Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 38 (1965)

Heft: II

Artikel: Über die Selbstenergie einer geladenen Masse

Autor: Scherrer, Willy

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-113589

Über die Selbstenergie einer geladenen Masse

von **Willy Scherrer**

(Bern)

(26. XI. 64)

Zusammenfassung. Für die Selbstenergie einer ungeladenen Masse ergab meine «lineare Feldtheorie» die Formel

$$E = 8\,\pi\,\varkappa^{-1}\,a = m\,c^2\,.$$

In der vorliegenden Arbeit wird diese Formel auf eine Masse mit der Ladung b wie folgt ausgedehnt:

$$E = 8\,\pi\,\varkappa^{-1}\left|\sqrt{a^2 + \frac{1}{2}\,\omega\,\varkappa\,b^2}\right|\,.$$

Dabei ist ω eine reelle Einheit, über deren Vorzeichen die zur Verfügung stehenden Prämissen noch keine Entscheidung gestatten.

§ 1. Einleitung

Kürzlich habe ich im Rahmen meiner «linearen Feldtheorie» folgenden Satz hergeleitet[1]):

Die totale Energie des von einer ruhenden Masse m erzeugten Gravitationsfeldes wird gegeben durch die Einsteinsche Formel

$$E = m\,c^2\,. \tag{1.1}$$

Die bei der Herleitung massgebende Wirkungsfunktion ist gegeben durch

$$W \equiv \varkappa^{-1}\,H\,, \qquad H \equiv \frac{1}{2}\underset{1}{H} + \underset{2}{H} - 2\,\underset{3}{H} \tag{1.2}$$

mit den absolut invarianten Komponenten

$$\underset{1}{H} \equiv \Gamma^{\cdot}_{\alpha}{}^{\cdot}_{\beta}{}^{\cdot}_{\gamma}\,\Gamma^{\alpha\,\beta\,\gamma}_{\cdot\,\cdot\,\cdot}\,, \qquad \underset{2}{H} \equiv \Gamma^{\cdot}_{\beta}{}^{\cdot}_{\alpha}{}^{\cdot}_{\gamma}\,\Gamma^{\gamma\,\alpha\,\beta}_{\cdot\,\cdot\,\cdot}\,, \qquad \underset{3}{H} \equiv \Gamma^{\cdot}_{\alpha}\,\Gamma^{\alpha}_{\cdot}\,, \tag{1.2a}$$

während

$$\varkappa = 8\,\pi\,G\,c^{-4} \tag{1.2b}$$

die Einsteinsche Gravitationskonstante bedeutet.

Von dieser Wirkungsfunktion habe ich schon bei früherer Gelegenheit gezeigt, dass sie genau die Einsteinschen Vakuumsgleichungen der Gravitation liefert[2]).

---

1) Helv. Phys. Acta. *37*, 317 – 328 (1964)

2) Z. Physik *152*, 319–321 (1958).

In der vorliegenden Arbeit wird nun der erwähnte Satz in folgender Weise auf geladene Massen ausgedehnt:

Die totale Energie des von einer ruhenden und geladenen Masse erzeugten totalen Feldes wird gegeben durch die Formel

$$E = 8\pi\,\varkappa^{-1} \left| \sqrt{a^2 + \frac{1}{2}\,\omega\,\varkappa\,b^2} \right| . \tag{1.3}$$

Dabei bedeutet a eine Länge, b die Ladung und ω eine reelle Einheit gemäss

$$\omega^2 = 1 . \tag{1.4}$$

Eine Betrachtung über die eventuelle Wahl dieses Vorzeichens findet sich am Schluss der Arbeit.

Zur Begründung der Formel (1.3) muss die Wirkungsfunktion (1.2) ersetzt werden durch

$$W \equiv \varkappa^{-1}\,H + \omega\,M , \tag{1.5}$$

wobei

$$M \equiv \frac{1}{4} F_{,\varrho\sigma}\, F^{,\varrho\sigma} \tag{1.6}$$

die klassische Wirkungsfunktion des elektromagnetischen Feldes darstellt.

Im Rahmen der linearen Feldtheorie kann man statt (1.6) auch schreiben

$$M \equiv \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}\, F^{\alpha\beta} , \tag{1.7}$$

wo nun $F_{\alpha\beta}$ gemäss

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha,}{}^{,\varrho}\, g_{\beta,}{}^{,\sigma}\, F_{,\varrho\sigma} \tag{1.8}$$

den zum Koordinatentensor $F_{,\varrho\sigma}$ gehörigen Formentensor darstellt.

Vorgängig der weiteren Entwicklung müssen nun noch einige technische Bemerkungen eingeschaltet werden.

