

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta

**Band:** 36 (1963)

**Heft:** I

**Artikel:** Theorie des Ladungs- und Energietransportes von heissen und kalten Ladungsträgern in inhomogenen Halbleitern

**Autor:** Sánchez, Manuel

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-113354>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Theorie des Ladungs- und Energietransportes von heissen und kalten Ladungsträgern in inhomogenen Halbleitern

von Manuel Sánchez

Mitteilung aus dem Institut für höhere Elektrotechnik der ETH in Zürich

(25. V. 62)

*Abstract.* The expressions for the current density and energy flux are derived, subject to the usual simplifying assumptions, in an inhomogeneous semiconductor for hot and cold carriers for the cases in which the change of energy of a carrier in a collision can be neglected. In the special case of the Maxwell-Boltzmann distribution it is shown that the Einstein relation is valid not only for the coefficients of the current density but also for coefficients introduced here to describe the energy flux.

## 1. Einleitung

Eine Übertragung der Theorie der Leitfähigkeit von H. A. LORENTZ<sup>1)</sup> und A. SOMMERFELD<sup>2)</sup> auf heisse Ladungsträger in homogenen, homöopolaren, isotropen Halbleitern wurde von E. M. CONWELL<sup>3)</sup> durchgeführt. Die abgeleitete Gleichung für die Beweglichkeit der Ladungsträger angewendet auf den Fall einer Maxwell-Boltzmannschen Verteilungsfunktion wurde später von E. M. CONWELL<sup>4)</sup> benutzt, um die Gitterbeweglichkeit von Elektronen und Löchern in homogenen Halbleitern als Funktion der elektrischen Feldstärke zu bestimmen, wobei für Germanium eine gute Übereinstimmung mit den gemessenen Werten gefunden wurde.

In den Sperrschichten von  $p$ - $n$ -Übergängen und Halbleiter-Metall-Kontakten fehlt die Homogenität und werden die Ladungsträger geheizt bzw. abgekühlt, so dass die bekannten Gleichungen für die Elektronen- und Löcherstromdichte, welche eine konstante Beweglichkeit und einen konstanten Diffusionskoeffizienten enthalten, nicht mehr gültig sind.

In der vorliegenden Arbeit werden ausgehend von der Boltzmannschen Gleichung die elektrische Stromdichte und die Wärmestromdichte in inhomogenen, homöopolaren, isotropen Halbleitern bestimmt, ohne irgendeine Annahme über die Verteilungsfunktion zu machen, damit die Ergebnisse für heisse und kalte Ladungsträger gültig sind. Bei der Anwendung auf den Fall einer Maxwell-Boltzmannschen Verteilungs-

funktion wird gezeigt, dass die Einsteinsche Beziehung sowohl für die Koeffizienten der elektrischen Stromdichte als auch für die hier eingeführten Koeffizienten der Wärmestromdichte gültig bleibt.

## 2. Einführung der Relaxationszeit

Es wird ein Halbleiterstück betrachtet, welches in der  $x$ -Richtung irgendwelche Inhomogenitäten des Materials (der Störstellen- und Ladungsträgerdichte) aufweisen möge. Das in dieser Richtung wirkende, zeitunabhängige elektrische Feld  $\mathbf{E}$  wird im allgemeinen mit  $x$  veränderlich sein. Senkrecht zur  $x$ -Achse dagegen soll kein Feld wirken und keine Inhomogenität vorhanden sein. Nach H. A. LORENTZ<sup>1)</sup> muss dann an jeder Stelle des Halbleiters für Elektronen die Boltzmannsche Gleichung

$$-\frac{eE}{m_n} \frac{\partial f}{\partial v_x} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} = b - a \quad (1)$$

erfüllt sein, wobei  $-e$  die Elektronenladung,  $E$  den Betrag von  $\mathbf{E}$ ,  $m_n$  die effektive Elektronenmasse,  $f$  die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion der Elektronen und  $v_x$  die  $x$ -Komponente der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  des Elektrons bedeuten. Ferner bedeuten  $2b(2\pi\hbar)^{-3}$  und  $2a(2\pi\hbar)^{-3}$  die Mengen der Elektronen, die pro Zeit- und Volumeneinheit des Phasenraumes durch Wechselwirkung mit den Gitterschwingungen oder Zusammenstöße mit den ionisierten Störstellen hinzugefügt bzw. entzogen werden. Dabei wird von den Zusammenstößen der Elektronen untereinander abgesehen.

