La théorie cinétique des fluides, délaissée pendant quelques décades, connaît un renouveau d'intérêt grâce à l'introduction de nouveaux points de vue; elle permet d'étudier plus en détail le mécanisme des phénomènes superficiels et de les relier directement à des grandeurs fondamentales atomiques ou moléculaires. Il en résulte aussi que le physicien expérimental s'intéresse tout autant que le physicochimiste ou le biochimiste à cet aspect du problème posé par les liquides.

Cette étude a pour but d'exposer une méthode de mesure où l'on utilise les outils que l'électronique a mis à disposition du laboratoire. Cette même méthode s'applique aussi à l'étude des tensions interfaciales, c'est-à-dire de l'énergie libre superficielle existant dans un système de deux liquides non miscibles en contact.

On a utilisé ici les propriétés des ondes capillaires se propageant autour d'un centre d'ébranlement à variation sinusoïdale dans le temps.

§ 2. Le côté mathématique du problème.

a) Les équations de départ.

Le problème des ondes superficielles se propageant à la surface de séparation d'un liquide et d'un gaz ressortit à l'hydrodynamique, et nous allons le traiter comme tel en admettant que le liquide soit parfait, c'est-à-dire incompressible et sans viscosité; il sera de plus homogène et pesant tandis que le gaz n'aura pour seul effet que celui d'exercer sur le liquide une pression constante. Cela revient à admettre pour le gaz une densité nulle.

On sait que la distribution des vitesses et des pressions dans le fluide parfait s'obtient par l'intermédiaire d'un potentiel des vitesses Φ à condition que le mouvement soit irrotationnel. Il s'agit de déterminer la distribution de ce potentiel dans le liquide et à sa surface. Or, l'hydrodynamique établit que, en tout point de son domaine de définition, Φ satisfait à l'équation de LAPLACE

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (1)$$

Il doit satisfaire, en plus, à des conditions aux limites spécifiques à chaque cas particulier. Comme la vitesse de déplacement est donnée par

$$\vec{u} = - \text{grad } \Phi \quad (2)$$

on devra avoir sur toute surface limitant le fluide

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0. \quad (3)$$

Par contre, une autre condition doit être satisfaite sur la surface déformable de séparation liquide-gaz. Pour l'exprimer, nous utilisons ici un système de coordonnées dont l'axe des z est vertical montant et dont l'origine est dans le plan d'équilibre. L'équation de BERNOULLI y devient

$$p + \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g z - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = C$$

et si l'on ne considère, comme c'est le cas ici, que les petits mouvements où u^2 peut être négligé, se simplifie en

$$p + \rho g z - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = C \quad (3)$$

où la constante C représente la pression constante exercée par le gaz. Or, la tension superficielle H provoque une discontinuité de pression à la surface et cette discontinuité est liée au laplacien de

l'expression de la cote z de celle-ci. Ce laplacien, dans le système de coordonnées cylindriques, vaut

$$\nabla_{z=0}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}$$

et il se simplifie lorsqu'on ne recherche que des solutions dans lesquelles le phénomène présente une symétrie de révolution autour de l'axe des z ; il se réduit alors à

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Dans ce dernier cas on obtient l'équation (4) à satisfaire en tout point de la surface $z = 0$

$$\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \rho \cdot g \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} - H \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Les équations (1), (2), (3) et (4) régissent alors la distribution du potentiel Φ , de la vitesse \vec{u} et de la pression p en tout point du liquide.

b) Recherche des solutions.

Nous imaginons le liquide contenu dans un bassin infiniment profond et infiniment étendu et nous nous bornons à étudier les mouvements périodiques, de pulsation ω et présentant la symétrie de révolution dont nous venons de parler. A cet effet, cherchons à séparer la fonction $\Phi(r, \vartheta, z, t)$ en produit de quatre fonctions, chacune ne dépendant que d'une variable et posons

$$\Phi(r, \vartheta, z, t) = A \cdot R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot Z(z) \cdot e^{i\omega t}. \quad (5)$$

De plus, imposons l'obligation de ne trouver à grande distance du centre $r = 0$ (où nous provoquons l'ébranlement) qu'une onde progressive.

