

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 30 (1957)
Heft: V

Artikel: Bifluidmodell und Schallabsorbtion in Helium. II
Autor: Czaja, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-112826>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 30.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Bifluidmodell und Schallabsorption in Helium II

von W. Czaja.*)

(6. VI. 1957.)

Zusammenfassung. Es werden die Voraussetzungen des Bifluidmodells des Helium II nach PRIGOGINE und MAZUR erläutert sowie über Rechnungen berichtet, welche mit diesem Modell die Schwingungen von Helium II in einem Kugelresonator behandeln. Eigenfrequenzen und Absorptionskoeffizienten werden angegeben und die räumliche Verteilung der Geschwindigkeiten diskutiert.

Einleitung.

Der sogenannte superfluide Zustand des Helium, der bei Temperaturen $T \leq 2,186^\circ \text{K}$ auftritt, kann bis jetzt nicht zufriedenstellend gedeutet werden. Zwar darf heute als gesichert gelten, dass dieser Zustand mit der Kondensation des Bose-Einstein-Gases zusammenhängt, aber das Fehlen einer befriedigenden statistischen Theorie der Flüssigkeiten wird in absehbarer Zeit kaum mehr als diese Aussage zulassen.

Es ist daher als Fortschritt anzusehen, dass es vor einiger Zeit PRIGOGINE und MAZUR¹⁾ gelang, die makroskopische Theorie des Helium II in plausibler Weise auszubauen. Kürzlich ist als eine Anwendung der genannten phänomenologischen Theorie die Dämpfung akustischer Eigenschwingungen in einem mit Helium II gefüllten Kugelresonator behandelt worden²⁾. Die experimentelle Bestimmung des Frequenzganges der Absorptionsskoeffizienten scheint geeignet zu sein, die Relaxationszeit für die Einstellung des Gleichgewichts der Umwandlung von Normal- in Superfluid des Helium II zu bestimmen. Die Kenntnis dieser Relaxationszeiten wird ihrerseits Aufschlüsse über den Reaktionsmechanismus geben können.

Im folgenden wird über die Berechnung der Absorptionskoeffizienten berichtet und die in die Rechnungen eingehenden Voraussetzungen diskutiert. Unter Hinweis auf die ausführlichen Darstellungen in ²⁾ verzichten wir auf Einzelheiten der Rechnung.

*) Jetzige Adresse: Universität Basel, Abteilung für angewandte Physik der physikalischen Anstalt.

Bifluidmodell des Helium II.

Beim Bifluidmodell des Helium II handelt es sich um ein makroskopisches Modell, dem die Annahme zugrunde liegt, dass Helium II aus einer superfluiden und einer normalen Komponente besteht. Auf Helium II lässt sich dann die Thermodynamik binärer Mischungen anwenden. Dieses „Zwei-Komponenten-Modell“ des Helium II ist von DE GROOT, JANSEN und MAZUR³⁾ und von DE GROOT⁴⁾ ausführlich diskutiert worden.

Nach PRIGOGINE und MAZUR¹⁾ soll sich Helium II aber gleichzeitig auch durch ein „Zwei-Phasen-Modell“ beschreiben lassen*), derart, dass die einzelnen „Komponenten“ als selbständige, aber nicht räumlich getrennte „Phasen“ aufgefasst werden. Ihre thermodynamischen Funktionen sollen nur von der Temperatur und dem Partialdruck der einzelnen „Phasen“ abhängen und sich additiv aus den thermodynamischen Funktionen der einzelnen „Phasen“ zusammensetzen. Im folgenden werden wir nun das Modell, welches Helium II sowohl als „Zwei-Komponenten-“ als auch als „Zwei-Phasen-Mischung“ auffasst, als „Bifluidmodell“ bezeichnen. Die Einführung dieses Bifluidmodells begründet man wie folgt (vgl. ¹⁾ sowie die Diskussion der Voraussetzungen des Bifluidmodells in ²⁾): Erst mit dem Postulat der Gleichheit der beiden Darstellungen und mit der Annahme, dass der Impulsaustausch zwischen den Fluids sehr klein ist, lassen sich hydrodynamische Gleichungen für Helium II herleiten, die mit den experimentell bestätigten GORTERSchen Gleichungen⁶⁾ in allen wesentlichen Punkten übereinstimmen.

Thermodynamik des Bifluidmodells.

