

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 33 (1960)
Heft: VIII

Artikel: Die Normalform einer komplexen Lorentztransformation
Autor: Jost, Res
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-113095>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Normalform einer komplexen Lorentztransformation

von Res Jost

E T H, Zürich

Zusammenfassung. Zwei komplexe Lorentztransformationen A und B heißen äquivalent, falls es zwei reelle Transformationen A_1 und A_2 in L_+^\uparrow derart gibt, dass $A = A_1 B A_2$. Die so definierten Äquivalenzklassen werden durch die Konstruktion einer Normalform für jede Klasse vollständig charakterisiert. Im letzten Paragraphen wird ein Satz bewiesen, der die Verbindung zu den Untersuchungen von BARGMANN, HALL und WIGHTMAN schafft.

§ 1. Einleitung

Die komplexen Lorentztransformationen spielen seit einiger Zeit eine bedeutende Rolle in denjenigen Arbeiten, die sich mit den Grundlagen der quantisierten Feldtheorien befassen¹⁾. Für den physikalisch interessanten Fall von vier Dimensionen ist es wohl am einfachsten, zur Analyse der komplexen Lorentzgruppe den bekannten Isomorphismus dieser Gruppe mit dem direkten Produkt von zwei speziellen linearen Gruppen in zwei Dimensionen auszunützen. Doch haftet dieser Methode besonders im Hinblick auf die Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen etwas Künstliches an. Wir geben deshalb im folgenden eine Analyse von komplexen Lorentztransformationen, bei der die Dimensionszahl nebensächlich ist. Es ist dabei das Ziel, die Analyse so zu leiten, dass die Verallgemeinerung der Resultate²⁾ von V. BARGMANN, D. HALL und A. WIGHTMAN auf allgemeine Dimensionszahlen evident wird. Das wesentliche Hilfsmittel wird in Form eines Satzes formuliert.

Im Hinblick auf diese Anwendung wird überall nur das Skalarprodukt

$$(x, y) = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - \dots - x^n y^n$$

in Betracht gezogen.

Der Hauptteil der Note besteht darin, für rein imaginäre*) Lorentztransformationen eine Normalform zu finden. Die zugehörigen Rechnungen unterscheiden sich wenig von denjenigen, die erforderlich sind, um die Normalform einer reellen Lorentztransformation zu gewinnen³⁾. Der Vollständigkeit halber sind sie aber trotzdem wiedergegeben.

*) Dieser Ausdruck erscheint nicht sehr glücklich, doch fiel es mir schwer, einen besseren zu finden.

Diese Note geht auf eine Anregung von F. J. DYSON und auf eine kritische Bemerkung von V. BARGMANN zurück. Ihnen beiden gilt auch hiefür mein freundschaftlicher Dank.

§ 2. Definitionen

1. Metrik

$$(x, x) = (x^0)^2 - \sum (x^k)^2 = x^T G x$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

2. Transponierte einer Matrix: M^T
Hermitesche Konjugierte: M^*
Komplex Konjugierte: $M' = M^{T*}$
3. Reelle Lorentztransformation $A: A^{-1} = G A^T G, A' = A$.
Einskomponente der reellen Lorentzgruppe: L_{\uparrow} .
 $A \in L_{\uparrow}$ hat die Determinante $+1$ und transformiert den Vorkegel $V_+ = \{x; x^0 > 0, (x, x) > 0\}$ in sich.
4. Komplexe Lorentztransformation $A: A^{-1} = G A^T G$
Einskomponente der komplexen Lorentzgruppe $L_+(C)$.
 $A \in L_+(C)$ hat die Determinante $+1$.
5. $M \in L_+(C)$ heisst rein imaginär, falls $M' M = 1$.
6. Äquivalenz zweier komplexer Lorentztransformationen: $A \sim B$, falls es $A_{1,2} \in L_{\uparrow}$ gibt, derart, dass $A = A_1 B A_2$.

Das Ziel der Untersuchung besteht darin, zu jeder der durch 6. definierten Äquivalenzklassen eine Normalform zu gewinnen. Dazu ist es nötig, zunächst eine Normalform für eine rein imaginäre Lorentztransformation zu suchen.