Par la méthode bien connue de séparation des variables, on trouve la solution

$$\Phi = A \cdot H_0^{(2)}(kr) \cdot e^{kz} \cdot e^{i\omega t}. \quad (6)$$

où $H_0^{(2)}$ est la fonction de HANKEL de deuxième espèce (ou fonction de BESSEL de troisième espèce) définie par

$$H_0^{(2)}(kr) = J_0(kr) - i \cdot N_0(kr)$$

J_0 et N_0 étant les fonctions de BESSEL de première et seconde espèce et d'ordre zéro, bien connues dans les problèmes d'ondes cylindri-

ques. On trouve des tables de la fonction $H_0^{(1)}(kr)$ qui ne diffère de $H_0^{(2)}(kr)$ que par le signe de la partie imaginaire*). k est une constante à déterminer ultérieurement et A une constante d'intégration.

On remarque que la variable ϑ a disparu, mais c'est en vertu de la symétrie imposée au phénomène. L'expression plus générale contiendrait encore la fonction

$$e^{i \cdot m \cdot \vartheta}$$

intervenant en facteur de fonctions du type $H_m^{(2)}(kr)$ et l'on aurait à sommer relativement à l'entier m , de façon à obtenir une série de fonctions de HANKEL.

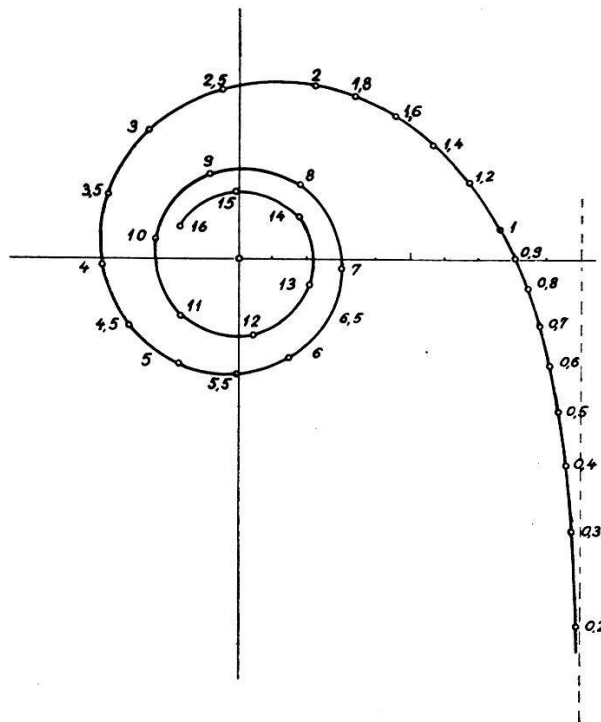


Fig. 1.

Représentation dans le plan complexe, de la fonction de HANKEL $H_0^{(1)}(kr)$ de première espèce.

Remarquons encore qu'à grande distance du centre, $J_0(kr)$ et $N_0(kr)$ prennent les valeurs asymptotiques

$$J(kr) \rightarrow \frac{2}{\sqrt{2\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$N(kr) \rightarrow \frac{-2}{\sqrt{2\pi kr}} \sin\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)$$

*) WATSON, Theory of Bessel Functions, Cambridge.

de sorte que Φ tend vers l'expression

$$\Phi(kr) \rightarrow A \cdot e^{kz} \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi kr}} \cdot e^{i(\omega t - kr + \frac{\pi}{4})}.$$

Cette dernière s'interprète comme une propagation d'onde radiale possédant une vitesse de phase

$$V = \omega/k$$

et dont l'amplitude présente, avec la distance croissante, une variation en

$$1/\sqrt{r};$$

de plus il apparaît un déphasage supplémentaire de $\pi/4$ (soit un huitième de période) sur la phase au centre. Ce résultat est analogue à celui dans la théorie des ondes optiques et connu sous le nom de théorème de STURM.