Zwischen der Normalfluid mit der Konzentration $(1 - \xi)$ und der Superfluid des Helium II nehmen wir eine Umwandlung $N \rightleftharpoons S$ an. ξ und T befolgen eine dem Experiment zu entnehmende Abhängigkeit $\xi = \xi(T)$, welche die Form $(1 - \xi) = (T/T_\lambda)^\sigma$ mit $\sigma \approx 5,37$ für $1,5^\circ \text{K} \leq T \leq T_\lambda$ besitzt. Der Einfachheit halber wird die schwache Druckabhängigkeit der λ -Temperatur vernachlässigt, d. h. $(\partial \xi / \partial p)_{T, A} = 0$ gesetzt.

Wir fragen nun nach den Beziehungen zwischen der (T, p, ξ) -Thermodynamik (binäre Mischung) des Helium II und der (T, p_n, p_s) -** Thermodynamik (Zwei-Phasen-Mischung), wobei uns besonders die Funktionen

$$p_n = p_n(T, p, \xi), p_s = p_s(T, p, \xi)$$

interessieren. Die gleichzeitige Gültigkeit der erwähnten Darstel-

*) Eine derartige Bemerkung findet sich bereits bei TISZA⁵⁾.

***) Der Index n bezieht sich auf die Normalfluid, s auf die Superfluid.

lungen für Helium II soll sich in der Gleichheit der Gibbsschen Potentiale ausdrücken

$$g'(T, p, \xi) = g(T, p_n, p_s). \quad (1)$$

Die mit ' gekennzeichneten partiellen Grössen beziehen sich auf die Mischung aus zwei Komponenten, die übrigen, spezifischen Grössen auf die Mischung aus zwei Phasen. Aus dem Differential von (1) folgert man $(\partial(p_n + p_s)/\partial p)_{T, \xi} = 1$, die Summe der Partialdrucke unterscheidet sich also vom Gesamtdruck nur durch eine Funktion in T und ξ . Man macht nun die weitergehende Annahme, dass sogar

$$p = p_n + p_s \quad (2)$$

gelten und ausserdem

$$(\partial p_\alpha / \partial T)_{p, \xi} = 0, \quad \text{für } \alpha = n \text{ oder } \alpha = s \quad (3)$$

erfüllt sein soll. Setzt man (3) für $\alpha = n$ voraus, so folgt aus (2) sofort, dass (3) auch für $\alpha = s$ gilt und umgekehrt. PRIGOGINE und MAZUR versuchen in ¹⁾ die Annahmen (2) und (3) durch die weitere Voraussetzung

$$\text{„Der Impulsaustausch zwischen den Fluids ist sehr klein“} \quad (4)$$

plausibel zu machen. Wir wollen auf eine derartige Begründung verzichten, bemerken aber bereits hier, dass (4) eine wesentliche Voraussetzung für die Ableitung der hydrodynamischen Gleichungen des Helium II ist.

Mit (1) bis (3) kann man zeigen, dass für

$$\begin{aligned} \text{die spez. Entropie} & \quad s_\alpha(T, p_\alpha) = s'_\alpha(T, p, \xi), \\ \text{die spez. Enthalpie} & \quad h_\alpha(T, p_\alpha) = h'_\alpha(T, p, \xi), \quad \alpha = n, s \\ \text{das spez. Gibbssche Potential} & \quad g_\alpha(T, p_\alpha) = \mu'_\alpha(T, p, \xi) \end{aligned}$$

gilt, wobei

$$\begin{aligned} s &= (1 - \xi) s_n + \xi s_s, & s' &= (1 - \xi) s'_n + \xi s'_s, \\ h &= (1 - \xi) h_n + \xi h_s, & h' &= (1 - \xi) h'_n + \xi h'_s, \\ g &= (1 - \xi) g_n + \xi g_s, & g' &= (1 - \xi) \mu'_n + \xi \mu'_s \end{aligned}$$

gesetzt wurde. Bezeichnet man mit A die chemische Affinität $A = \mu'_n - \mu'_s$, so erhalten wir die gesuchten Beziehungen zu

$$dp_n = (1 - \xi) dp + \varrho \xi (1 - \xi) \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} \right)_{T, p}, \quad dp_s = \xi dp - \varrho \xi (1 - \xi) \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} \right)_{T, p}. \quad (5)$$

In (5) wurde die aus $(\partial \xi / \partial p)_{T, A} = 0$ folgende Aussage $(\partial V / \partial \xi)_{T, p} = 0$ für das partielle Volumen $V = (1 - \xi) v'_n + \xi v'_s$ herangezogen.

