

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 44 (1971)

Heft: 4

Artikel: Der phänomenologische Energietensor im Rahmen der linearen Feldtheorie

Autor: Scherrer, Willy

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-114300>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 19.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Der phänomenologische Energietensor im Rahmen der linearen Feldtheorie

von **Willy Scherrer**

Bern, Justingerweg 18

(29. I. 71)

Zusammenfassung. Der phänomenologische Energietensor der Einsteinschen Gravitationstheorie kann kovariant in die lineare Feldtheorie eingeordnet werden. Die Anwendung auf eine ruhende, homogene und inkompressible Flüssigkeitskugel ergibt eine Lösung, die sich von der entsprechenden Schwarzschild'schen Lösung im wesentlichen nur dadurch unterscheidet, dass der totale Energietensor in absolut kovarianter Gestalt erscheint. Durch die Berechnung der Totalenergie wird die Äquivalenz von Energie und Masse mit hoher Genauigkeit bestätigt.

In einem Anhang wird dargelegt, dass der Einsteinsche Gravitationstensor in der linearen Feldtheorie exakt enthalten ist.

§ 1. Einleitung

Die lineare Feldtheorie liefert Energie und Impuls des Gravitationsfeldes von vorneherein in Gestalt eines Tensors. Insbesondere kann man zeigen, dass die Totalenergie eines statischen und kugelsymmetrischen Gravitationsfeldes genau die Einsteinsche Formel [1] ergibt:

$$E = m c^2. \quad (1)$$

Trotzdem ist es mir nicht gelungen, zu beweisen, dass man ohne den phänomenologischen Energietensor auskommen kann. Daher soll im Folgenden gezeigt werden, dass dieser Tensor in die lineare Feldtheorie eingeordnet werden kann, derart, dass auch die Totalenergie Tensorgestalt besitzt. Weiter kann man dann schliessen, dass auch Einsteins ponderomotorische Gravitationskraft aus den Feldgleichungen folgt.

§ 2. Die Basis

Den einfachsten Zugang zur linearen Feldtheorie erhält man, wenn man von den *Koordinaten*

$$(y^0, y^1, y^2, y^3) \quad (1)$$

einer *Lorentzwelt* ausgeht. Dabei bezeichnet y^0 die Zeit, falls man die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ setzt.

Das zugehörige Linienelement ist

$$ds^2 = e_\alpha dy^\alpha dy^\alpha, \quad (2)$$

wobei

$$e_{\lambda\mu} = e_{\lambda\lambda} \delta_\mu^\lambda \quad (3)$$

die Eisenhardtsche Diagonalmatrix darstellt. Abkürzend haben wir also in (2)

$e_{\alpha\alpha} = e_\alpha$ gesetzt.

Jetzt führen wir gemäss

$$y^\lambda = y^\lambda(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (4)$$

krummlinige Koordinaten – «*Parameter*» – ein und bilden die «*Trägheitsmatrix*»

$$t^{\lambda, \mu} \equiv \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\mu} \quad (5_1)$$

und deren «*Transverse*»

$$t_{\lambda, \mu} \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\lambda}. \quad (5_2)$$

Das Linienelement (2) geht damit über in

$$ds^2 = L_{,\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (6)$$

mit

$$L_{,\mu\nu} \equiv e_\alpha t^{\alpha, \mu} t^{\alpha, \nu}. \quad (6')$$

Die Leitidee der Theorie kann nun wie folgt beschrieben werden: Die Gedanken des Beobachters bewegen sich in einer «*Tangentialwelt*» und deren Koordinaten y^λ gelten höchstens im Kleinen. Für die wirkliche Welt müssen jedoch die totalen Differentiale

$$dy^\lambda \equiv t^{\lambda, \mu} dx^\mu \quad (7_0)$$

durch allgemeine lineare Differentialformen

$$g^\lambda \equiv g^{\lambda, \mu} dx^\mu \quad (7_1)$$

ersetzt werden.