Enfin la constante k s'interprète à grande distance, comme étant le nombre d'onde $2\pi/\lambda$.

La table numérique donne le module et l'argument de la fonction $H(kr)$ qui est représentée graphiquement dans le plan complexe dans la figure 1.

Il reste à calculer la constante k . Pour cela, substituons dans l'équation (4) le valeur (6) du potentiel Φ . On obtient l'équation

$$A \cdot [-\omega^2 + gk + k^3 H/\rho] H_0^{(2)}(kr) \cdot e^{i\omega t} = 0.$$

Celle-ci devant être satisfaite pour toute époque et en tout point, il est nécessaire que la parenthèse s'annule, ce qui donne la relation

$$\omega^2 = gk + k^3 H/\rho$$

d'où l'on tire la vitesse de phase à l'infini

$$V \equiv \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{Hk}{\rho}}. \tag{7}$$

Ainsi l'on retrouve bien, à l'infini, pour la vitesse de phase la valeur bien connue, établie dans l'hypothèse d'ondes rectilignes, c'est-à-dire unidirectionnelles.

c) Cas de la tension interfaciale.

Lorsque deux liquides homogènes et pesants sont en contact selon un plan, une tension interfaciale existe, qui joue le même rôle dans les déformations superficielles que la tension H du problème précédent. Toutefois une différence essentielle réside dans le fait que

les densités des deux liquides sont, en général, différentes. Il y aura dans ce cas deux potentiels des vitesses

$$\Phi_1(r, \vartheta, z, t) \text{ et } \Phi_2(r, \vartheta, z, t)$$

définis chacun dans l'un des liquides. Tous deux satisfont à l'équation de LAPLACE dans son domaine respectif de définition

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_1 &= 0 \\ \nabla^2 \Phi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

A la surface de contact toutefois une relation supplémentaire

$$\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (8)$$

exprime qu'il n'y a ni cavitation, ni interpénétration des deux milieux.

A cette même surface, la loi de LAPLACE qui donne la valeur de la discontinuité de pression

$$p_1 - p_2 = H \cdot \Gamma$$

(où Γ est la mesure de la courbure totale de la surface) devient, en utilisant les coordonnées cylindropolaires r, ϑ, z ,

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + \rho_1 g \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - H \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \rho_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + \rho_2 g \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}, \quad (9)$$

On voit qu'elle ne diffère de l'équation (4) du problème précédent que par la valeur du second membre qui cesse d'être nul.

Sans donner de détail des calculs, on vérifie aisément que si nous imposons les mêmes conditions restrictives de symétrie et de dépendance du temps, que dans le problème précédent, les potentiels sont

$$\Phi_1 = A \cdot H_0^{(2)}(kr) \cdot e^{-kz} \cdot e^{i\omega t}$$

dans le liquide supérieur et (10a)

$$\Phi_2 = -A \cdot H_0^{(2)}(kr) \cdot e^{+kz} \cdot e^{i\omega t} \quad (10b)$$

dans le liquide inférieur.

La condition (9) imposée en $z = 0$ fournit l'équation

$$A \cdot H_0^{(2)}(kr) \left[-(\rho_1 + \rho_2) \omega^2 + (\rho_1 + \rho_2) g k + k^3 H \right] e^{i\omega t} = 0$$

qui, de nouveau ne peut être satisfaite que si la parenthèse est nulle, ce qui donne finalement la valeur

$$\omega^2 = gk + \frac{Hk^3}{\rho_1 + \rho_2}.$$

On en déduit, que, comme dans le cas des ondes superficielles, la célérité de phase V est donnée loin du centre par l'expression

$$V = \sqrt{g/k + \frac{Hk}{\rho_1 + \rho_2}}. \quad (11)$$

Cette expression ne diffère de la valeur (7) que par l'apparition au dénominateur, de la somme des densités. Il en résulte en particulier, que la même célérité d'onde serait obtenue dans le problème des ondes se propageant sur une membrane élastique de tension isotrope H , de densité négligeable et plongée dans un liquide de densité $(\rho_1 + \rho_2)/2$.