Die hydrodynamischen Gleichungen des Helium II.

Bei der Ableitung der hydrodynamischen Grundgleichungen des Helium II verfährt man nun wie folgt: Nach den Methoden der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse werden die Bilanzen für die Masse, den Impuls, die innere Energie und die Entropie jeder Fluid aufgestellt und die phänomenologischen Beziehungen zwischen den „Kräften“ und „Strömen“ formuliert (vgl. z. B. ⁴⁾ und ⁸⁾). Die Verwendung der (T, p_n, p_s) -Thermodynamik gestattet die Einführung der Voraussetzung (4). Als Ergebnis erhält man hydrodynamische Gleichungen des Helium II, nach denen sich in einer ersten Näherung — d. h. bei Vernachlässigung sowohl des Einflusses der Umwandlung als auch der einer schwachen Reibung zwischen den Fluids, aber mit Berücksichtigung von innerer Reibung und Wärmeleitung — die Normalfluid unabhängig von der Superfluid bewegt. Das bedeutet, dass nicht nur wie in normalen binären Mischungen die Schwerpunktgeschwindigkeit reversibel ist (vgl. ⁴⁾), sondern auch die Relativgeschwindigkeit zwischen den Fluids. Dieser Unterschied zwischen bifluiden und normalen binären Mischungen ist die Ursache des Second Sound in Helium II (vgl. ¹⁾ ²⁾).

Mit den Beziehungen (5) lassen sich die so gewonnenen Gleichungen in eine Form bringen, die der Messung leichter zugänglich ist. Weitere Einzelheiten findet man in ¹⁾ und ²⁾, wobei besonders in ²⁾ eine konsequente Formulierung der phänomenologischen Ansätze gegeben wird. Wir zitieren die hydrodynamischen Gleichungen des Helium II im Hinblick auf unsere Anwendungen in akustischer Linearisierung

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} [(1-\xi) \mathbf{v}_n + \xi \mathbf{v}_s] &= -\frac{1}{\varrho} \text{grad } p + \left(\frac{4}{3} \nu + \mu\right) \text{grad div } \mathbf{v}_n \\
 &\quad - \nu \text{rot rot } \mathbf{v}_n, \\
 \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s] &= -s^* \text{grad } T - \text{grad } A + \frac{4/3 \nu + \mu}{1-\xi} \text{grad div } \mathbf{v}_n \\
 &\quad - \frac{\nu}{1-\xi} \text{rot rot } \mathbf{v}_n, \\
 \frac{\partial}{\partial t} \xi &= \xi(1-\xi) \text{div} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) + \frac{\alpha^*}{\varrho} A, \\
 (1 - B s^*) \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{\mathfrak{C}_0^2}{s^*} \text{div} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) - \frac{\gamma-1}{\alpha_A} \text{div} [(1-\xi) \mathbf{v}_n + \xi \mathbf{v}_s] \\
 &\quad - B \left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)_{T,p} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \Theta \text{div grad } T, \\
 K_A (p - p_0) &= \frac{1}{\varrho} (\varrho - \varrho_0) + \alpha_A (T - T_0), \\
 \text{ferner gilt} & \\
 A &= -s^* (T - T_0) + \left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)_{T,p} (\xi - \xi_0).
 \end{aligned} \right\} (6)$$

In diese Gleichungen wurde die aus $(\partial \xi / \partial p)_{T,A} = 0$ folgende Beziehung $\alpha_A = \alpha_\xi$ eingeführt, d. h., dass die thermische Ausdehnung im Reaktionsgleichgewicht (konstante Affinität) gleich der thermischen Ausdehnung im gehemmten Gleichgewicht (konstante Konzentration) ist. Ferner bedeuten:

$$B = \frac{T}{c_v} \left(\frac{\partial s}{\partial A} \right)_{T,p} = \frac{\mathfrak{C}_0^2}{\mathfrak{C}_\infty^2}, \mathfrak{C}_0^2 = \xi(1-\xi) \frac{T s^{*2}}{c_v} \text{ und } \mathfrak{C}_\infty^2 = -\xi(1-\xi) \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} \right)_{T,p}$$