§ 2. Bemerkungen zur Zeigertechnik

Zuerst eine rein formale Bemerkung. Bis anhin habe ich für den die Lorentzmetrik charakterisierenden konstanten Formentensor die Zeichen

$$a_{\lambda\mu} , a^{\lambda\mu} ; a_\lambda , a^\lambda \tag{2.1}$$

benutzt. Von jetzt an werde ich statt ihnen die Eisenhardtschen Zeichen

$$e_{\lambda\mu} , e^{\lambda\mu} ; e_\lambda , e^\lambda \tag{2.2}$$

verwenden. Die metrischen Tensoren $G_{,\lambda\mu}$ und $G^{,\lambda\mu}$ ergeben sich daher durch folgende Formeln aus den Basiselementen $g^{\lambda,}{}_{,\mu}$ und $g_{\lambda,}{}^{,\mu}$:

$$G_{,\lambda\mu} = e_\alpha\, g^{\alpha,}{}_{,\lambda}\, g^{\alpha,}{}_{,\mu} , \qquad G^{,\lambda\mu} = e^\alpha\, g_{\alpha,}{}^{,\lambda}\, g_{\alpha,}{}^{,\mu} . \tag{2.3}$$

Nun zur Zeigertechnik. Ursprünglich hatte ich die lineare Basis mit $\| \psi_{\lambda,\mu} \|$ bezeichnet und später mit $\| g_{\lambda,\mu} \|$. In der letzten Arbeit[3]) schliesslich habe ich für die Elemente

---

[3]) A. a. O.[1]), siehe § 2.

der primären Basismatrix das Zeichen $g^{\lambda,}{}_{,\mu}$ gewählt. Die Elemente der Transponierten der Inversen mussten daher mit $g_{\lambda,}{}^{,\mu}$ bezeichnet werden.

Da mir diese Bezeichnung die zweckmässigste zu sein scheint, empfiehlt es sich, die in den «Grundlagen» beschriebenen Regeln für die Zeigerverschiebungen[4]) wie folgt neu zu fassen:

1. Zwei Zeiger sollen nie übereinander stehen. Ein einzelner Zeiger beansprucht also immer eine zweistellige Spalte, in der er entweder oben oder unten steht.

Beispiel: die Formeln (1.2a).

2. Horizontale Zeigerverschiebungen:

$$T^{\cdot\lambda,\cdot\cdot}_{\cdot\cdot,\cdot\cdot} = g^{\lambda,}{}_{,\varrho}\, T^{\cdot,\varsigma\cdot}_{\cdot,\cdot\cdot} \;;\; T^{\cdot\cdot,\cdot\cdot}_{\cdot\lambda,\cdot} = g_{\lambda,}{}^{,\varsigma}\, T^{\cdot,\cdot\cdot}_{\cdot,\varrho\cdot} \tag{2.4a}$$

$$T^{\cdot,\lambda\cdot}_{\cdot,\cdot\cdot} = g_{\varrho,}{}^{,\lambda}\, T^{\cdot\varrho,\cdot}_{\cdot\cdot,\cdot} \;;\; T^{\cdot,\cdot\cdot}_{\cdot,\lambda\cdot} = g^{\varsigma,}{}_{,\lambda}\, T^{\cdot\cdot,\cdot}_{\cdot\varsigma,\cdot} \tag{2.4b}$$

In (2.4a) werden Koordinatenzeiger ϱ nach links über das Komma verschoben und damit in Formenzeiger λ verwandelt. In (2.4b) dagegen werden Formenzeiger ϱ nach rechts über das Komma verschoben und damit in Koordinatenzeiger λ verwandelt.

Damit bei diesen Prozessen auf der einen Seite des Kommas der erforderliche Platz und auf der anderen Seite keine Lücke entsteht, müssen offenbar alle Spalten starr miteinander verbunden die gleiche Verschiebung durchführen.

3. Vertikale Verschiebungen von Formenzeigern:

$$T^{\cdot,}_{\lambda,} = e_\lambda\, T^{\lambda,}_{\cdot,} \;;\; T^{\lambda,}_{\cdot,} = e^\lambda\, T^{\cdot,}_{\lambda,} \,. \tag{2.5}$$

4. Vertikale Verschiebungen von Koordinatenzeigern: Durch Zusammensetzung aus 2. und 3. nach den Mustern

$$T^{,\cdot}_{,\lambda} = g^{\alpha,}{}_{,\lambda}\, e_\alpha\, g^{\alpha,}{}_{,\varrho}\, T^{,\varsigma}_{,\cdot} \tag{2.6a}$$

$$T^{,\lambda}_{,\cdot} = g_{\alpha,}{}^{,\lambda}\, e^\alpha\, g_{\alpha,}{}^{,\varrho}\, T^{,}_{,\varsigma} \,. \tag{2.6b}$$

Wegen (2.3) sind dieselben gleichwertig mit den Regeln

$$T^{,\cdot}_{,\lambda} = G_{,\lambda\varrho}\, T^{,\varrho}_{,\cdot} \;;\; T^{,\lambda}_{,\cdot} = G^{,\lambda\varrho}\, T^{,\cdot}_{,\varrho} \tag{2.7}$$

der quadratischen Theorie.

§ 3. Allgemeine Feldgleichungen

Zur Illustration des Vorausgehenden sowie für weitere Zwecke sollen hier einmal diejenigen Formeln zusammengestellt werden, welche erforderlich sind, um die zu einer beliebigen linearen Kombination der Invarianten (1.2a) gehörigen Feldgleichungen anschreiben zu können.

Jede lineare Kombination dieser Invarianten liefert eine Funktion W von der Struktur

$$W \equiv W\left(\frac{\partial g^{\lambda,}{}_{,\mu}}{\partial x^\nu}\;;\; g^{\lambda,}{}_{,\mu}\right) \,. \tag{3.1}$$

[4]) Z. Physik *138*, 16–21 (1954).