Das Linienelement (2) geht damit über in

$$ds^2 = e_\alpha g^{\alpha, \mu} g^{\alpha, \nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (8)$$

explizit also in

$$ds^2 = G_{,\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (9)$$

mit

$$G_{,\mu\nu} \equiv e_\alpha g^{\alpha, \mu} g^{\alpha, \nu}. \quad (9')$$

In diesem Sinne wird eine Riemannmetrik induziert.

In der «wirklichen» Welt gibt es also keine Koordinaten y^λ im elementaren Sinn des Wortes, sondern nur noch Parameter x^λ .

Die quadratische Feldtheorie stützt sich ausschliesslich auf die quadratische Differentialform (9) (ohne (9')).

Die lineare Feldtheorie dagegen legt die Differentialformen (7₁) zugrunde. Ihre vollständige Durchführung ist aber nur möglich, wenn man neben der Parametergruppe eine lineare Formengruppe einführt. Für diesen Zweck verdient offenbar die Lorentzgruppe den Vorrang.

Die formale Basis der linearen Feldtheorie bildet also die Matrix

$$\|g^{\lambda, \mu}\| \equiv \begin{vmatrix} g_{0,0} & \cdot & \cdot & g_{0,3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{3,0} & \cdot & \cdot & g_{3,3} \end{vmatrix} \quad (10)$$

mit der Determinante

$$g \equiv \text{Det} \|g^{\lambda, \mu}\| \neq 0. \quad (10')$$

Die Transverse zu (10) ist eindeutig bestimmt durch

$$\|g_{\lambda, \mu}\| \equiv (\|g^{\lambda, \mu}\|^{-1})'. \quad (11)$$

Die Zeiger rechts vom Komma beziehen sich auf die Parametergruppe, diejenigen links auf die Formengruppe. Durch diese Angaben ist die Theorie im Prinzip bestimmt.

Die massgebenden Feldstärken liefert der 24gliedrige Tensor

$$f^{\lambda, \dots}_{\cdot, \mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g^{\lambda, \nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g^{\lambda, \mu}}{\partial x^{\nu}} \right). \quad (12_1)$$

Je nach Bedarf kann man denselben schreiben als einen Formtensor gemäss

$$f^{\alpha \dots}_{\cdot \beta \gamma} \equiv g_{\beta, \mu} g_{\gamma, \nu} f^{\alpha, \dots}_{\cdot, \mu\nu}, \quad (12_2)$$

oder als reinen Parametertensor gemäss

$$f^{\lambda, \dots}_{\cdot, \mu\nu} \equiv g_{\alpha, \lambda} f^{\alpha, \dots}_{\cdot, \mu\nu}. \quad (12_3)$$

Durch Verjüngung von (12₂) erhält man den Formenvektor

$$f_{\alpha} \equiv f^{\beta \dots}_{\cdot \alpha \beta} \quad (13_1)$$

und desgleichen aus (12₃) den Parametervektor

$$f_{, \lambda} \equiv f^{\mu \dots}_{\cdot, \lambda \mu}, \quad (13_2)$$

und man kann beweisen, dass gilt

$$f_{\alpha} \equiv g_{\alpha, \lambda} f_{, \lambda}. \quad (13_3)$$

Man kann jetzt drei Totalinvarianten bilden, nämlich

$$H_1 \equiv f^{\alpha \dots}_{\alpha \beta \gamma} f^{\alpha \beta \gamma}_{\dots}, \quad (14_1)$$

$$H_2 \equiv f^{\alpha \dots}_{\alpha \beta \gamma} f^{\gamma \beta \alpha}_{\dots}, \quad (14_2)$$

$$H_3 \equiv f_{\alpha} f^{\alpha}. \quad (14_3)$$

Die allgemeine Wirkungsfunktion, die innerhalb des bewährten Rahmens bleibt, hat daher die Gestalt

$$W \equiv \underset{0}{A} + \underset{1}{A} \underset{1}{H} + \underset{2}{A} \underset{2}{H} + \underset{3}{A} \underset{3}{H}. \quad (15)$$

Dabei sind die Λ Konstanten, Λ insbesondere ist die kosmologische Konstante.