die Geschwindigkeiten des Second Sound für niedrige ($\omega \rightarrow 0$) bzw. hohe ($\omega \rightarrow \infty$) Frequenzen, $c_T^2 = 1/K_A \varrho$ die isotherme Geschwindigkeit des normalen Schalls, $s^* = s_n - s_s$, c_v die spezifische Wärme des Helium II bei konstantem Volumen, $\gamma = c_p/c_v$, wobei c_v und c_p stets bei währendem Reaktionsgleichgewicht ($A = \text{const}$) zu nehmen sind, K_A die isotherme Kompressibilität im Reaktionsgleichgewicht, Θ die Temperaturleitfähigkeit des Helium II, $\nu = \nu_n$ die kinematische Zähigkeit der Normalfluid ($\nu_s = 0$) und schliesslich μ die kinematische Volumenviskosität der Normalfluid, in der wir uns den Einfluss möglicher Anregungsprozesse zusammengefasst denken. μ ist reell, solange die Relaxationszeiten der in μ enthaltenen Prozesse klein gegen die Dauer einer Periode der Schallwellungen sind (vgl. ⁹)). Der Koeffizient a^* hängt mit der Relaxationszeit τ der Umwandlung $N \rightleftharpoons S$ zusammen $\tau = -\frac{\varrho}{a^*} \frac{1}{(\partial A / \partial \xi)_{T,p}}$, während sich die Bedeutung von τ aus

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi = -\frac{1}{\tau} (\xi - \xi_0)$$

ergibt. Die letzte Beziehung folgt aus (6) für eine ruhende Bifluid bei konstantem T und p .

Im thermodynamischen Gleichgewicht gilt $A = A_0(T_0, p_0, \xi_0) = 0$ und diese Bedingung liefert die Gleichgewichtskonzentration ξ_0 als Funktion von T_0 und p_0 .

Die Ausbreitung ebener Schallwellen ist mit den Gleichungen (6) bereits früher untersucht worden, vgl. ²) und die dort angegebene Literatur.

Akustische Eigenschwingungen des Helium II in einem Kugelresonator.

Für die weitere Rechnung machen wir von zwei vereinfachenden Annahmen Gebrauch:

1. Die thermische Ausdehnung des Helium II ist gering, d. h. $\gamma - 1 = \frac{\alpha_A^2 T}{c_v \varrho K_A} = \varepsilon \ll 1$, so dass Glieder mit ε^2 vernachlässigbar sind. Die Messungen, vgl. ¹⁰), liefern für ε die Werte $2 \cdot 10^{-4} \ll \varepsilon \leq 1 \cdot 10^{-2}$ für $1,40^\circ \text{ K} \leq T \leq 2,183^\circ \text{ K}$.

2. Der Frequenzbereich wird durch die folgenden Ungleichungen

$$\frac{\xi}{1-\xi} \frac{\omega}{\mathfrak{C}_0^2} \left(\frac{4}{3} \nu + \mu \right) \ll 1, \quad \frac{\omega}{\mathfrak{C}_0^2} \Theta \ll 1$$

eingeschränkt, wobei $\mathfrak{C}_0^2/c_T^2 \ll 1$ und $\mathfrak{C}_0^2/\mathfrak{C}_\infty^2 \sim 1$ gilt²⁾. Diese Ungleichungen bedeuten bei vorgeschriebener Frequenz eine Beschränkung des ξ -Bereiches und damit ebenfalls der Temperatur. Die Grenzfälle $T = T_\lambda$ ($\xi = 0$) und $T \rightarrow 0$ ($\xi \rightarrow 1$) scheiden für unsere Betrachtungen aus. Der Temperaturbereich $T < 1,4^\circ \text{K}$ bleibt unseren Rechnungen auch noch aus anderen Gründen verschlossen. In diesem Bereich wird der Einfluss der Phononen auf die Schallausbreitung wesentlich, ihre mittlere freie Weglänge nimmt stark zu^{11) 2)}. Unter diesen Bedingungen ist die hier verwendete makroskopische Theorie nicht mehr anwendbar.

Wir fragen nun nach den Randbedingungen. Wenn wir zunächst von dissipativen Effekten absehen und damit auch keine zusätzliche Umwandlung $N \rightleftharpoons S$ an der Oberfläche zulassen, so kann man für die Normal- und die Superfluid des Helium II unabhängige Randbedingungen vorgeben, die genau so wie in der Hydrodynamik normaler Flüssigkeiten lauten werden.