Bezeichnen wir also wie üblich die zu W gehörige invariante Dichte mit dem gotischen Buchstaben

$$\mathfrak{W} \equiv W\,g\,, \tag{3.2}$$

so besitzen die zum Wirkungsprinzip

$$\delta \int\limits_{\mathfrak{B}} \mathfrak{W}\, dx = 0 \tag{3.3}$$

gehörenden Feldgleichungen die Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \left(\dfrac{\partial g^{\lambda,}{}_{,\mu}}{\partial x\,\nu} \right)} \right\} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial g^{\lambda,}{}_{,\mu}} = 0\,. \tag{3.4}$$

Führen wir also zur Abkürzung die Tensordichten

$$\mathfrak{t}_{\lambda,}{}^{,\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \left(\dfrac{\partial g^{\lambda,}{}_{,\mu}}{\partial x\,\nu} \right)}\,; \quad \mathfrak{T}_{\lambda,}{}^{,\mu} \equiv \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial g^{\lambda,}{}_{,\mu}} \tag{3.5}$$

ein, so geht (3.4) über in

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_{\lambda,}{}^{,\mu\nu}}{\partial x^\nu} - \mathfrak{T}_{\lambda,}{}^{,\mu} = 0\,. \tag{3.6}$$

In allen den Fällen, wo $\mathfrak{t}_{\lambda,}{}^{,\mu\nu}$ in bezug auf die Zeiger μ und ν antisymmetrisch ist – z. B. für jede der Invarianten (1.2a) –, gilt also der differentielle Erhaltungssatz

$$\frac{\partial\, \mathfrak{T}_{\lambda,}{}^{,\mu}}{\partial x^\mu} = 0\,. \tag{3.7}$$

Führen wir also noch die Abkürzung

$$\mathfrak{t}_{\lambda,}{}^{,\mu} \equiv \frac{\partial\, \mathfrak{t}_{\lambda,}{}^{,\mu\nu}}{\partial x^\nu} \tag{3.8}$$

ein, so haben wir in

$$\mathfrak{W}_{\lambda,}{}^{,\mu} \equiv \mathfrak{t}_{\lambda,}{}^{,\mu} - \mathfrak{T}_{\lambda,}{}^{,\mu} = 0 \tag{3.9}$$

die knappste Symbolisierung der Feldgleichungen.

Wenn wir schliesslich vermittels Division durch g von den Tensordichten zu den Tensoren übergehen, erhalten die Feldgleichungen folgende Gestalt:

$$W_{\lambda,}{}^{,\mu} \equiv t_{\lambda,}{}^{,\mu} - T_{\lambda,}{}^{,\mu} = 0\,. \tag{3.10}$$

Jetzt empfiehlt es sich, den kontravarianten Koordinatenzeiger μ vermittels der Operation

$$W_{\lambda\mu} = e_\mu\, g^{\mu,}{}_{,\varrho}\, W_{\lambda,\cdot}{}^{,\varrho} \tag{3.11}$$

in einen kovarianten Formenzeiger zu verwandeln. Die Gleichung (3.10) wird dadurch übergeführt in

$$\boxed{W_{\lambda\mu} \equiv t_{\lambda\mu} - T_{\lambda\mu} = 0\,.} \tag{3.12}$$

Dieses System bildet für uns gleichsam die «Normalform» der Feldgleichungen, von der aus man je nach Bedarf zu anderen Formen übergehen kann. Insbesondere eignet es sich zur Symmetrisierung. Setzt man nämlich

$$U_{\lambda\mu} \equiv \frac{1}{2}\,(W_{\lambda\mu} + W_{\mu\lambda})\,, \qquad V_{\lambda\mu} \equiv \frac{1}{2}\,(W_{\lambda\mu} - W_{\mu\lambda})\,, \tag{3.13}$$

so zerfällt (3.12) in die beiden Systeme

$$U_{\lambda\mu} = 0 \tag{3.14a}$$

$$V_{\lambda\mu} = 0\,, \tag{3.14b}$$

bestehend aus 10 symmetrischen und 6 antisymmetrischen Gleichungen.

Um nun die zu einer beliebigen Kombination

$$W \equiv \sum_{i=1}^{3} \underset{i}{\Lambda}\, \underset{i}{H} \tag{3.15}$$

gehörigen Feldgleichungen anschreiben zu können, genügt es offenbar, für jedes einzelne $\underset{i}{W} \equiv \underset{i}{H}$ die Terme $\underset{i}{t}_{\lambda\mu}$ und $\underset{i}{T}_{\lambda\mu}$ in

$$\underset{i}{W}_{\lambda\mu} \equiv \underset{i}{t}_{\lambda\mu} - \underset{i}{T}_{\lambda\mu}$$

zu ermitteln. Die gesuchten Feldgleichungen sind dann gegeben durch

$$W_{\lambda\mu} \equiv \sum_{i=1}^{3} \underset{i}{\Lambda} \left(\underset{i}{t}_{\lambda\mu} - \underset{i}{T}_{\lambda\mu}\right) = 0\,. \tag{3.16}$$

Auf Grund der anschliessenden Tafel ist man also imstande, die Feldgleichungen für jede Kombination (3.15) anzuschreiben.

