Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 38 (1965)

Heft: I

Artikel: Affine Vollständigkeit und kompakte Lorentz'sche Mannigfaltigkeiten

Autor: Fierz, Markus / Jost, Res

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-113581

Affine Vollständigkeit und kompakte Lorentz'sche Mannigfaltigkeiten

von **Markus Fierz** und **Res Jost**
Seminar für Theoretische Physik, ETH Zürich

(1. X. 64)

1. *Einleitung:* Die Frage, wann eine Mannigfaltigkeit mit metrischer Struktur als vollständig zu gelten habe, ist für Riemannsche Mannigfaltigkeiten durch die Sätze von H. HOPF und A. RINOW seit langem höchst befriedigend gelöst. Auf Mannigfaltigkeiten mit beliebigem affinem Zusammenhang, also auch auf Lorentzsche Mannigfaltigkeiten, lässt sich die Hopf-Rinowsche Definition der Vollständigkeit mit geringer Modifikation übertragen. Man erhält dann eine Eigenschatf solcher Mannigfaltigkeiten, die *affine Vollständigkeit,* welche aber sehr wenig mit dem naiven Begriff von Vollständigkeit zu tun hat. Wir möchten dies für Lorentzmetriken auf dem 2 dimensionalen Torus illustrieren. Sicher ist der Torus als kompakte Mannigfaltigkeit in einem naiven Sinn vollständig. Leider lassen sich auf ihm aber sehr leicht Lorentzsche Strukturen angeben, die affin unvollständig sind.

Unsere Beispiele und unsere Überlegungen sind gänzlich elementar. Auch wiederholen wir Bekanntes und möglicherweise ist alles, was wir zu sagen haben, bekannt. Vielleicht gibt es aber doch da oder dort einen Physiker, dem diese Dinge auch nicht so geläufig sind und der uns anzuhören bereit ist.

Im folgenden Abschnitt diskutieren wir die Mannigfaltigkeiten, die überhaupt eine Lorentzsche Metrik zulassen. Im 3. Abschnitt rufen wir die Sätze von HOPF und RINOW in Erinnerung. Der 4. Abschnitt endlich diskutiert die affine Vollständigkeit an 3 Beispielen.

Motiviert ist diese kleine Untersuchung natürlich aus der allgemeinen Relativitätstheorie und durch unsere Überzeugung, dass auch der Physiker in dieser Disziplin wohl auf die Dauer globale Gesichtspunkte nicht völlig ausser acht lassen kann. Insbesondere ist die Frage der Fortsetzbarkeit einer Lorentzschen Mannigfaltigkeit offenbar enscheidend und man möchte sie gerne mit einem nützlichen Begriff der «Vollständigkeit» verbunden wissen.

Wir freuen uns, diese bescheidene Note unserem lieben Kollegen E. C. G. STUECKELBERG-VON BREIDENBACH zum 60. Geburtstag widmen zu dürfen.

2. Unter einer «*Mannigfaltigkeit*» verstehen wir im folgenden eine reelle, zusammenhängende, parakompakte, differenzierbare (C^∞) Mannigfaltigkeit[1]).

Jede solche Mannigfaltigkeit M kann eine differenzierbare (C^∞) Riemannsche Metrik, oder, was dasselbe ist, ein überall positiv definites, symmetrisches, kovariantes Tensorfeld zweiten Ranges tragen, und wird dadurch zu einer *Riemannschen Mannigfaltigkeit.* Der Beweis dieser Tatsache erfolgt leicht mit Hilfe einer passenden Zerlegung der Einheit und auf Grund der Tatsache, dass endlich viele positiv definite quadratische Formen mit nicht negativen Koeffizienten linear kombiniert, abgesehen vom trivialen Fall, wieder eine positiv definite Form ergeben.

Trägt M ein (nirgends singuläres) symmetrisches, differenzierbares, kovariantes Tensorfeld zweiten Ranges mit der Signatur $(+, -, -, \cdots, -)$, so wird M zu einer *Lorentzschen Mannigfaltigkeit*. Wir sagen auch: *M trägt eine Lorentzsche Metrik.* Im Gegensatz zum Fall der Riemannschen Metrik kann nicht jede Mannigfaltigkeit eine Lorentzsche Metrik tragen. Es ist aber leicht, ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz einer Lorentzschen Metrik anzugeben.