0

Methodisch wichtig ist noch folgende Bemerkung. Man kann die Basismatrix immer darstellen als Produkt aus einer vorgegebenen Trägheitsmatrix und einem Parametertensor 2. Stufe gemäss der Gleichung

$$g^{\lambda, \mu} \equiv t^{\lambda, \alpha} h^{\alpha, \mu} . \tag{16_1}$$

Aus ihr folgt

$$g_{\lambda, \mu} \equiv t_{\lambda, \alpha} \bar{h}^{\alpha, \mu} . \tag{16_2}$$

Dabei bedeutet $\bar{h}^{\alpha, \mu}$ die Transverse von $h^{\alpha, \mu}$. Diese Darstellung ermöglicht es, Lösungen von vorgeschriebener Symmetrie zu ermitteln.

Meine früheren Untersuchungen haben ergeben, dass man die Einsteinschen Vakuumgleichungen genau dann erhält, wenn man (15) wie folgt spezialisiert

$$W \equiv -\lambda + \frac{1}{2} H_1 + H_2 - 2 H_3 . \tag{17}$$

Für $\lambda > 0$ ist die Krümmung des Raumes positiv.

§ 3. Die Feldgleichungen

Da die durch die kosmologische Konstante bedingte Ergänzung leicht anzubringen ist, verzichten wir darauf, sie weiter mitzuführen. Wir setzen also

$$W \equiv \frac{1}{2} H_1 + H_2 - 2 H_3 \tag{1}$$

und notieren die zugeordnete Wirkungsichte

$$\mathfrak{B} \equiv W g . \tag{2}$$

Die zu (2) gehörigen Vakuumgleichungen haben dann folgende Gestalt

$$\mathfrak{B}_{\lambda, \mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \left(\frac{\partial g^{\lambda, \mu}}{\partial x^\nu} \right)} \right) - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial g^{\lambda, \mu}} = 0 . \tag{3}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir ein den «Quellentensor»

$$s_{\lambda, \mu\nu} \equiv \frac{\partial H}{\partial \left(\frac{\partial g^{\lambda, \mu}}{\partial x^\nu} \right)} , \tag{4_1}$$

sowie den Tensor der relativen Vakuumenergie

$$S_{\lambda, \mu} \equiv g^{-1} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial g^{\lambda, \mu}} \equiv \frac{\partial W}{\partial g^{\lambda, \mu}} + g_{\lambda, \mu} W . \tag{4_2}$$

Entsprechend der Kombination (1) können wir daher schreiben

$$s_{\lambda, \mu\nu} \equiv \frac{1}{2} s_{\lambda, \mu\nu}^1 + s_{\lambda, \mu\nu}^2 - 2 s_{\lambda, \mu\nu}^3 \tag{5_1}$$

und

$$S_{\lambda, \mu} \equiv \frac{1}{2} S_{1, \mu}^{\lambda, \mu} + S_{2, \mu}^{\lambda, \mu} - 2 S_{3, \mu}^{\lambda, \mu}, \quad (5_2)$$