$$\underset{1}{t}_{\lambda\mu} \equiv 2\,(\partial_\alpha + 2\,\Gamma_\alpha)\,\Gamma_{\lambda\cdot\mu}^{\cdot\alpha\cdot} - 2\,\Gamma_{\lambda\alpha\beta}^{\cdot\,\cdot\,\cdot}\,\Gamma_{\mu\cdot\cdot}^{\cdot\alpha\beta}\,. \tag{3.17$_1$}$$

$$\underset{2}{t}_{\lambda\mu} \equiv (\partial_\alpha + 2\,\Gamma_\alpha)\,\Gamma_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\alpha\cdot} + (\partial_\alpha + 2\,\Gamma_\alpha)\,\Gamma_{\cdot\lambda\mu}^{\alpha\cdot\cdot} + 2\,\Gamma_{\alpha\lambda\beta}^{\cdot\,\cdot\,\cdot}\,\Gamma_{\mu\cdot\cdot}^{\cdot\beta\alpha}\,. \tag{3.17$_2$}$$

$$\underset{3}{t}_{\lambda\mu} \equiv e_{\lambda\mu}\,(\partial_\alpha + 2\,\Gamma_\alpha^{\cdot})\,\Gamma_{\cdot}^{\alpha} - (\partial_\lambda + 2\,\Gamma_\lambda)\,\Gamma_\mu^{\cdot} - 2\,\Gamma_\alpha\,\Gamma_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\alpha\cdot}\,. \tag{3.17$_3$}$$

$$\underset{1}{T}_{\lambda\mu} \equiv -\,4\,\Gamma_{\alpha\lambda\beta}^{\cdot\,\cdot\,\cdot}\,\Gamma_{\cdot\mu\cdot}^{\alpha\cdot\beta} + e_{\lambda\mu}\,\underset{1}{H}\,. \tag{3.18$_1$}$$

$$\underset{2}{T}_{\lambda\mu} \equiv -\,2\,\Gamma_{\alpha\lambda\beta}^{\cdot\,\cdot\,\cdot}\,\Gamma_{\cdot\mu\cdot}^{\beta\cdot\alpha} + 2\,\Gamma_{\alpha\lambda\beta}^{\cdot\,\cdot\,\cdot}\,\Gamma_{\mu\cdot\cdot}^{\cdot\beta\alpha} + e_{\lambda\mu}\,\underset{2}{H}\,. \tag{3.18$_2$}$$

$$\underset{3}{T}_{\lambda\mu} \equiv -\,2\,\Gamma_\alpha^{\cdot}\,\Gamma_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\alpha\cdot} - 2\,\Gamma_\lambda\,\Gamma_\mu + e_{\lambda\mu}\,\underset{3}{H}\,. \tag{3.18$_3$}$$

Für unsere Aufgabe aktuell ist also die Kombination (1.2), und speziell gestützt auf die Formeln (3.18) erhält man die zugehörige Energiedichte des Gravitationsfeldes. Insbesondere sei daran erinnert, dass die zu dieser Kombination gehörigen Gleichungen (3.14b) sich reduzieren auf die Identität

$$V_{\lambda\mu} \equiv \partial_\lambda \mathfrak{f}_\mu - \partial_\mu \mathfrak{f}_\lambda + (\partial_\alpha + 2\,\mathfrak{f}_\alpha)\, \mathfrak{f}^{\alpha\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,\lambda\mu} \equiv 0\,. \tag{3.19}$$

Schliesslich sei noch vermerkt, dass der Differentiator ∂_λ wie folgt allgemein kovariant geschrieben werden kann:

$$\partial_\lambda \equiv g_{\lambda,}^{\ ,\varrho}\, \partial_{,\varrho}\,, \tag{3.20}$$

wobei $\partial_{,\varrho}$ die koordinatenkovariante Ableitung der linearen Feldtheorie bedeutet.

§ 4. Anwendung

Um die eben entwickelte Symbolik für das Wirkungsprinzip (1.5) verwerten zu können, empfiehlt es sich, zu setzen

$$\underset{H}{W} \equiv H\,; \quad \underset{M}{W} \equiv M\,, \tag{4.1}$$

so dass das Prinzip die Gestalt

$$W \equiv \varkappa^{-1}\, \underset{H}{W} + \omega\, \underset{M}{W} \tag{4.2}$$

annimmt. Die aus der Variation der $g^{\lambda,}_{\ ,\mu}$ fliessenden Gleichung lauten dann

$$U_{\lambda\mu} \equiv \varkappa^{-1}\, \underset{H}{U_{\lambda\mu}} + \omega\, \underset{M}{U_{\lambda\mu}} = 0\,, \tag{4.3a}$$

$$V_{\lambda\mu} \equiv \varkappa^{-1}\, \underset{H}{V_{\lambda\mu}} + \omega\, \underset{M}{V_{\lambda\mu}} = 0\,. \tag{4.3b}$$