§ 3. Normalform einer rein imaginären Lorentztransformation

1. Die Wurzeln des charakteristischen Polynoms $\chi(\lambda) = \text{Det}(M - \lambda \cdot 1)$ (Eigenwerte)

a) Aus $\chi(\lambda) = 0$ folgt $\chi(\lambda^{-1}) = 0$. Das gilt für eine beliebige Lorentztransformation. Mit λ ist also auch λ^{-1} Eigenwert.

b) $\chi(\lambda)$ ist ein reelles Polynom, denn

$$\begin{aligned} \chi^*(\lambda) &= \text{Det}(M^* - \lambda \cdot 1) = \text{Det}(M'^T - \lambda \cdot 1) \\ &= \text{Det}((M^{-1})^T - \lambda \cdot 1) = \text{Det}(G(M - \lambda \cdot 1)G) = \chi(\lambda). \end{aligned}$$

Also sind die Eigenwerte von M entweder reell oder sie treten in konjugiert komplexen Paaren auf.

Im folgenden brauchen wir zwei triviale Lemmata:

Lemma 1:

α) Zwei reelle orthogonale Nullvektoren sind linear abhängig.

β) Falls ein komplexer Nullvektor x auf dem komplex konjugierten x' orthogonal steht, dann sind x und x' linear abhängig.

Lemma 2: Sei $Mx = \lambda x$ und $My = \mu y$, dann ist $(x, y) = \lambda\mu(x, y)$, also ist entweder $(x, y) = 0$ oder $\lambda\mu = 1$.

c) Falls λ ein komplexer Eigenwert von M ist, dann ist $\lambda^* = \lambda^{-1}$ also $|\lambda| = 1$.

Beweis: Aus $Mx = \lambda x$ folgt $Mx' = \lambda^{*-1}x'$. Nach Lemma 2 $(x, x) = (x, x') = 0$ also sind x und x' nach Lemma 1 linear abhängig und daher $\lambda^{*-1} = \lambda$.

Ausserdem kann x jetzt reell gewählt werden und desgleichen y , der Eigenvektor zu λ^{-1} . Es gilt $(x, x) = (y, y) = 0$, also ist $(x, y) \neq 0$ und bei passender Normierung $(x, y) = 1$.

Dann sind die Vektoren $\xi = 2^{-\frac{1}{2}}(x + y)$ und $\eta = 2^{-\frac{1}{2}}(x - y)$ orthogonal und normiert: $(\xi, \xi) = -(\eta, \eta) = 1$. Es kann also nur einen komplexen Eigenwert geben, und der durch $(M - \lambda 1)$ annihilierter Raum ist linear.

2. Das Auftreten von nicht linearen Elementarteilern

a) Zu einem komplexen Eigenwert $\lambda^* \neq \lambda$ gibt es nur lineare Elementarteiler.

Beweis: Sei

$$Mx = \lambda x \quad \text{und} \quad My = i\lambda x + \lambda y.$$

x kann reell gewählt werden gemäss 1c. Dann folgt

$$My' = i\lambda x + \lambda y'.$$

woraus $M(y' - y) = \lambda(y' - y)$. Es kann also auch y (das nur modulo x definiert ist) als reell vorausgesetzt werden. Nun folgt weiter neben $(x, x) = 0$ auch $(Mx, My) = \lambda^2(x, y)$, also $(x, y) = 0$ und $(My, My) = \lambda^2(y, y)$, also auch $(y, y) = 0$. Das ist nach Lemma 1 ein Widerspruch.

Folgerung: Es kann höchstens ein Paar von einfachen, konjugiert komplexen Eigenwerten geben.

b) Zu einem reellen Eigenwert $\lambda \neq \pm 1$ gibt es nur lineare Elementarteiler.