Kriterium: M kann genau dann eine Lorentzsche Metrik tragen, falls es auf M ein (C^∞) Geradenfeld gibt[4]).

Dies lässt sich wie folgt einsehen: Wir denken uns M mit einer Riemannschen Metrik versehen. Jeder Tangentialraum T_x trägt dann eine positiv definite quadratische Form $Q(\xi, \xi)$. Ist nun M eine Lorentzsche Mannigfaltigkeit, dann trägt T_x auch eine quadratische Form $L_x(\xi, \xi)$ mit der Signatur $(+, -, \cdots, -)$. Nun bestimmt das Extremalprinzip «$L_x(\xi, \xi)$ maximal unter der Nebenbedingung $Q_x(\xi, \xi) = 1$» bis auf das Vorzeichen genau einen Eigenvektor ξ_0 und damit einen eindimensionalen Unterraum l_x von T_x. $\{l_x\}$ ist das gesuchte Geradenfeld.

Ist umgekehrt ein Geradenfeld $\{l_x\}$ gegeben, dann spaltet man T_x bezüglich der Metrik Q_x in l_x und das orthogonale Komplement $l_x^\perp$. Sei $\xi \in T_x$, $\xi = \xi_1 + \xi_2$, $\xi_1 \in l_x$, $\xi_2 \in l_x^\perp$ so ist $L_x(\xi, \xi) = Q_x(\xi_1, \xi_1) - Q_x(\xi_2, \xi_2)$ eine quadratische Form der Signatur $(+, -, \cdots, -)$ und bestimmt eine Lorentzsche Metrik.

Jede offene Mannigfaltigkeit kann ein Geradenfeld und damit eine Lorentzsche Metrik tragen. Für kompakte Mannigfaltigkeiten ist das, nach einem klassischen Resultat von H. Hopf, dann und nur dann möglich, falls die *Eulersche Charakteristik verschwindet*[2]). In 2 Dimensionen können also nur die Kleinsche Fläche und der Torus eine Lorentzsche Metrik tragen.

3. Jede Riemannsche oder Lorentzsche Mannigfaltigkeit bestimmt eindeutig einen torsionsfreien affinen Zusammenhang. Unter einer «geodätischen Linie» in einer Mannigfaltigkeit mit affinem Zusammenhang verstehen wir eine vollständige geodätische Linie, die also nicht echter Teil einer (zusammenhängenden) geodätischen Linie ist. Der affine Parameter einer geodätischen Linie ist genau bis auf affine Transformationen in R^1 bestimmt und variiert in einem endlichen oder unendlichen Intervall in R^1. Eine geodätische Linie gehört also einem der drei folgenden Typen an:

Typus I: Der Bereich des affinen Parameters ist R^1.

Typus II: Der Bereich des affinen Parameters ist eine Halbgerade, bei passender Normierung $(0, +\infty)$.

Typus III: Der Bereich des affinen Parameters ist ein (offenes) endliches Intervall, bei passender Normierung $(0, 1)$.

Die klassische Definition eines vollständigen Riemannschen Raumes und die folgenden Sätze stammen von Hopf und Rinow[1])[3]).

Definition 1: Ein vollständiger Riemannscher Raum ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, in der alle geodätischen Linien von Typus I sind.

Um an die Haupteigenschaften eines vollständigen Riemannschen Raumes zu erinnern brauchen wir die Distanzfunktion d in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. $d(x, y)$, $(x, y) \in M \times M$ ist die untere Schranke der Längen aller stückweise C^1 Bogen, die x und y verbinden. d erfüllt die metrischen Axiome. Nun gelten die Sätze

Satz A: Die folgenden Aussagen sind gleichwertig

1. M ist ein vollständiger Riemannscher Raum.
2. M ist ein vollständiger metrischer Raum mit Distanz d.
3. Jede bezüglich d beschränkte Menge in M ist relativ kompakt.