Da uns die Terme $\underset{H}{U_{\lambda\mu}}$ und $\underset{H}{V_{\lambda\mu}}$ von der Bearbeitung des Prinzips (1.2) her schon zur Verfügung stehen, reduziert sich unsere Aufgabe auf die Ermittlung der Terme $\underset{M}{U_{\lambda\mu}}$ und $\underset{M}{V_{\lambda\mu}}$, sowie der aus der Variation der $\Phi_{,\varrho}$ entspringenden Differentialgleichungen. Wir müssen also zuerst

$$\mathfrak{W}_{\lambda,}^{\ ,\mu} \equiv -\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\lambda,}_{\ ,\mu}} \equiv -\underset{M}{\mathfrak{T}}{}_{\lambda,}^{\ ,\mu} \tag{4.4}$$

berechnen gestützt auf

$$\mathfrak{M} \equiv \frac{1}{4}\, e^\alpha\, e^\beta\, F_{\alpha\beta}\, F_{\alpha\beta}\, g \tag{4.5}$$

unter Beachtung von (1.8) und der Formeln

$$\frac{\partial g}{\partial g^{\lambda,}_{\ ,\mu}} = g\, g_{\lambda,}^{\ ,\mu}\,, \qquad \frac{\partial g_{\alpha,}^{\ ,\beta}}{\partial g^{\lambda,}_{\ ,\mu}} = -\, g_{\lambda,}^{\ ,\beta}\, g_{\alpha,}^{\ ,\mu}\,. \tag{4.6}$$

Man findet

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\lambda,}_{\ ,\mu}} = F_{\lambda\alpha}\, F^{\alpha\beta}\, g\, g_{\beta,}^{\ ,\mu} + \frac{1}{4}\, F_{\alpha\beta}\, F^{\alpha\beta}\, g\, g_{\lambda,}^{\ ,\mu}\,, \tag{4.7}$$

und durch Symmetrisierung ergibt sich

$$\underset{M}{U_{\lambda\mu}} \equiv e^{\alpha}\, F_{\lambda\alpha}\, F_{\mu\alpha} - \frac{1}{4}\, e_{\lambda\mu}\, F_{\alpha\beta}\, F^{\alpha\beta} \equiv -\underset{M}{T_{\lambda\mu}} \tag{4.8a}$$

$$\underset{M}{V_{\lambda\mu}} \equiv 0\,. \tag{4.8b}$$

Da nun nach (3.19) auch $\underset{H}{V_{\lambda\mu}} \equiv 0$ gilt, reduziert sich (4.3) auf die *Gravitationsgleichungen*

$$\boxed{U_{\lambda\mu} \equiv \varkappa^{-1}\, \underset{H}{U_{\lambda\mu}} + \omega\, \underset{M}{U_{\lambda\mu}} = 0}\,, \tag{4.9}$$

wobei die Terme $\underset{H}{U_{\lambda\mu}}$ uns von früher her bekannt und die $\underset{M}{U_{\lambda\mu}}$ durch (4.8a) gegeben sind.

Die Berechnung des Effekts der Variation der $\Phi_{,s}$ verläuft in enger Analogie zur quadratischen Feldtheorie und liefert

$$\boxed{\frac{\partial(g\, F^{,\lambda\mu})}{\partial x^{\mu}} = 0}\,, \tag{4.10}$$

also das erste Maxwellsche System für das Vakuum.

Schliesslich sei noch der Formenenergietensor des Gesamtfeldes notiert, nämlich

$$T_{\lambda\mu} = \underset{g}{T_{\lambda\mu}} + \underset{e}{T_{\lambda\mu}} \tag{4.11}$$

mit

$$\underset{g}{T_{\lambda\mu}} \equiv \varkappa^{-1}\, \underset{H}{T_{\lambda\mu}}\,;\quad \underset{e}{T_{\lambda\mu}} \equiv \omega\, \underset{M}{T_{\lambda\mu}}\,, \tag{4.11a}$$

wobei $\underset{H}{T_{\lambda\mu}}$ gemäss (1.2) aus der Tafel (3.18) kombiniert werden muss.

§ 5. Statisch kugelsymmetrisches Feld

Wir verwenden genau dieselbe Basis wie im Fall der ungeladenen Masse [5]), die mit den räumlichen Polarkoordinaten

$$x^1 = r, \quad x^2 = \vartheta, \quad x^3 = \psi \tag{5.1}$$

zum Linienelement

$$ds^2 = c^2\, \mathfrak{f}^2\, dt^2 - h^2\, dr^2 - r^2\, (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\psi^2) \tag{5.2}$$

führt, wobei gilt

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(r)\,;\quad h = h(r)\,. \tag{5.3}$$

[5]) A. a. O. [1]), siehe §3.