Isolierung	Normalfluid	Superfluid
schallhart	$(\mathbf{v}_n)_{\text{normal}} = 0$	$(\mathbf{v}_s)_{\text{normal}} = 0$
schallweich	Amplitude von $p_n = 0$	Amplitude von $p_s = 0$

Auch bei Berücksichtigung der dissipativen Effekte erscheinen diese Randbedingungen vernünftig, jedenfalls solange wir keine zusätzliche Umwandlung an der Oberfläche annehmen. In jedem Fall sind die Randbedingungen durch das Verschwinden der tangentialen Geschwindigkeitskomponente der Normalfluid an der Oberfläche zu ergänzen $(\mathbf{v}_n)_{\text{tang}} = 0$. Zu diesen Forderungen tritt eine Bedingung für die Temperatur an der Oberfläche hinzu, für die wir die adiabatische Isolierung ($\partial T / \partial r = 0$ ansetzen*).

Die Methode der weiteren Rechnungen ist die übliche. Nach Abspalten eines Zeitfaktors werden die Lösungen der aus (6) entstehenden Differentialgleichungen für die Variablen \mathbf{v}_n , \mathbf{v}_s , T , p , ϱ , ξ gesucht, welche die Randbedingungen erfüllen. Dabei gestatten die am Anfang dieses Abschnittes angegebenen Beziehungen passende Entwicklungen anzusetzen. Als Ergebnis erhalten wir sowohl für

*) Es ist erwähnenswert, dass sich die Randbedingungen prinzipiell aus einem Variationsprinzip ablesen lassen sollten (vgl. z. B. A. SOMMERFELD, Vorlesungen Band 2).

den schallharten als auch den schallweichen Resonator je zwei Schwingungsformen, eine, die dem Normalen Schall und eine, die dem Second Sound entspricht.

Die Verhältnisse lassen sich anschaulich leicht überblicken, wenn wir im Moment von den dissipativen Effekten absehen, d. h. den sogenannten „Rayleighschen Fall“ betrachten: Der Normale Schall ist durch die Schwingungen der Schwerpunktgeschwindigkeit sowie durch die des Druckes gekennzeichnet, während die Relativgeschwindigkeit und die Temperaturamplitude nur als Folge der endlichen Wärmeausdehnung auftreten und merklich kleinere Werte annehmen. Beim Second Sound oszillieren im wesentlichen nur die Relativgeschwindigkeit und die Temperatur. Schwerpunktgeschwindigkeit und Druckamplitude sind eine Folge der thermischen Ausdehnung und daher klein. Das Verhältnis von Schwerpunkt- zu Relativgeschwindigkeit beim Second Sound liegt in der Grössenordnung von einem Prozent²⁾. Entsprechendes gilt für den Normalen Schall.

Wir kehren nun wieder zum allgemeinen Fall unseres mit Helium II gefüllten Kugelresonators zurück. $\omega_{i,k}$ sei eine Eigenschwingung mit den Indizes i, k , und $\alpha_{i,k}$ ist der Absorptionskoeffizient pro sec dieser Eigenschwingung. $\Omega_{i,k}$ ist eine Abkürzung für $\frac{n(n-1)}{\zeta_{i,k}^2 - n(n-1)}$, während $\zeta_{i,k}$ und $\eta_{i,k}$ durch $\psi'_k(\zeta_{i,k}) = 0$ bzw. $\psi_k(\eta_{i,k}) = 0$ bestimmt sind. Weiter bedeutet $\psi'_k(z) = \frac{\partial}{\partial z} \psi_k(z)$ und $\psi_k(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{k+\frac{1}{2}}(z)$.*) a ist der Radius des Kugelresonators und $c_s^2 = \gamma c_T^2$ die adiabatische Geschwindigkeit des Normalen Schalls.

a) Schallharter Resonator, Normaler Schall: Eigenfrequenzen

$$\omega_{i,k} = \zeta_{i,k} \frac{c_1}{a} \left(1 - \sqrt{\frac{\nu(1-\xi)}{2c_1 a \zeta_{i,k}}} \Omega_{i,k} \right), \quad \begin{matrix} c_1 \approx c_s & \omega \tau \ll 1, \\ c_1 \approx c_T & \omega \tau \gg 1. \end{matrix}$$