Satz B: In einem vollständigen Riemannschen Raum lassen sich irgend 2 Punkte x und y durch einen geodätischen Bogen der Länge $d(x, y)$ verbinden.

Satz C: Ein vollständiger Riemannscher Raum ist nicht fortsetzbar, das heisst er kann nicht als echte offene Teilmenge (isometrisch) in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit eingebettet werden.

Es folgt aus Satz A, *dass eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ein vollständiger Riemannscher Raum ist.*

4. Nun lässt sich die Definition 1 offenbar auf beliebige affine zusammenhängende Mannigfaltigkeiten übertragen[1]).

Definition 2: Eine affin zusammenhängende Mannigfaltigkeit heisst affin vollständig, falls alle geodätischen Linien vom Typus I sind.

Wie verschieden sich nun dieser erweiterte Begriff zum alten verhält, wollen wir an kompakten Mannigfaltigkeiten illustrieren.

1. Beispiel: $M = S^1$ (Kreislinie) mit Koordinate x (mod 1). Affiner Zusammenhang Γ,. $\Gamma(x+1) = \Gamma(x)$. Gleichung der Geodätischen $\ddot{x} + \Gamma \dot{x}^2 = 0$. Setzt man $\Gamma = dF/dx$ so ergibt sich für den affinen Parameter

$$t = c \int\limits_0^x e^{F(x')}\, dx' + t_0 \,.$$

Nun ist F von der Gestalt $F(x) = \gamma\, x + p(x)$, wobei $p\,(x+1) = p(x)$ ist. Falls $\gamma = 0$ ist, ist die geodätische Linie vom Typus I, (S^1, Γ) also vollständig. Falls $\gamma \neq 0$ ist, dann ist die geodätische Linie vom Typus II also (S^1, Γ) unvollständig.

Dieses Beispiel, so kindisch es anmuten mag, tritt in höheren Dimensionen bei geschlossenen Linien auf Lorentzschen Mannigfaltigkeiten auf.

2. Beispiel: $M = S^1 \times S^1$: Torus in 2 Dimensionen. Koordinaten x (mod 1), y (mod 1).

Metrischer Tensor (Lorentzsche Metrik)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & h \end{pmatrix}, \quad h\,(x+1) = h(x)\,.$$

Integrale

$$\varepsilon = 2\,\dot{x}\,\dot{y} + h\,\dot{y}^2\,, \quad q = \dot{x} + h\,\dot{y}\,.$$

Geodätische Linien

$$\ddot{x} + \frac{\varepsilon}{2}\,h' = 0\,, \quad \ddot{y} - \frac{1}{2}\,h'\,\dot{y}^2 = 0\,, \quad h' = \frac{dh}{dx}\,.$$

I) *Nullgeodätische:* $\varepsilon = 2\,\dot{x}\,\dot{y} + h\,\dot{y}^2 = 0$, $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} - {}^1\!/_2\, h'\,\dot{y}^2 = 0$.

1. Fall: $\dot{y} = 0$, $y = y_0$, $x = t$ Typus I.

2. Fall: $2\,\dot{x} + h\,\dot{y} = 0$ und $\dot{x} \neq 0$, also $dy/dx = -\,2/h$.

2a) h hat keine Nullstellen Typus I.

2b) h hat Nullstellen (verschwindet aber natürlich nicht identisch) Typus III.

3. Fall: $x = \beta$ wobei $h(\beta) = 0$ ist. Dann gilt $\ddot{y} - {}^1/_2\, h'(\beta)\, \dot{y}^2 = 0$. Wir befinden uns in einem Spezialfall des 1. Beispiels und haben die Fallunterscheidung

3a) $h'(\beta) = 0$ Typus I,

3b) $h'(\beta) \neq 0$ Typus II.