Eine formale Erleichterung gegenüber der früheren Rechnung erzielt man durch Einführung der Logarithmen

$$\varphi \equiv \mathrm{Lg}\,|\,\mathfrak{f}\,|\,; \quad \eta \equiv \mathrm{Lg}\,|\,h\,|\,. \tag{5.4}$$

Mit

$$k \equiv h - 1 \tag{5.5}$$

erhalten wir dann folgende Tafel für die nicht verschwindenden und als Formen-tensoren geschriebenen Gravitationsfeldstärken:

$$\mathfrak{f}_{0k0} \equiv \frac{1}{2}\,\varphi'\,h^{-1}\,t_{k,}^{,1}\,, \quad \mathfrak{f}_{ikl} \equiv -\frac{1}{2}\,r^{-1}\,h^{-1}\,k\,(\delta_{ik}\,t_{l,}^{,1} - \delta_{il}\,t_{k,}^{,1})\,, \quad \mathfrak{f}_i \equiv \frac{1}{2}\,h^{-1}\,(\varphi' - 2\,r^{-1}\,k)\,t_{i,}^{,1}\,, \tag{5.6}$$

wobei der Strich die Ableitung nach r bedeutet. Für das Vektorpotential machen wir den statischen Ansatz

$$\phi_{,0} \equiv \phi\,(r)\,; \; \phi_{,i} \equiv 0 \quad (i = 1, 2, 3)\,, \tag{5.7}$$

und für die nicht verschwindenden elektromagnetischen Feldstärken erhalten wir

$$F_{,10} \equiv -\,F_{,01} \equiv \phi' \quad F_{i0,} \equiv -\,F_{0i,} \equiv \mathfrak{f}^{-1}\,h^{-1}\,\phi'\,t_{i,}^{,1}\,. \tag{5.8}$$

Für die elektromagnetische Wirkungsfunktion ergibt sich

$$M \equiv -\frac{1}{2}\,\mathfrak{f}^{-2}\,h^{-2}\,\phi'^{\,2}\,, \tag{5.9}$$

und für die nichtverschwindenden Komponenten des zugehörigen Energietensors erhält man

$$\underset{e}{T}_{00} \equiv \frac{1}{2}\,\omega\,\mathfrak{f}^{-2}\,h^{-2}\,\phi'^{\,2}\,, \qquad \underset{e}{T}_{ik} \equiv \frac{1}{2}\,\delta_{ik}\,\omega\,\mathfrak{f}^{-2}\,h^{-2}\,\phi'^{\,2} - \omega\,\mathfrak{f}^{-2}\,h^{-2}\,\phi'^{\,2}\,t_{i,}^{,1}\,t_{k,}^{,1}\,. \tag{5.10}$$

Jetzt sind wir imstande, die Gravitationsgleichungen (4.9) explizite anzugeben. Es sind deren drei:

$$\varkappa^{-1}\,h^{-2}\left[2\,r^{-1}\,\eta' + r^{-2}\,(h^2 - 1)\right] + \frac{1}{2}\,\omega\,h^{-2}\,\mathfrak{f}^{-2}\,\phi'^{\,2} = 0\,, \tag{5.11$_1$}$$

$$\varkappa^{-1}\,h^{-2}\left[\varphi'' + \varphi'^{\,2} - \eta'\,\varphi' + r^{-1}\,(\varphi' - \eta')\right] + \frac{1}{2}\,\omega\,h^{-2}\,\mathfrak{f}^{-2}\,\phi'^{\,2} = 0\,, \tag{5.11$_2$}$$

$$\varkappa^{-1}\,h^{-2}\left[\varphi'' + \varphi'^{\,2} - \eta'\,\varphi' - r^{-1}\,(\varphi' + \eta') + r^{-2}\,(h^2 - 1)\right] + \omega\,h^{-2}\,\mathfrak{f}^{-2}\,\phi'^{\,2} = 0\,. \tag{5.11$_3$}$$

Das System (4.10) dagegen reduziert sich auf die einzige Gleichung

$$(\mathfrak{f}^{-1}\,h^{-1}\,r^2\,\phi')' = 0\,. \tag{5.12}$$

Sie liefert das intermediäre Integral

$$\phi' = -\,b\,\mathfrak{f}\,h\,r^{-2}\,, \tag{5.13}$$

vermittels dessen ϕ aus den Gravitationsgleichungen eliminiert werden kann, so dass 3 Gleichungen zur Bestimmung der 2 Funktionen $\mathfrak{f}\,(r)$ und $h(r)$ vorliegen. Dieselben erweisen sich als verträglich, und die auf die Forderung «Lichtgeschwindigkeit im Unendlichen $= c$» normierte Lösung lautet:

$$\mathfrak{f} \equiv \left(1 - 2\,a\,r^{-1} - \frac{1}{2}\,\omega\,\varkappa\,b^2\,r^{-2}\right)^{1/2}\,, \quad h \equiv \mathfrak{f}^{-1}\,. \tag{5.14}$$

Somit ergibt sich aus (5.13) das Potential

$$\phi = \frac{b}{r} \,. \tag{5.15}$$

Setzt man jetzt $\omega = -1$, so erhält man aus (5.14) die seit bald 50 Jahren bekannte Lösung der quadratischen Feldtheorie. Der wesentliche Zusatz der linearen Feldtheorie besteht nun darin, dass sie eine absolut invariante Totalenergie liefert.

Durch Berechnung der Kombination

$$\varkappa \underset{g}{T_{00}} = \frac{1}{2} \underset{1}{T_{00}} + \underset{2}{T_{00}} - 2 \underset{3}{T_{00}}$$

aus der Tafel (3.18) gewinnt man zuerst

$$\underset{g}{T_{00}} = \varkappa^{-1} r^{-2} h^{-2} k^2 \,, \tag{5.16}$$

hierauf wegen

$$g = r^2 \mathfrak{f}\, h \sin\vartheta \;;\; g_{0,}^{\,,0} = \mathfrak{f}^{-1}$$

und

$$\underset{g}{\mathfrak{T}_{0,}^{\,,0}} = \underset{g}{T_{00}}\, g_{0,}^{\,,0}\, g$$

die gemischte Komponente

$$\underset{g}{\mathfrak{T}_{0,}^{\,,0}} = \varkappa^{-1} r^{-2} h^{-1} (h-1)^2 \sin\vartheta \tag{5.17}$$

der Gravitationsenergiedichte.