Beweis: Sei $\lambda^{-1} \neq \lambda = \lambda^*$ und

$$\begin{aligned} Mx &= \lambda x & My &= x + \lambda y \\ Mx' &= \lambda^{-1}x' & My' &= -\lambda^{-2}x' + \lambda^{-1}y'. \end{aligned}$$

Daraus $(x, x) = 0$, $(Mx', My) = \lambda^{-1}(x, x') + (x', y)$, also auch $(x, x') = 0$ und daher x und x' linear abhängig, was nur für $\lambda = \lambda^{-1}$ möglich ist.

c) Es gibt höchstens *einen* nichtlinearen Elementarteiler, der entweder zum Eigenwert $\lambda = +1$ oder $\lambda = -1$ gehört und nur auftritt, falls alle Eigenwerte reell sind. Ein solcher Elementarteiler ist 3. Grades.

Beweis: Sei $\lambda^2 = 1$ und

$$Mx = \lambda x \quad My = i\lambda x + \lambda y,$$

dann ist

$$Mx' = \lambda x' \quad My' = i\lambda x' + \lambda y'.$$

Nach b) ist $(x, x') = 0$. Ausserdem $(Mx, My) = i(x, x) + (x, y)$, also $(x, x) = 0$; x und x' sind linear abhängig. Daher kann x und ebenso y als reell vorausgesetzt werden. Schliesslich gilt $(My, My) = 2i(x, y) + (y, y)$, also ist auch $(x, y) = 0$. Nun sei x_1 ein weiterer Eigenvektor $Mx_1 = \mu x_1$, dann folgt, falls $\mu = \lambda$ ist, wie oben aus $(Mx_1, My) = i(x_1, x) + (x, y)$ auch $(x_1, x) = 0$. Das gilt aber nach Lemma 2 auch für $\mu \neq \lambda$.

Alle Eigenvektoren und y sind daher orthogonal zum Nullvektor x , spannen also mit y zusammen nicht den ganzen Raum auf. Der Elementarteiler muss also mindestens 3. Grades sein:

$$Mz = -\frac{1}{2}\lambda x + i\lambda y + \lambda z, \quad Mz' = -\frac{1}{2}\lambda x + i\lambda y + \lambda z'.$$

z kann wieder reell vorausgesetzt werden.

Es ist $(x, x) = 0$, $(x, y) = 0$ und $(x, z) + (y, y) = 0$. Ein Elementarteiler 4. Grades aber kann nicht vorkommen, denn aus

$$Mw = -\frac{1}{2}\lambda y + i\lambda z + \lambda w, \quad Mw' = -\frac{1}{2}\lambda y + i\lambda z + \lambda w'$$

folgt $(Mx, Mw) = i(x, z) + (x, w)$, also $(x, z) = 0$, und daraus nach oben $(y, y) = 0$, was mit $(x, x) = (x, y) = 0$ unverträglich ist.

Oben wurde darauf hingewiesen, dass alle übrigen Eigenvektoren auf x orthogonal sind. Sie spannen also einen rein raumartigen Raum auf. Nach 1c kann daher in diesem Fall kein komplexer Eigenwert vorhanden sein.

3. Die Normalform für M

a) Es tritt ein Paar komplexer Eigenwerte auf: $\lambda \neq \lambda^*$. Man führt im Raum zu (λ, λ^*) die Vektoren ξ und η aus 1c als Basis ein und setzt $\lambda = e^{i\varphi}$, dann lautet M in diesem Raum

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & i \sin \varphi \\ i \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = K_\varphi.$$

Im übrigen hat man nur reelle Eigenwerte und keine höheren Elementarteiler. Sei $\mu \neq \pm 1$ ein Eigenwert zum Eigenvektor x , dann gehört μ^{-1} zu x' . Im Raum zu (μ, μ^{-1}) führt man die reellen Vektoren

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & L_{\chi_1} & & \\ & & \dots & \\ & & & L_{\chi_k} \end{pmatrix} \quad (b_1)$$

auftreten.

Damit ist die gesuchte Normalform gefunden. Der Zusammenhang mit der Normalform einer reellen Lorentztransformation leuchtet unmittelbar ein.

Satz: Jede rein imaginäre Lorentztransformation M lässt sich durch ein $A \in L_{\dagger}^{\uparrow}$ gemäss $A^{-1} M A$ auf eine der drei Normalformen (a), (b) oder (c) transformieren.