Zusammenfassend können wir festhalten: *Falls h einfache Nullstellen hat, dann treten Nullinien zu allen 3 Typen auf.*

Zur Diskussion der Nicht-Nullgeodätischen wollen wir voraussetzen, dass h das *Vorzeichen wechselt.* Wir setzen weiterhin $m = \operatorname{Min} h(x) < 0$, $M = \operatorname{Max} h(x) > 0$. Ausserdem ist ohne Einschränkung $\varepsilon^2 = 1$ angenommen. Wir möchten zeigen, dass auch für die Nicht-Nullgeodätischen alle 3 Typen auftreten.

II) *Nicht-Nullgeodätische:* Die geodätischen Gleichungen können wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{q^2 - \varepsilon\, h}}\,, \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\left(\frac{q}{\sqrt{q^2 - \varepsilon\, h}} - 1\right).$$

a) *Geodätische vom Typus I.* Wir wählen $q^2 > \operatorname{Max}(M, -m)$ und $\sqrt{q^2 - h} > 0$. Schliesslich sei $q > 0$. Offenbar ist y' überall, auch bei $h = 0$, beschränkt. Daher variiert x unbeschränkt und t nimmt alle Werte in $(-\infty, +\infty)$ an.

b) *Geodätische vom Typus II.* Wir illustrieren nur den Fall $\varepsilon = +1$. Sei $q^2 = M$, $\sqrt{q^2 - h} \geqq 0$, $q < 0$. Sei die Nullstelle β_1, von h so gewählt, dass zwischen ihr und der nächsten Nullstelle (bei zunehmendem x in $[\beta_1, \beta_1 + 1]$) eine M-Stelle von h liegt. Sei γ_1 die erste solche M-Stelle: $h(\gamma_1) = M$. Wir betrachten das Intervall $\{x\} = (\beta_1, \gamma_1)$. Offenbar strebt y sowohl bei $\beta_1 + 0$ als auch bei $\gamma_1 - 0$ gegen $-\infty$ und ist im übrigen beschränkt. Weiter bleibt t bei $\beta_1 + 0$ beschränkt und strebt bei $\gamma_1 - 0$ gegen $+\infty$. Nach passender Schiebung liegt t in $(0, +\infty)$. Die Geodätische Linie ist also vom Typus II.

c) *Geodätische vom Typus III.* Wie unter a) wählen wir $q^2 > \operatorname{Max}(M, -m)$ und $\sqrt{q^2 - \varepsilon\, h} > 0$, jedoch $q < 0$. Sind β_1 und β_2 konsekutive Nullstellen von h, dann wird y in $\beta_1 + 0$ und $\beta_2 - 0$ unendlich. Offenbar ist die Variation von x endlich, die Geodätische also vom Typus III.

Zusammenfassend können wir also feststellen, dass, sofern h nur eine einfache Nullstelle besitzt, für jeden Wert von ε alle 3 Typen von geodätischen Linien auftreten. In einer Hinsicht freilich verhält sich unsere Lorentzsche Mannigfaltigkeit «normal»: *Irgend zwei Punkte sind durch eine geodätische Linie verbindbar* (*geodätische Verbindbarkeit*). Wir wollen diese Tatsache für die Punkte $(0, 0)$ und (x, y), $y \not\equiv 0 (1)$ verifizieren. Dabei wird es sich herausstellen, dass das Vorzeichen von ε noch beliebig gewählt werden kann. Wir setzen $q = +1$ und $\varepsilon < \varepsilon_0 = [\operatorname{Max}(M, -m)]^{-1}$. Aus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon\, h}} - 1\right) = \varepsilon \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu\, \varepsilon^\nu\, h^\nu$$

folgt, dass

$$y = x\, f(\varepsilon) + g(\varepsilon, x)\,, \quad f(0) = 0\,, \quad g(0, x) = 0$$

ist, wobei $g(\varepsilon, x + 1) = g(\varepsilon, x)$ gilt. Sowohl $f(\varepsilon)$ als auch $g(\varepsilon, x)$ sind regulär analytisch. Ausserdem ist $(df/d\varepsilon)\,(0) = {}^1/_2$, also verschwindet f nicht identisch. Nun nehmen wir ohne Einschränkung $0 < y < 1$ an und setzen $x = k + x_1$, wobei $0 \leqq x_1 < 1$ und $k = 0, 1, 2 \ldots$. Es ist dann zu zeigen, dass die Gleichung