Absorptionskoeffizienten

$$\alpha_{i,k} = \frac{\omega_{i,k}^2}{2c_s^2} \left(\frac{4}{3} \nu + \mu \right) \left(1 + \frac{1}{1-\xi} \frac{\alpha_A}{s^*} \frac{1}{\gamma} \mathfrak{C}_0^2 \right) + \frac{\omega_{i,k}^2}{2c_s^2} \Theta \frac{\gamma-1}{\gamma} + \sqrt{(1-\xi)\nu} \frac{\sqrt{\omega_{i,k}}}{\sqrt{2}a} \Omega_{i,k}, \quad (7)$$

$$\alpha_{i,k} = \frac{\omega_{i,k}^2}{2c_T^2} \left(\frac{4}{3} \nu + \mu \right) \frac{\mathfrak{C}_\infty^2 - \mathfrak{C}_0^2}{\mathfrak{C}_\infty^2 \gamma - \mathfrak{C}_0^2} + \frac{\omega_{i,k}^2}{2c_T^2} \left(\frac{\mathfrak{C}_\infty^2}{\mathfrak{C}_\infty^2 \gamma - \mathfrak{C}_0^2} \right)^2 \Theta (\gamma-1) + \sqrt{(1-\xi)\nu} \frac{\sqrt{\omega_{i,k}}}{\sqrt{2}a} \Omega_{i,k}.$$

*) $J_\lambda(z)$ = Besselfunktion mit dem Parameter λ .

b) Schallharter Resonator, Second Sound: Eigenfrequenzen

$$\omega_{i,k} = \zeta_{i,k} \frac{c_2}{a} \left(1 - \frac{\xi}{1-\xi} \sqrt{\frac{\nu(1-\xi)}{2c_2 a \zeta_{i,k}}} \Omega_{i,k} \right), \quad \begin{array}{l} c_2 \approx \mathfrak{C}_0 \quad \omega\tau \ll 1, \\ c_2 \approx \mathfrak{C}_\infty \quad \omega\tau \gg 1. \end{array}$$

Absorptionskoeffizienten

$$\begin{aligned} & \omega\tau \ll 1 \\ \alpha_{i,k} &= \frac{\omega_{i,k}^2}{2\mathfrak{C}_0^2} \left(\frac{4}{3} \nu + \mu \right) \frac{\xi}{1-\xi} \left(1 + (1-\xi) \frac{\gamma-1}{\alpha_A} \frac{s^*}{\mathfrak{C}_0^2} \right) + \frac{\omega_{i,k}^2}{2\mathfrak{C}_0^2} \Theta \\ & \quad + \omega_{i,k}^2 \tau' \frac{\mathfrak{C}_\infty^2 - \mathfrak{C}_0^2}{2\mathfrak{C}_0^2} + \xi \sqrt{\frac{\nu}{1-\xi}} \frac{\sqrt{\omega_{i,k}}}{\sqrt{2a}} \Omega_{i,k}, \quad (8) \\ & \omega\tau \gg 1 \\ \alpha_{i,k} &= \frac{\omega_{i,k}^2}{2\mathfrak{C}_\infty^2} \left(\frac{4}{3} \nu + \mu \right) \frac{\xi}{1-\xi} + \frac{1}{\tau'} \frac{\mathfrak{C}_\infty^2 - \mathfrak{C}_0^2}{2\mathfrak{C}_\infty^2} + \xi \sqrt{\frac{\nu}{1-\xi}} \frac{\sqrt{\omega_{i,k}}}{\sqrt{2a}} \Omega_{i,k}, \\ & \quad \tau' = \tau \left(1 - \frac{\mathfrak{C}_0^2}{\mathfrak{C}_\infty^2} \right). \end{aligned}$$

c) Schallweicher Resonator, Normaler Schall: Eigenfrequenzen

$$\omega_{i,k} = \eta_{i,k} \frac{c_1}{a}, \quad \begin{array}{l} c_1 \approx c_s \quad \omega\tau \ll 1, \\ c_1 \approx c_T \quad \omega\tau \gg 1. \end{array}$$

Absorptionskoeffizienten

$$\begin{aligned} & \omega\tau \ll 1 \\ \alpha_{i,k} &= \frac{\omega_{i,k}^2}{2c_s^2} \left(\frac{4}{3} \nu + \mu \right) \left(1 + \frac{1}{1-\xi} \frac{\alpha_A}{s^*} \frac{1}{\gamma} \mathfrak{C}_0^2 \right) + \frac{\omega_{i,k}^2}{2c_s^2} \Theta \frac{\gamma-1}{\gamma}, \\ & \omega\tau \gg 1 \\ \alpha_{i,k} &= \frac{\omega_{i,k}^2}{2c_T^2} \left(\frac{4}{3} \nu + \mu \right) \frac{\mathfrak{C}_\infty^2 - \mathfrak{C}_0^2}{\mathfrak{C}_\infty^2 \gamma - \mathfrak{C}_0^2} + \frac{\omega_{i,k}^2}{2c_T^2} \left(\frac{\mathfrak{C}_\infty^2}{\mathfrak{C}_\infty^2 \gamma - \mathfrak{C}_0^2} \right)^2 \Theta (\gamma-1). \quad (9) \end{aligned}$$