§ 4. Die Normalform einer komplexen Lorentztransformation

Nun sei A eine komplexe Lorentztransformation, $A \in L_{+}(c)$. Wir bilden aus A die rein imaginäre Lorentztransformation

$$M = A'^{-1} A = GA^*GA = GR.$$

Offenbar ist $R^* = R$ und die hermitesche Form $x^* R x$ hat den Trägheitsindex von G . Bei einer reellen Lorentztransformation A transformiert sich R gemäss $A^* R A$. Der Trägheitsindex von R bleibt also erhalten. Nun sei M_0 die Normalform von M :

$$M_0 = A^{-1} M A, \quad A \in L_{\dagger}^{\uparrow},$$

$$R_0 = G M_0 = A^* R A.$$

Um die möglichen M_0 zu bestimmen, haben wir aus den Normalformen des vorigen Abschnittes diejenigen auszuwählen, für die R_0 den richtigen Trägheitsindex hat. Für die Trägheitsindices der verschiedenen Kästchen ergibt sich dabei:

$$K_{\varphi} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \varphi & i \sin \varphi \\ -i \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{mit dem Trägheitsindex } (+, -),$$

$$L_{\chi} \rightarrow \begin{pmatrix} -Ch\chi & -iSh\chi \\ iSh\chi & -Ch\chi \end{pmatrix} \quad \text{mit dem Trägheitsindex } (-, -),$$

$$\pm 1 \rightarrow \mp 1 \quad \text{mit dem Trägheitsindex } \mp.$$

Im Fall a) kommt daher nur in Frage

$$M_0 = \begin{pmatrix} K_{\varphi} & & & \\ & L_{\chi_1} & & \\ & & \dots & \\ & & & L_{\chi_k} \end{pmatrix} \quad (a_1),$$

oder

$$A \sim \begin{pmatrix} \tilde{K}_\tau^- & & & \\ & L_{\chi_1} & & \\ & & \dots & \\ & & & L_{\chi_k} \end{pmatrix} \text{ ungerade Dimension } \Lambda_1 \notin L_+^\uparrow,$$

wobei

$$L_\chi^- = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} L_\chi$$

und

$$\tilde{K}_\tau^- = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{K}_\tau$$

gesetzt ist.

§ 5. Eine Anwendung

Der folgende Satz bildet das eigentliche Hilfsmittel zum Beweis des ersten Lemmas in der Arbeit von D. HALL und A. WIGHTMAN²⁾.

Satz: Es sei $\zeta = \xi + i\eta$ und $\eta \in V_+$. Weiter sei

$$A = \begin{pmatrix} K_\varphi & & & \\ & L_{\chi_1} & & \\ & & \dots & \\ & & & L_{\chi_k} \end{pmatrix}, |\varphi| < \pi$$

und $\zeta(\varphi, \chi_1, \dots, \chi_k) = A(\varphi, \chi_1, \dots, \chi_k) \zeta = \xi(\varphi, \chi) + i\eta(\varphi, \chi)$.

Falls nun $\eta(\varphi, \chi_1, \dots, \chi_k) \in V_+$, dann ist auch $\eta(t\varphi, t\chi_1, \dots, t\chi_k) \in V_+$ für $0 \leq t \leq 1$.

Beweis: Es wird

$$\eta^0(\varphi) = \eta^0 \cos \varphi + \xi^1 \sin \varphi > 0$$

und

$$(\eta(\varphi, \chi), \eta(\varphi, \chi)) = A(\varphi) - \sum_n B_n(\chi_n) > 0$$

mit

$$A(\varphi) = (\eta^0 \cos \varphi + \xi^1 \sin \varphi)^2 - (\eta^1 \cos \varphi + \xi^0 \sin \varphi)^2$$

$$B_n(\chi_n) = (\eta^{2n} \operatorname{Ch} \chi_n + \xi^{2n+1} \operatorname{Sh} \chi_n)^2 + (\eta^{2n+1} \operatorname{Ch} \chi_n - \xi^{2n} \operatorname{Sh} \chi_n)^2.$$

Diejenigen Werte von φ , für welche sowohl $\eta^0(\varphi) > 0$ als auch $A(\varphi) > 0$ sind, bilden offenbar in $|\varphi| < \pi$ ein Intervall, dessen Länge kleiner ist als

π und das $\varphi = 0$ enthält. Der Mittelpunkt dieses Intervalls sei φ_0 . Es ist $|\varphi_0| < \pi/2$ und

$$A(\varphi) = \alpha^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0) - \beta^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0),$$

wobei auch $|\varphi - \varphi_0| < \pi/2$ ist.