Entsprechend gilt

$$\underset{e}{\mathfrak{T}_{0,}^{\,,0}} = \underset{e}{T_{00}}\, g_{0,}^{\,,0}\, g \,,$$

und wegen (5.10) folgt

$$\underset{e}{\mathfrak{T}_{0,}^{\,,0}} = \frac{1}{2}\, \omega\, b^2 r^{-2} h \sin\vartheta \tag{5.18}$$

für die elektromagnetische Energiedichte. Für die totale Energiedichte können wir daher schreiben

$$\boxed{\mathfrak{T}_{0,}^{\,,0} = \mathfrak{f}^{-1} \left[\varkappa^{-1} (\mathfrak{f}-1)^2 + \frac{1}{2}\, \omega\, b^2 r^{-2}\right] \sin\vartheta \,.} \tag{5.19}$$

Die Totalenergie des Gesamtfeldes wird daher gegeben durch das Integral

$$E = \int\limits_{a_1}^{\infty} \int\limits_{0}^{\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \mathfrak{T}_{0,}^{\,,0}\, d\psi\, d\vartheta\, dr \,, \tag{5.20}$$

wobei a_1 den Gravitationsradius, d.h. die grösste positive Nullstelle von f bedeutet.

Für die zwischen a_1 und einem grösseren Radius r liegende Energie ergibt die Berechnung

$$E^r_{a_1} = 8\,\pi\,\varkappa^{-1}\left[\left|\sqrt{\varrho^2 - 2\,a\,\varrho - \frac{1}{2}\,\omega\,\varkappa\,b^2}\right| - \varrho\right]_{a_1}^{r} \tag{5.21}$$

mit

$$a_1 = a + \left|\sqrt{a^2 + \frac{1}{2}\,\omega\,\varkappa\,b^2}\right| \qquad a_2 = a - \left|\sqrt{a^2 + \frac{1}{2}\,\omega\,\varkappa\,b^2}\right| . \tag{5.22}$$

Als expliziten Wert erhält man

$$E^r_{a_1} = 8\,\pi\,\varkappa^{-1}\left\{a + \left|\sqrt{a^2 + \frac{1}{2}\,\omega\,\varkappa\,b^2}\right| - \frac{2\,a\,r + (1/2)\,\omega\,\varkappa\,b^2}{r + \left|\sqrt{r^2 - 2\,a\,r - (1/2)\,\omega\,\varkappa\,b^2}\right|}\right\}. \tag{5.23}$$

Der Grenzübergang $r \to \infty$ liefert daher die behauptete Formel (1.3):

$$\boxed{E = 8\,\pi\,\varkappa^{-1}\left|\sqrt{a^2 + \frac{1}{2}\,\omega\,\varkappa\,b^2}\right| .} \tag{5.24}$$

Die eventuelle Wahl der reellen Einheit ω nötigt zu einer auch die Grundlagen berührenden Diskussion, die im nächsten § Platz finden soll.

§ 6. Diskussion

Um die Übersicht zu erleichtern, nummeriere ich die zu diskutierenden Fragen.

1. Das Prinzip (1.5) ist unvollständig, weil es zur Bestimmung der 20 Funktionen $g^{\lambda,}{}_{,\mu}$; $\Phi_{,\lambda}$ nur 14 Gleichungen liefert. Die 6 antisymmetrischen Gleichungen (4.3b) sind nämlich, wie wir gesehen haben, ausnahmslos identisch erfüllt. Wenn sich in unserer konkreten Aufgabe trotzdem eine eindeutig bestimmte Lösung ergab, so ist dies nur der hohen Symmetrie des statisch kugelsymmetrischen Ansatzes zu verdanken.

Bei allgemeinen Erwägungen müssen wir uns also immer die Notwendigkeit eines Ersatzes für die 6 Gleichungen (4.3b) vor Augen halten.

2. Unterdrücken wir in (4.3a) den Term $\underset{M}{U}_{\lambda\mu}$, so erhalten wir in

$$\underset{H}{U}_{\lambda\mu} = 0 \tag{6.1}$$

die aus dem Prinzip (1.2) fliessenden Feldgleichungen. Dieselben sind, wie schon erwähnt, identisch mit den Einsteinschen Vakuumsgleichungen. Unter Benutzung von Koordinatenzeigern kann diese Identität mit Hilfe der in § 3 eingeführten Bezeichnungen folgendermassen expliziert geschrieben werden:

$$\underset{H}{U}_{,\lambda\mu} \equiv \underset{H}{t}_{,\lambda\mu} - \underset{H}{T}_{,\lambda\mu} \equiv R_{,\lambda\mu} - \frac{1}{2}\,G_{,\lambda\mu}\,R = 0\,. \tag{6.2}$$

Beim Übergang zu den entsprechenden phänomenologischen Gleichungen ergibt sich nun ein Unterschied zwischen der qudratischen und der linearen Feldtheorie. Im ersten Falle ergab der approximative Vergleich der Gravitationsgleichungen mit der Poissonschen Differentialgleichung bekanntlich das System

$$R_{,\lambda\mu} - \frac{1}{2} G_{,\lambda\mu} R = - \varkappa \varrho c^2 u_{,\lambda} u_{,\mu} , \tag{6.3}$$

wobei ϱ die Massendichte und $u_{,\lambda}$ die Vierergeschwindigkeit bedeutet.