wobei die Einzelkomponenten aus folgender Tabelle zu entnehmen sind

$$\left. \begin{aligned} S_{1, \mu}^{\lambda, \mu\nu} &\equiv -2 f_{\lambda, \mu}^{\mu\nu}, \\ S_{2, \mu}^{\lambda, \mu\nu} &\equiv g_{\lambda, \alpha}^{\mu\nu} (f_{\mu, \alpha}^{\nu \cdot} - f_{\nu, \alpha}^{\mu \cdot}), \\ S_{3, \mu}^{\lambda, \mu\nu} &\equiv g_{\lambda, \mu}^{\nu} f^{\nu} - g_{\lambda, \nu}^{\mu} f^{\mu}. \end{aligned} \right\} (6_1)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{1, \mu}^{\lambda, \mu} &\equiv -4 g_{\lambda, \gamma}^{\nu} f_{\alpha\beta\gamma}^{\mu \cdot \cdot \cdot} f^{\alpha\beta\mu} + g_{\lambda, \mu}^{\nu} H_1 \\ S_{2, \mu}^{\lambda, \mu} &\equiv -2 g_{\lambda, \gamma}^{\nu} f_{\alpha\beta\gamma}^{\mu \cdot \cdot \cdot} f^{\mu\beta\alpha} + 2 g_{\lambda, \gamma}^{\nu} f_{\alpha\beta\gamma}^{\mu \cdot \cdot \cdot} f^{\beta\mu\alpha} + g_{\lambda, \mu}^{\nu} H_2 \\ S_{3, \mu}^{\lambda, \mu} &\equiv 2 g_{\lambda, \alpha}^{\mu} f_{\mu, \alpha}^{\beta} f^{\beta} - 2 f_{\lambda, \mu}^{\beta} f^{\mu} + g_{\lambda, \mu}^{\nu} H_3. \end{aligned} \right\} (6_2)$$

Unter Einführung der zu den Tensoren (4₁) und (4₂) gehörigen Dichten erhalten nun die Vakuumgleichungen (3) folgende Gestalt:

$$\mathfrak{B}_{\lambda, \mu} \equiv \frac{\partial \mathfrak{S}_{\lambda, \mu}^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} - \mathfrak{S}_{\lambda, \mu}^{\mu} = 0. \quad (7)$$

Aus einer meiner früheren Arbeiten [2] kann man nun folgern, dass die Gleichungen (7) äquivalent sind mit den Einsteinschen Vakuumgleichungen der Gravitation. Formelmässig ausgedrückt besteht nämlich folgende Identität:

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_{\lambda, \mu}^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} - \mathfrak{S}_{\lambda, \mu}^{\mu} \equiv \mathfrak{R}_{\lambda, \mu}^{\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda, \mu}^{\nu} \mathfrak{R}. \quad (8)$$

Dabei stellt die rechte Seite von (8) die Einsteinsche Gravitationstensordichte dar, geschrieben als gemischte Tensordichte $\mathfrak{G}_{\lambda, \mu}^{\mu}$ der linearen Feldtheorie.

Aus (7) und (8) folgen unmittelbar die Einsteinschen Vakuumgleichungen der Gravitation.

$$\mathfrak{R}_{\lambda, \mu}^{\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda, \mu}^{\nu} \mathfrak{R} = 0. \quad (9)$$

Um nun Einsteins phänomenologische Gravitationsgleichungen zu erhalten, müssen wir die invariante Massendichte M einführen sowie den Vierervektor der Geschwindigkeit w^{μ} bzw. u_{λ} . Die Gleichungen

$$\mathfrak{R}_{\lambda, \mu}^{\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda, \mu}^{\nu} \mathfrak{R} = -\kappa M c^2 g_{\lambda, \mu} u_{\lambda} w^{\mu} \quad (10)$$

bilden dann das Analogon der Poissonschen Gleichung. Die Verbindung von (8) und (10) ergibt schliesslich die phänomenologischen Gravitationsgleichungen der linearen Feldtheorie:

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_{\lambda, \mu\nu}}{\partial x^\nu} - \mathfrak{S}_{\lambda, \mu} = -\kappa M c^2 g u_\lambda, w^\mu. \quad (11)$$

Schreiben wir diese Gleichungen in der Gestalt

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_{\lambda, \mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\kappa \mathfrak{I}_{\lambda, \mu}, \quad (12_1)$$

so stellt

$$\mathfrak{I}_{\lambda, \mu} \equiv -\kappa^{-1} \mathfrak{S}_{\lambda, \mu} + M c^2 g u_\lambda, w^\mu \quad (12_2)$$

die absolut kovariante und totale Energietensordichte dar, und aus (12₁) folgt unmittelbar der differentielle Erhaltungssatz

$$\frac{\partial \mathfrak{I}_{\lambda, \mu}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (13)$$

Der erste Term der rechten Seite von (12₂) stellt nun offenbar die Energieimpuls-Tensordichte des Gravitationsfeldes dar, die im Rahmen der quadratischen Feldtheorie nicht kovariant gefasst werden kann.