Analog lässt sich auch $B_n(\chi_n)$ auf Diagonalform transformieren (abgesehen von Ausnahmefällen, die aber durch ein Stetigkeitsargument erledigt werden können):

$$B_n(\chi_n) = \alpha_n^2 Ch^2(\chi_n - \chi_n^0) + \beta_n^2 Sh^2(\chi_n - \chi_n^0).$$

Es ist also

$$(\alpha^2 + \beta^2) \cos^2(\varphi - \varphi_0) > \beta^2 + \sum \alpha_n^2 + \sum (\alpha_n^2 + \beta_n^2) Sh^2(\chi_n - \chi_n^0)$$

oder:

$$F(t) = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \cos(t\varphi - \varphi_0) - \sqrt{a^2 + \sum b_n^2 Sh^2(t\chi_n - \chi_n^0)}$$

ist für $t = 0$ und $t = 1$ (wegen $|\varphi_0| < \pi/2$ und $|\varphi - \varphi_0| < \pi/2$) positiv. Dabei wurde

$$a^2 = \beta^2 + \sum \alpha_n^2 \quad \text{und} \quad b_n^2 = \alpha_n^2 + \beta_n^2$$

gesetzt.

Nun ist aber $F(t)$ konvex, solange $\cos(t\varphi - \varphi_0) > 0$ ist, wie sich durch Ausrechnen der zweiten Ableitung ergibt:

$$F''(t) = -(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \varphi^2 \cos(t\varphi - \varphi_0) - G(t)$$

$$G(t) = [a^2 + \sum b_n^2 Sh^2(t\chi_n - \chi_n^0)]^{-3/2} G_1(t)$$

und

$$\begin{aligned} G_1(t) &= a^2 \sum \chi_n^2 b_n^2 (C_n^2 + S_n^2) \\ &+ (\sum b_n^2 S_n^2) (\sum \chi_n^2 b_n^2 S_n^2) \\ &+ \{(\sum b_n^2 S_n^2) (\sum \chi_n^2 b_n^2 C_n^2) - (\sum b_n^2 \chi_n S_n C_n)^2\}, \end{aligned}$$

welches offenbar nach der Schwarzschen Ungleichung positiv ist. Als Abkürzung wurde dabei $S_n = Sh(t\chi_n - \chi_n^0)$ und $C_n = Ch(t\chi_n - \chi_n^0)$ verwendet.

Also ist für $0 \leq t \leq 1$

$$F(t) \geq (1-t)F(0) + tF(1) \geq \text{Min}(F(0), F(1)),$$

andererseits aber für dasselbe t -Intervall

$$(\eta(t\varphi, t\chi), \eta(t\varphi, t\chi)) \geq [F(t)]^2,$$

wodurch der Satz bewiesen ist.

Literaturverzeichnis

- 1) A. WIGHTMAN, *Phys. Rev.* *101*, 860 (1956). – D. HALL und A. WIGHTMAN, *Mat-fys. Medd.* *31*, No. 5 (1957). – G. KALLÉN und A. WIGHTMAN, *Mat-fys. Skrifter* *1*, 6 (1958). – R. JOST, *Helv. Phys. Acta* *30*, 409 (1957). – N. BURGOYNE, *Nuovo Cimento* *8*, 607 (1958). – R. JOST, *W. Pauli Memorial Volume*, Interscience Press 1960.
- 2) D. HALL und A. WIGHTMAN, loc. cit.¹⁾.
- 3) E. WIGNER, *Annals of Math.* *40*, 149 (1939), p. 159 ff.