Im zweiten Falle wird man auf

$$\underset{H}{t}_{,\lambda\mu} - \underset{H}{T}_{,\lambda\mu} = \varkappa \varrho c^2 u_{,\lambda} u_{,\mu} \tag{6.4}$$

geführt, weil $\underset{H}{T}_{,00}$ das Vorzeichen des Gravitationsradius hat. Derselbe muss aber im Vakuumsfalle positiv gewählt werden, damit die Gravitationsenergie endlich bleibt.

Dass die hiermit festgestellte Differenz der beiden Theorien bei der Erfahrungskontrolle keine Rolle spielt, ersieht man am besten aus folgendem Argument: Die auf das Verschwinden der Divergenz der linken Seite von (6.3) sich stützende Herleitung der phänomenologischen Bewegungsgleichungen ist absolut invariant und unabhängig vom Vorzeichen von $\varkappa$.

3. Es ist jetzt möglich, das Vorzeichen von ω zu diskutieren. Da das endgültige Vorzeichen der Energie eine Konventionssache ist, können wir, in Übereinstimmung mit (6.4), bei unserem positiven $\varkappa$ verbleiben.

Für die Diskussion wegleitend muss natürlich das Prinzip der Äquivalenz von Masse und Energie sein:

$$m = E c^{-2} . \tag{6.5}$$

Wenden wir uns jetzt zu der in Frage stehenden Alternative.

α) $\omega = +1$: Beide Energiearten haben nach (5.19) das gleiche Vorzeichen. Aus (5.24) und (5.22) folgt

$$E = 8 \pi \varkappa^{-1} \left| \sqrt{a^2 + \frac{1}{2} \varkappa b^2} \right| , \tag{6.7α₁}$$

$$a_1 = a + \left| \sqrt{a^2 + \frac{1}{2} \varkappa b^2} \right| \qquad a_2 = a - \left| \sqrt{a^2 + \frac{1}{2} \varkappa b^2} \right| . \tag{6.7α₂}$$

Dieser Fall entspricht zweifellos der ursprünglichen Intention Einsteins, gehört aber, wegen des oben beschriebenen Vorzeichenwechsels von $\varkappa$, nicht zur klassischen Lösung. Er liefert also für jedes reelle a und b eine endliche Energie. Berechnet man, wie es bis anhin nicht anders möglich war, die Energie ohne Berücksichtigung der Gravitation, so ergibt sich bekanntlich in keinem Falle ein endlicher Wert.

β) $\omega = -1$: Die beiden Energiearten haben verschiedenes Vorzeichen, und es folgt

$$E = 8 \pi \varkappa^{-1} \left| \sqrt{a^2 - \frac{1}{2} \varkappa b^2} \right| , \tag{6.7β₁}$$

$$a_1 = a + \left| \sqrt{a^2 - \frac{1}{2} \varkappa b^2} \right| \qquad a_2 = a - \left| \sqrt{a^2 - \frac{1}{2} \varkappa b^2} \right| . \tag{6.7β₂}$$

Er liefert für jedes positive

$$a \geqslant \left| \sqrt{\frac{1}{2} \varkappa b^2} \right| \tag{6.7β_3}$$

und jedes reelle b eine endliche Energie. Der Fall gehört insofern zur klassischen Lösung, als dieselbe ebenfalls die Gravitationsradien (6.7β_2) besitzt. In der Formel (6.7β_1) blieb die klassische Lösung jedoch auf $a = 0$ beschränkt, so dass es den Anschein hatte, auch die allgemeine Relativitätstheorie sei nicht imstande, eine endliche Energie zu liefern.

Wenn man nun in den gewonnenen Formeln versuchsweise die Elementarladung $b = e$ einführt, so erhält man aus (6.7 α_1) für $a = 0$ als kleinste Energie

$$E_0 = 8 \pi \varkappa^{-1} a_0 , \tag{6.8}$$

wo

$$a_0 = \left| \sqrt{\frac{1}{2} \varkappa e^2} \right| \sim 10^{-33} \text{ cm} , \tag{6.9}$$

den sogenannten Gravitationsradius des Elektrons darstellt, der zu ca. 10^{20} Elektronenmassen äquivalent ist.

Diese Schwierigkeit besteht im Falle β) nicht, denn aus (6.7 β_1) erhält man für $a = a_0$ die kleinste Energie zu

$$E_0 = 0 . \tag{6.8}$$

Doch wäre es verfrüht, schon jetzt eine Entscheidung zu treffen. Die Wirkungsfunktion (1.6) der Vakuumselektrodynamik sollte zuerst in der Weise ergänzt werden, dass sie einen feldmässigen Ersatz für den in (4.10) fehlenden Elektronenstrom liefert.