Mit der Beschränkung auf homöopolare Halbleiter wird bei dem Übergang eines Elektrons von einem Zustand  $\mathbf{v}$  in einen anderen  $\mathbf{v}'$  oder umgekehrt die Energieänderung vernachlässigt. Weiter werden mit der Beschränkung auf ein isotropes Modell des Halbleiters die Oberflächen konstanter Energie im Geschwindigkeitsraum als kugelförmig angenommen, also wird  $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'| = v$  gesetzt, so dass in Kugelkoordinaten gilt<sup>5)</sup>:

$$b = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\mathbf{v}', \mathbf{E}) W(\mathbf{v}', \mathbf{v}) (m_n v d\alpha) (m_n v \sin\alpha d\beta), \quad (2)$$

$$a = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\mathbf{v}, \mathbf{E}) W(\mathbf{v}, \mathbf{v}') (m_n v d\alpha) (m_n v \sin\alpha d\beta), \quad (3)$$

wobei  $W(\mathbf{v}', \mathbf{v})$  und  $W(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  Parameter für die Übergangswahrscheinlichkeit eines Elektrons von  $\mathbf{v}'$  zu  $\mathbf{v}$  und umgekehrt,  $\alpha$  den Winkel zwischen  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{v}'$ ,  $\beta$  den Winkel zwischen der Ebene von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{v}$  und der Ebene von  $\mathbf{v}'$  und  $\mathbf{v}$  bedeuten. Ferner gilt<sup>5)</sup>:

$$W(\mathbf{v}', \mathbf{v}) = W(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = W(\alpha). \quad (4)$$

Nun wird mit H. A. LORENTZ<sup>1)</sup> angesetzt:

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{E}) = f_0(v, E) + f_1(v, E) \cos\vartheta \quad (5)$$

mit  $f_1 \ll f_0$  und  $\vartheta$  als Winkel zwischen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{v}$ . Analog ist dann:

$$f(\mathbf{v}', \mathbf{E}) = f_0(v, E) + f_1(v, E) \cos \vartheta', \quad (6)$$

wobei  $\vartheta'$  der Winkel zwischen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{v}'$  bedeutet.

Mit dem Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie

$$\cos \vartheta' = \cos \alpha \cos \vartheta + \sin \alpha \sin \vartheta \cos \beta \quad (7)$$

und mit der Definition<sup>5)</sup>

$$\frac{1}{\tau_n} = \int_0^\pi (1 - \cos \alpha) W(\alpha) (2 \pi m_n v \sin \alpha) (m_n v d\alpha) \quad (8)$$

für die Relaxationszeit  $\tau_n$  ergibt sich dann nach (2) bis (8):

$$a - b = \frac{v_x}{v} \frac{f_1}{\tau_n}. \quad (9)$$

Aus  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$  folgt andererseits:

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_x} = \frac{v_x}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (10)$$

Damit erhält man nach Einsetzen von (9) und (10) in (1):

$$\left( - \frac{e E}{m_n} \frac{\partial f_0}{\partial v} + v \frac{\partial f_0}{\partial x} \right) \frac{v_x}{v} = - \frac{f_1}{\tau_n} \frac{v_x}{v}. \quad (11)$$

Der Ansatz (5) ist also richtig, und man kann schreiben:

$$- \frac{e E}{m_n} \frac{\partial f_0}{\partial v} + v \frac{\partial f_0}{\partial x} = - \frac{f_1}{\tau_n}. \quad (12)$$

### 3. Die elektrische Stromdichte

Die Anzahl Zustände in einem Volumenelement des Phasenraumes ist<sup>5)</sup>:

$$ds = \frac{2 dV}{(2 \pi \hbar)^3} (m_n v d\vartheta) (m_n v \sin \vartheta d\varphi) v^{-1} d \left( \frac{1}{2} m_n v^2 \right), \quad (13)$$

wobei  $dV$  ein Volumenelement des betrachteten Halbleiterraumes und  $\vartheta, \varphi, v$  Kugelkoordinaten mit der Achse  $\vartheta = 0$  in der  $x$ -Richtung bedeuten. Es beträgt damit die Elektronenstromdichte:

$$J_n = \frac{-e}{dV} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty (v \cos \vartheta) f ds. \quad (14)$$