Il est intéressant de constater, même sans faire le calcul des composantes des vitesses u , que dans les deux cas traités seule une zone proche de la surface de discontinuité est le siège d'une perturbation sensible puisque les potentiels des vitesses présentent une extinction selon la loi

$$e^{-kz} \text{ pour } z > 0$$

$$e^{+kz} \text{ pour } z < 0.$$

La pénétration, estimée par l'inverse de k vaut, donc $\lambda/2\pi$ dans les deux milieux, c'est-à-dire qu'elle est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde.

§ 3. Méthode expérimentale.

Elle consiste à générer en un point de la surface libre (ou de la surface de séparation des deux liquides) une oscillation vertical de pulsation donnée et à mesurer directement, en fonction de la distance au centre, la *phase* du mouvement. La variation de cette phase est liée à la vitesse de phase V du phénomène et les équations (7) ou (11) permettent d'en déduire la tension superficielle dynamique H .

Deux générateurs ont été mis au point. L'un, qui n'est applicable qu'aux ondes superficielles en surface libre, consiste en un simple jet d'air dont le débit est modulé sinusoïdalement. Cette modulation est obtenue très simplement en pinçant le tuyau de caoutchouc dans un vibreur électromagnétique constitué par un électroaimant en fer

à cheval (excitateur de compteur électrique) dont le circuit magnétique est presque fermé par une armature mobile. Il est important que la source de courant d'excitation, dont la fréquence doit être

Table
de la fonction de HANKEL
(extraite de Watson, Theory of Bessel Functions)

$$H_0^1(kr)$$

kr	$H_0^{(1)}$	φ degrès	$\Delta\varphi$ radians	Vk/ω
0	0	- 90 00 00		
0,1	1,8300	- 56 58 11	0,57650	0,174
0,2	1,4660	- 47 31 05	0,16496	0,605
0,3	1,2679	- 39 32 54	0,13909	0,718
0,4	1,1356	- 32 15 09	0,12734	0,784
0,5	1,0384	- 25 20 43	0,12055	0,828
0,6	0,9628	- 18 41 22	0,11616	0,859
0,7	0,9016	- 12 12 32	0,11311	0,882
0,8	0,8507	- 5 51 23	0,11087	0,900
0,9	0,8075	+ 0 23 58	0,10919	0,914
1,0	0,7702	+ 6 34 46	0,10786	0,925
2	0,557	+ 66 19	1,04254	0,957
3	0,458	+ 124 36	1,01724	0,982
4	0,398	+ 182 27	1,00967	0,989
5	0,356	+ 240 04	1,00561	
6	0,325	+ 297 36	1,00415	
7	0,301	+ 355 03	1,00270	
8	0,282	+ 412 29	1,00240	
9	0,266	+ 469 52	1,00153	
10	0,252	+ 527 15	1,00153	
11	0,240	+ 584 36	1,00095	
12	0,230	+ 641 57	1,00095	
13	0,221	+ 699 18	1,00095	
14	0,213	+ 756 38	1,00066	
15	0,206	+ 813 58	1,00066	
16	0,199	+ 871 17	1,00037	
∞	0	∞	1,00000	1,000

variée à volonté, fournisse un courant sans distorsion; en effet, les ondes superficielles présentent une forte dispersion de vitesse (V dépend de ω) et toute harmonique de la loi excitatrice entrave la détermination précise de la phase fondamentale.

Le second générateur d'ondes est formé par un simple haut-parleur électrodynamique de petite dimension auquel on enlève la membrane et qui entraîne un petit plongeur formé d'un disque circulaire horizontal. Alimenté par du courant bien sinusoïdal, ce moteur peut aussi servir à exciter des ondes interfaciales.