$$y = k\, f(\varepsilon) + [x_1\, f(\varepsilon) + g(\varepsilon, x_1)]$$

bei passender Wahl von k eine Lösung $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ (wir beschränken uns auf den Fall $\varepsilon > 0$) hat. Das ist aber evident; wir brauchen nur k genügend gross zu wählen, dann nimmt die rechte Seite der letzten Gleichung in jedem noch so kleinen Intervall $[0, \varepsilon_1]$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ alle Werte in $[0, 1]$ an, da die Steigung von $f(\varepsilon)$ im Nullpunkt $^1/_2$ beträgt.

Im nächsten und letzten Beispiel, das auch schon von J. W. SMITH[5]) in fast identischem Zusammenhang diskutiert worden ist, wollen wir zeigen, dass auch die geodätische Verbindbarkeit für toroidale Lorentzsche Mannigfaltigkeiten im allgemeinen nicht erwartet werden darf.

3. Beispiel: $M = S^1 \times S^1$, Koordinaten $x \pmod{4\pi}$, $y \pmod 1$.
Metrischer Tensor

$$\begin{pmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ \cos 2x & -\sin 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Man verifiziert auch in diesem Beispiel das Auftreten von geodätischen Linien der Typen II und III. Uns interessiert jedoch jetzt die geodätische Unverbindbarkeit. Wieder setzen wir

$$\varepsilon = (\dot{x}^2 - \dot{y}^2) \sin 2x + 2\,\dot{x}\,\dot{y} \cos 2x \,.$$

Führt man

$$\xi = \dot{x} \cos x - \dot{y} \sin x \quad \text{und} \quad \eta = \dot{x} \sin x + \dot{y} \cos x$$

ein, dann findet man

$$\varepsilon = \xi\,\eta \,.$$

Nun heisst eine C^1-Kurve homogen zeitartig (raumartig) wenn längs ihr $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 0$) ist; sie ist eine Nullinie, falls $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \neq (0, 0)$ und $\varepsilon = 0$ für alle t. Längs einer homogenen zeitartigen (raumartigen) Kurve können ξ und η ihr Vorzeichen nicht ändern. Längs einer Nullinie verschwindet entweder ξ oder η, die nichtverschwindende Komponente aber ändert ihr Vorzeichen wieder nicht. Betrachten wir nun etwa die 2 Streifen $0 \leqslant x \leqslant \pi$ und $-\pi \leqslant x \leqslant 0$. Für $x = 0$ werden $\xi = \dot{x}$, $\eta = \dot{y}$, für $x = \pm\pi$ aber $\xi = -\dot{x}$, $\eta = -\dot{y}$. Eine homogene Kurve, welche $x = 0$ etwa mit $\dot{x} > 0$ überschreitet, hat mit $x = 0$ keinen weiteren Punkt gemein, kann $x = \pi$ nie überschreiten und $x = -\pi$ nie überschritten haben. Sie bleibt also dauernd im Streifen $|x| < \pi$. Analoges gilt für $\dot{x} < 0$. Ist aber für $x = 0$ $\dot{x} = 0$, dann ist die Kurve eine Nullinie, x verschwindet dauernd und die Kurve bleibt auch im Streifen $|x| < \pi$. M ist also nicht einmal durch homogene Kurven verbindbar, also sicher nicht geodätisch verbindbar.

Es ist klar, dass sich die beiden letzten Beispiele in mannigfacher Art verallgemeinern liessen. Wünschenswert wäre freilich eine allgemeine Theorie. Eine solche aber übersteigt die Kenntnisse der Autoren.

Literatur

[1]) S. KOBAYASHI und K. NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry* (Interscience, New York–London 1963).

[2]) H. HOPF, Math. Ann. *96*, 225 (1927).

[3]) H. HOPF und W. RINOW, Commentarii math. Helv. *3*, 209 (1931).

[4]) N. STEENROD, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, 1951, p. 204–207.

[5]) J. W. SMITH, Am. J. of Math. *82*, 873 (1960).