Da  $f_0$  wegen seiner Kugelsymmetrie zum Strom nichts beiträgt, ergibt sich dann nach Einsetzen von (5) und nachher (12) in (14):

$$\begin{aligned}
 J_n &= \frac{e}{3\pi^2} \left(\frac{m_n}{\hbar}\right)^3 \int_0^\infty \left(-\frac{eE}{m_n} \frac{\partial f_0}{\partial v} + v \frac{\partial f_0}{\partial x}\right) \tau_n v^3 dv = \frac{e}{3\pi^2} \left(\frac{m_n}{\hbar}\right)^3 \\
 &\times \left\{ \frac{eE}{m_n} \left(-[v^3 \tau_n f_0]_0^\infty + \int_0^\infty f_0 \frac{d(v^3 \tau_n)}{dv} dv\right) + \int_0^\infty v \frac{\partial f_0}{\partial x} v^3 \tau_n dv \right\} \\
 &= \frac{e}{3\pi^2} \left(\frac{m_n}{\hbar}\right)^3 \left\{ \frac{eE}{m_n} \int_0^\infty \frac{1}{v^2} \frac{d(v^3 \tau_n)}{dv} f_0 v^2 dv \right. \\
 &\quad \left. + \frac{d}{dx} \int_0^\infty v^2 \tau_n f_0 v^2 dv - \int_0^\infty v^2 \frac{\partial \tau_n}{\partial x} f_0 v^2 dv \right\}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Andererseits lautet die Elektronendichte:

$$n = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{m_n}{\hbar}\right)^3 \int_0^\infty f_0 v^2 dv \tag{16}$$

und definitionsgemäss die Beweglichkeit und der Diffusionskoeffizient der Elektronen:

$$\mu_n = \frac{e}{3m_n} \int_0^\infty \frac{1}{v^2} \frac{d(v^3 \tau_n)}{dv} f_0 v^2 dv \bigg/ \int_0^\infty f_0 v^2 dv = \frac{e}{3m_n} \left\langle \frac{1}{v^2} \frac{d(v^3 \tau_n)}{dv} \right\rangle, \tag{17}$$

$$D_n = \frac{1}{3} \int_0^\infty v^2 \tau_n f_0 v^2 dv \bigg/ \int_0^\infty f_0 v^2 dv = \frac{1}{3} \langle v^2 \tau_n \rangle. \tag{18}$$

Es folgt also aus (15) bis (18):

$$J_n = e n \mu_n E + e \frac{d(D_n n)}{dx} - \frac{e}{3} n \left\langle v^2 \frac{\partial \tau_n}{\partial x} \right\rangle. \tag{19}$$

Daraus ergibt sich für  $D_n = \text{const}$  und  $\partial \tau_n / \partial x = 0$  die bekannte Gleichung  $J_n = e n \mu_n E + e D_n dn/dx$ .

Für die Löcherstromdichte erhält man entsprechend:

$$J_p = e p \mu_p E - e \frac{d(D_p p)}{dx} + \frac{e}{3} p \left\langle v^2 \frac{\partial \tau_p}{\partial x} \right\rangle. \tag{20}$$

#### 4. Die Wärmestromdichte

Analog wie Gl. (14) und (15) für  $J_n$  ergibt sich für die von den Elektronen getragene Wärmestromdichte:

$$\begin{aligned}
 W_n = & \frac{m_n}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty v^2 (v \cos \vartheta) f ds = \\
 & - \frac{m_n}{6 \pi^2} \left( \frac{m_n}{\hbar} \right)^3 \int_0^\infty \left( - \frac{e E}{m_n} \frac{\partial f_0}{\partial v} + v \frac{\partial f_0}{\partial x} \right) \tau_n v^5 dv = - \frac{m_n}{6 \pi^2} \left( \frac{m_n}{\hbar} \right)^3 \\
 & \times \left\{ \frac{e E}{m_n} \int_0^\infty \frac{1}{v^2} \frac{d(v^5 \tau_n)}{dv} f_0 v^2 dv + \frac{d}{dx} \int_0^\infty v^4 \tau_n f_0 v^2 dv - \int_0^\infty v^4 \frac{\partial \tau_n}{\partial x} f_0 v^2 dv \right\} \quad (21)
 \end{aligned}$$

und mit Einführung der Koeffizienten

$$\mu_n^W = \frac{e}{3 m_n \langle v^2 \rangle} \left\langle \frac{1}{v^2} \frac{d(v^5 \tau_n)}{dv} \right\rangle, \quad (22)$$

$$D_n^W = \frac{1}{3 \langle v^2 \rangle} \langle v^4 \tau_n \rangle \quad (23)$$

folgt ferner

$$W_n = - \frac{m_n}{2} \langle v^2 \rangle n \mu_n^W E - \frac{m_n}{2} \frac{d(\langle v^2 \rangle D_n^W)}{dx} + \frac{m_n}{6} n \left\langle v^4 \frac{\partial \tau_n}{\partial x} \right\rangle \quad (24)$$

und entsprechend für die Löcher:

$$W_p = \frac{m_p}{2} \langle v^2 \rangle p \mu_p^W E - \frac{m_p}{2} \frac{d(\langle v^2 \rangle D_p^W)}{dx} + \frac{m_p}{6} p \left\langle v^4 \frac{\partial \tau_p}{\partial x} \right\rangle. \quad (25)$$