Le récepteur ou *palpeur* superficiel est formé d'une tête de pic-up à cristal dans laquelle l'aiguille habituelle a été remplacée par un long levier d'aluminium plié, donc très léger, terminé par un flotteur. La longueur du levier est choisie de façon à adapter à la haute impédance mécanique du pic-up l'impédance très faible du plongeur actionné par les ondes du liquide.

Le flotteur est un petit cylindre de polythène (plastique synthétique à faible densité) de 2 à 3 millimètre de longueur, couché sur la surface étudiée.

On repère la phase de la vibration locale par le procédé des figures de LISSAJOU. Le balayage horizontal du spot d'un oscillographe cathodique est assuré par la tension d'alimentation du vibreur tandis que le balayage vertical est produit par la tension du pic-up, préalablement amplifiée. Pourvu que l'amplificateur ne produise pas de distorsion, le déphasage qu'il entraîne n'a pas d'importance pour des mesures relatives.

Lorsqu'on utilise le moteur à air modulé, la fréquence de modulation et celle des ondes produites, est double de celle du courant d'alimentation; il en résulte que les figures de LISSAJOU, dont l'expression mathématique est

$$\begin{aligned}x &= A \cos \omega t \\y &= B \cos (\omega t + \vartheta)\end{aligned}$$

comporte, comme cas particulier, la parabole caractéristique

$$y = 2 \frac{B}{A} x^2 - 1. \quad (\text{a})$$

Par contre, lors de l'emploi du vibreur électrodynamique, la figure de LISSAJOU est elliptique

$$\begin{aligned}x &= A \cos \omega t \\y &= B \cos \omega t + \vartheta\end{aligned}$$

et comporte comme cas particulier les segments de droite

$$x = \pm \frac{A}{B} \cdot y. \quad (\text{b})$$

Moteur et pic-up sont montés sur une sorte de machine à mesurer avec vis et tambour gradué qui permettent de déplacer le palpeur et de mesurer sa translation radiale au $1/100^{\text{e}}$ de millimètre. Lors de la translation, la figure à l'oscillographe change de forme et l'on retrouve les figures caractéristiques (a) ou (b) chaque fois que le déplacement vaut $\lambda/2$ (moteur à air), respectivement λ (moteur électrodynamique).

La détermination de H exige donc la détermination des densités, de la fréquence utilisée et la mesure de λ . Cette dernière peut être faite avec une bonne précision, car la translation peut compter au moins une dizaine de longueurs d'onde. Le tout constitue un bon travail pratique pour avancés.

§ 4. Quelques compléments mathématiques.

Chaque point de la surface étant animé d'un mouvement dépendant sinusoidalement du temps, on peut représenter le potentiel des vitesses Φ par un vecteur tournant de FRESNEL, dont l'expression est précisément

$$\Phi = A H_0^{(2)}(kr) e^{i\omega t}.$$

Désignant alors par φ l'argument de la fonction complexe $H_0^{(1)}(kr)$, Φ peut encore s'écrire

$$\Phi(r, t) = A |H_0^{(1)}(kr)| e^{i(\omega t - \varphi)}.$$

On voit alors que le retard de phase que présente le point à la distance r sur le mouvement au pôle est simplement donnée par la troisième colonne du tableau numérique, soit φ . Il peut également se lire sur la figure 1.

Dans la propagation de Φ le long d'un rayon, la vitesse locale de phase peut être définie par l'expression

$$1/V = \frac{1}{\omega} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{k}{\omega} \frac{d\varphi}{d(kr)}.$$