d) Schallweicher Resonator, Second Sound: Eigenfrequenzen

$$\begin{aligned} \omega_{i,k} &= \eta_{i,k} \frac{\mathfrak{C}_0}{a} \left(1 - \frac{1}{a\mathfrak{C}_0} \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi} \frac{1}{\gamma} \Theta \left(\frac{4}{3} \nu + \mu \right)} \right), \quad \omega\tau \ll 1, \\ \omega_{i,k} &= \eta_{i,k} \frac{\mathfrak{C}_\infty}{a}, \quad \omega\tau \gg 1. \end{aligned}$$

Absorptionskoeffizienten

$$\begin{aligned} & \omega\tau \ll 1 \\ \alpha_{i,k} &= \frac{\omega_{i,k}^2}{2\mathfrak{C}_0^2} \frac{\xi}{1-\xi} \left(\frac{4}{3} \nu + \mu \right) \left(1 + (1-\xi) \frac{\gamma-1}{\alpha_A} \frac{s^*}{\mathfrak{C}_0^2} \right) + \frac{\omega_{i,k}^2}{2\mathfrak{C}_0^2} \Theta \\ & \quad + \omega_{i,k}^2 \tau' \frac{\mathfrak{C}_\infty^2 - \mathfrak{C}_0^2}{2\mathfrak{C}_0^2}, \\ & \omega\tau \gg 1 \\ \alpha_{i,k} &= \frac{\omega_{i,k}^2}{2\mathfrak{C}_\infty^2} \frac{\xi}{1-\xi} \left(\frac{4}{3} \nu + \mu \right) + \frac{1}{\tau'} \frac{\mathfrak{C}_\infty^2 - \mathfrak{C}_0^2}{2\mathfrak{C}_\infty^2}. \quad (10) \end{aligned}$$

Alle angegebenen Beziehungen folgen aus Reihenentwicklungen, die nur die in $\frac{\omega}{c_0^2} \left(\frac{4}{3} \nu + \mu \right)$, $\frac{\omega}{c_s^2} \left(\frac{4}{3} \nu + \mu \right)$ und $\frac{\omega}{c_0^2} \Theta$, $\frac{\omega}{c_s^2} \Theta$ linearen Terme enthalten. (7) und (8) gelten zudem nur für $k \lesssim 10$.

Die letzten Terme in (7) und (8) sind als Einfluss der Resonatoroberfläche auf die Dämpfung zu deuten, während die übrigen Terme den Anteil des Resonatorinneren an der Dämpfung darstellen²⁾. Das Fehlen des Oberflächeneinflusses auf die Dämpfung in (9) und (10) lässt sich anschaulich verstehen, da beim schallweichen Resonator bereits in Rayleighscher Näherung die Tangentialkomponenten von \mathbf{v}_n am Rande null sind. Die bei $\nu \neq 0$ hinzutretende Bedingung $(\mathbf{v}_n)_{\text{tang}} = 0$ wird daher, im Gegensatz zu den Verhältnissen beim schallharten Resonator, keinen wesentlichen Einfluss auf die Schwingungsverhältnisse mehr haben.

Auf die räumliche Verteilung der Geschwindigkeiten im Resonator wollen wir hier nicht näher eingehen. Aus den Rechnungen²⁾ entnehmen wir, dass die entsprechende Rayleighsche Verteilung den Schwingungszustand im Resonator im wesentlichen, d. h. bis auf eine kleine Randzone, beschreibt. Die Ausdehnung dieser Randzone sowie der Verlauf der Geschwindigkeiten in Randnähe sind in ²⁾ angegeben.