## 5. Anwendung auf den Fall einer Maxwell-Boltzmannschen Verteilung

Wenn  $f_0$  durch eine Maxwell-Boltzmannsche Verteilungsfunktion

$$f_0 = A \exp \left( - \frac{m_n v^2}{2 k T_n} \right) \quad (26)$$

approximiert werden kann, haben die Elektronen eine definierte Temperatur  $T_n$ , welche im allgemeinen von der Gittertemperatur verschieden sein wird. Aus (26) erhält man dann:

$$\frac{\partial f_0}{\partial v} = - \frac{m_n}{k T_n} v f_0 \quad (27)$$

und damit aus (15) und (21):

$$J_n = \frac{e}{3 \pi^2} \left( \frac{m_n}{\hbar} \right)^3 \left\{ \frac{e E}{k T_n} \int_0^\infty v f_0 \tau_n v^3 dv + \frac{d}{dx} \int_0^\infty v^2 \tau_n f_0 v^2 dv - \int_0^\infty v^2 \frac{\partial \tau_n}{\partial x} f_0 v^2 dv \right\}, \quad (28)$$

$$W_n = - \frac{m_n}{6 \pi^2} \left( \frac{m_n}{\hbar} \right)^3 \left\{ \frac{e E}{k T_n} \int_0^\infty v f_0 \tau_n v^5 dv + \frac{d}{dx} \int_0^\infty v^4 \tau_n f_0 v^2 dv - \int_0^\infty v^4 \frac{\partial \tau_n}{\partial x} f_0 v^2 dv \right\}. \quad (29)$$

Die Koeffizienten der Gleichungen (19) und (24) vereinfachen sich also zu:

$$\mu_n = \frac{e}{3 k T_n} \langle v^2 \tau_n \rangle, \quad (30)$$

$$\mu_n^W = \frac{e}{3 k T_n} \frac{m_n}{3 k T_n} \langle v^4 \tau_n \rangle, \quad (31)$$

$$D_n^W = \frac{1}{3} \frac{m_n}{3 k T_n} \langle v^4 \tau_n \rangle. \quad (32)$$

Der Koeffizient  $D_n$  bleibt dagegen unverändert. Damit ergibt sich die Einsteinsche Beziehung für die Koeffizienten  $\mu_n$  und  $D_n$  bzw. für  $\mu_n^W$  und  $D_n^W$ :

$$D_n = \frac{k T_n}{e} \mu_n, \quad (33)$$

$$D_n^W = \frac{k T_n}{e} \mu_n^W. \quad (34)$$

Für die Löcher erhält man entsprechend ähnliche Gleichungen. Schliesslich kann man auch die Gleichungen (24) und (25) vereinfachen, indem man  $\langle v^2 \rangle = 3 k T_n / m_n$  bzw.  $\langle v^2 \rangle = 3 k T_p / m_p$  berücksichtigt.

Der Autor möchte Herrn Prof. Dr. M. J. O. STRUTT, Vorstand des Instituts für höhere Elektrotechnik der Eidg. Technischen Hochschule in Zürich, für die vielseitige Förderung der vorliegenden Arbeit seinen Dank aussprechen. Diese Arbeit wurde ermöglicht durch einen Kredit aus dem Schweizerischen Nationalfonds; dieser sei hier ebenfalls verdankt.

### Literaturverzeichnis

- 1) H. A. LORENTZ, *The motions of electrons in metallic bodies*, Proc. Amsterdam Acad. 7 (1905), 438. Vgl. auch *Theory of Electrons*, Teubner, 1909, S. 266–273.
- 2) A. SOMMERFELD, *Zur Elektronentheorie der Metalle auf Grund der Fermischen Statistik*, Z. für Physik 47, 1 (1928).
- 3) E. M. CONWELL, *Mobility in High Electric Fields*, Phys. Rev. 88, 1379 (1952).
- 4) E. M. CONWELL, *Lattice Mobility of Hot Carriers*, J. Phys. Chem. Solids 8, 234 (1959).
- 5) W. SHOCKLEY, *Electrons and Holes in Semiconductors*, D. van Nostrand, 1950.

### Nachtrag

Nach Abschluss obiger Arbeit erhielt der Autor Kenntnis von einem von R. STRATTON ausgearbeiteten, internen Berichte der Firma Texas Instruments Incorporated, in welchem die Gleichung (19) ohne das Glied mit  $\partial \tau_n / \partial x$  und die Gleichung (33) angegeben werden. Eine vorläufige Zusammenfassung des Inhaltes dieses Berichtes erschien im Bull. Am. Phys. Soc., Ser. II, 6, 107 (1961).