Comme ω et k sont des grandeurs constantes, fixées dans chaque type de propagation, le diagramme de la fonction $H_0^{(1)}$ permet le calcul de cette vitesse. En effet, on peut en première approximation remplacer les différentielles par des différences finies et poser

$$V = \frac{\omega}{k} \frac{\Delta\varphi}{\Delta(kr)}.$$

C'est ainsi qu'a été établie la cinquième colonne du tableau numérique qui donne le quotient, reporté à la fin de chaque intervalle,

de l'accroissement de kr (première colonne) par l'accroissement de l'argument φ (quatrième colonne). On obtient donc ainsi le quotient de la vitesse moyenne de phase dans l'intervalle, divisé par le rapport ω/k représentant, on l'a vu, la vitesse de phase asymptotique. La figure 2 reproduit le même résultat et l'on voit qu'il n'y a variation sensible de la vitesse de phase que dans les premières longueurs d'onde à partir du centre. Il n'est pas étonnant que cette vitesse de phase semble tendre vers zéro près de ce centre, puisque la densité d'énergie, comme le potentiel des vitesses, y devient infinie théoriquement.

A ce propos, il est évident que la solution trouvée ici ne s'applique pas en réalité autour du centre puisque sur une petite région l'entourant agit encore l'effort moteur produit par le vibreur.

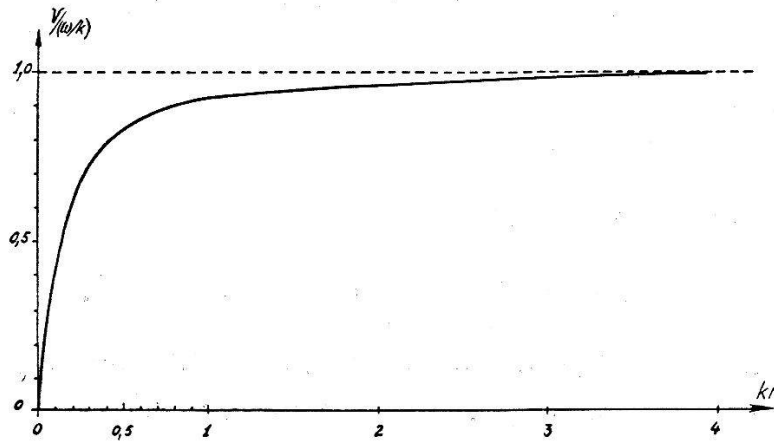


Fig. 2.

Variation de la vitesse de phase V en fonction de la distance au centre d'ébranlement. En ordonnée est reporté le quotient $V k/\omega$.

On peut encore rappeler quelques propriétés de la loi de dispersion de la vitesse de phase (7) ou (11).

Si la tension superficielle H peut être considérée comme indépendante de la fréquence et de l'amplitude (ce qui n'est pas le cas pour les solutions ou suspensions de substances superficiellement actives) la vitesse V présente un minimum pour

$$k_m = \sqrt{\frac{\rho g}{H}}$$

ainsi qu'un point d'inflexion pour

$$k_i = k_m \sqrt{3};$$

elle tend, pour de grandes valeurs de k (fréquences élevées), vers la forme asymptotique

$$V \rightarrow \sqrt{\frac{H}{\rho}} k.$$

Ainsi, à toute valeur possible de V correspondent deux valeurs de k , l'une, inférieure à k_m , qui appartient à des ondes de faible fréquence, dites ondes de gravité, et pour lesquelles la tension superficielle ne joue qu'un rôle négligeable, et l'autre, supérieure à k_m appartenant aux ondes dites capillaires essentiellement régies par la valeur de H . Si donc on désire mettre en évidence une variation de la valeur de H c'est dans ce dernier domaine qu'il conviendra d'opérer.

Pour des liquides dont la tension H est voisine de 50 dyne/cmètre et la densité proche de celle de l'eau, on aurait

$$k_m = 4,4 \text{ cm}^{-1} \quad \lambda_m = 1,4 \text{ cm}$$

$$V_m = 21 \text{ cm/sec}$$

qui correspond à la fréquence

$$\nu_m = 15 \text{ sec}^{-1} \quad \omega_m = 93,5 \text{ sec}^{-1}.$$

En opérant avec des fréquences supérieures à 50 sec^{-1} , on aura donc la plus grande sensibilité aux variations de H qui pourraient éventuellement se présenter dans une solution aqueuse.

Laboratoire de Physique technique E.P.U.L.