Abgesehen von den bereits erwähnten Schwingungszuständen a , b und c , d tritt sowohl beim schallharten als auch beim schallweichen Resonator je eine weitere Bewegungsform auf, die aber nicht gleichzeitig mit den bereits erwähnten bestehen kann. Diese Bewegungsform, an der nur die Normalfluid teil hat, ist das exponentielle Abklingen eines kompressionsfreien Anfangszustandes mit den Eigenlösungen

$$(\mathbf{v}_n)_{i,k} \sim \text{rot}(\mathbf{r} f_{i,k}) e^{-t/\tau_{i,k}}, \quad *) \tau_{i,k} = (1 - \xi) a^2 / \nu \eta_{i,k}^2,$$

f_{ik} bedeutet eine Lösung der Wellengleichung. Dieser Bewegungszustand weist keine Normalkomponente der Geschwindigkeit auf, bleibt somit von den Eigenschaften der Resonatorwand unbeeinflusst und tritt deshalb sowohl beim schallharten als auch beim schallweichen Resonator auf.

Abschliessend sollen noch einige Bemerkungen angefügt werden: Der „Resonanz-Fall“ $\omega\tau = 1$, d. h. der Grenzfall maximaler Absorption, lässt sich ebenfalls behandeln. Allerdings bietet die Ableitung geschlossener Ausdrücke Schwierigkeiten, weshalb auf die Darstellung verzichtet wurde und auf die allgemeineren Ausdrücke in ²⁾ verwiesen sei.

*) \mathbf{r} = Radiusvektor.

Die Rechnungen lassen erkennen, dass sich die Schallausbreitung in Helium II analog wie in normalen fluiden Medien verhält. Dies gilt besonders für die Unterschiede zwischen schallharter und schallweicher Isolation des Resonators, für den Einfluss der Oberfläche auf die Dämpfung, die Verteilung der Geschwindigkeiten und die Unterschiede zu den Rayleighschen Verhältnissen.

Endlich weisen wir darauf hin, dass die in unseren Rechnungen enthaltenen Parameter \mathfrak{C}_0 , \mathfrak{C}_∞ , c_T , ξ , s^* , ν , μ , τ , γ und Θ messbare Größen sind. Viskosität ν und Temperaturleitfähigkeit Θ können aus den in der Literatur beschriebenen Messmethoden ermittelt werden (vgl. z. B. 7)). \mathfrak{C}_0 , \mathfrak{C}_∞ , c_T , ξ , s^* und γ kann man aus Experimenten über das statische Verhalten des Helium II entnehmen, wobei nach den bisherigen Erfahrungen $(1 - \xi)s^* \approx s$, d. h. $s_s \approx 0$, gesetzt werden kann (vgl. 7)). Zur Bestimmung von τ und μ lassen sich Messungen der Schallabsorption heranziehen. Beim Vergleich der Messwerte mit der Rechnung sind die τ als verfügbare Parameter zu betrachten und die Konsistenz der Theorie hätte dann daraus zu folgen, dass sich die Werte von τ für alle Absorptionskoeffizienten als gleich erweisen.

Wie wir bereits erwähnten, würde die Kenntnis der Relaxationszeit Aussagen über die Umwandlung von Normal- in Superfluid zulassen.

Herrn Professor Dr. J. MEIXNER bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für viele klärende Diskussionen sehr zu Dank verpflichtet.

Herrn Professor Dr. E. BALDINGER und der Direktion der Firma Fr. Sauter AG. in Basel habe ich für ihr verständnisvolles Entgegenkommen während der Durchführung dieser Untersuchungen zu danken.

Literatur.

- 1) I. PRIGOGINE und P. MAZUR, *Physica* **17**, 661 (1951).
- 2) W. CZAJA, Dissertation, T. H. Aachen (1957).
- 3) S. R. DE GROOT, L. JANSSEN und P. MAZUR, *Physica* **16**, 691 (1950).
- 4) S. R. DE GROOT, *Thermodynamics of irreversible Proc.*, North Holland Publ. Co. Amsterdam 1951.
- 5) L. TISZA, *Phys. Rev.* **72**, 838 (1947).
- 6) C. J. GORTER, *Physica* **15**, 285 (1949).
- 7) J. G. DAUNT und R. S. SMITH, *Rev. Mod. Physics* **26**, 175 (1954).
- 8) J. MEIXNER, *Ann. d. Physik* (5) **43**, 244 (1943); *Zschr. phys. Chem. B* **53**, 235 (1943).
- 9) J. MEIXNER, *Colloqu. over ultrason. Trill.*, Brüssel 1951; *Zschr. f. Physik* **131**, 465 (1952).
- 10) K. R. ATKINS und M. H. EDWARDS, *Phys. Rev.* **97**, 1429 (1955).
- 11) R. B. DINGLE, *Advances in Physics* **1**, 111 (1952); K. R. ATKINS, *Advances in Physics* **1**, 169 (1952).