Die Energietensordichte $\mathfrak{I}_{\lambda, \mu}$ setzt sich aus 4 Stromdichten zusammen, von denen jede einzelne einer Lorentzkoordinate y_λ der Beobachterwelt zugeordnet ist. Dem Zeiger $\lambda = 0$ entspricht der Energiestrom im engeren Sinne des Wortes, den übrigen Zeigern drei Impulsströme. Diese Struktur ist ausschlaggebend für das Bestehen von Erhaltungssätzen.

Jetzt stehen wir also vor der Frage, ob die Vakuumgleichungen (7) oder die phänomenologischen Gleichungen (11) der Wirklichkeit besser entsprechen. Wie schon oben erwähnt, sehe ich beim heutigen Stand der Dinge keine Möglichkeit, diese Frage zu beantworten. Ich möchte daher kurz erläutern, dass die Gravitationsstrahlung vielleicht ein brauchbares Kriterium liefert.

In einer meiner späteren Arbeiten [3] habe ich eine kovariante Näherungsmethode entwickelt. Diese Methode wurde in einer Dissertation [4] auf die Wirkungsfunktion (1) angewendet, insbesondere auch zur Ermittlung von ebenen Gravitationswellen. Das Ergebnis ist überraschend: Energie und Impuls haben verschiedenes Vorzeichen! Dies steht im Gegensatz zur elektromagnetischen Strahlung, wo beide Vorzeichen gleich und also gemäss dem Strahlungsdruck positiv sind.

Bei der Berechnung des Vakuumsfalles in [1] gemäss (7) habe ich als Energietensordichte

$$\mathfrak{I}_{\lambda, \mu} \equiv \kappa^{-1} \mathfrak{S}_{\lambda, \mu} \quad (14)$$

angesetzt. Das Ergebnis hat diese Wahl bestätigt, denn als totale Gravitationsenergie erhielt ich den positiven Wert (1) von § 1. Falls man also die Möglichkeit erwägt, die Masse sei nur ein Attribut des Gravitationsfeldes, so trifft die Gleichung (14) gerade das Richtige.

Wenn man jedoch die Strahlung berechnet [4], liefert die Gleichung (14) eine negative Energie und einen positiven Impuls.

Wenden wir uns jetzt zu den phänomenologischen Gleichungen (11), so entnimmt

man aus (12₂) unmittelbar, dass im Grenzfall des Vakuums, also $M \rightarrow 0$, statt (14) die Gleichung

$$\mathfrak{T}_{\lambda,}{}^{\mu} \equiv -\kappa^{-1} \mathfrak{S}_{\lambda,}{}^{\mu} \quad (15)$$

resultiert. Für die Strahlung ergibt sich somit nach [4] eine positive Energie und ein negativer Impuls. Man hätte hier einen «Strahlungszug».

Die Gravitationsstrahlung liefert also ein Kriterium, das die beiden Varianten unterscheidet.

§ 4. Das Schwerfeld einer Flüssigkeitskugel

Um die Einsteinsche Gleichung § 1 (1) im phänomenologischen Falle zu prüfen, eignet sich am besten eine ruhende, homogene und inkompressible Flüssigkeitskugel. Der phänomenologische Energietensor wird gemäss

$$P_{\lambda,}{}^{\mu} \equiv M c^2 u_{\lambda,} u^{\mu} - p g_{\lambda,}{}^{\mu} \quad (1_1)$$

durch ein Glied ergänzt, das den Druck p enthält, und die Gleichungen § 3 (11) gehen über in

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_{\lambda,}{}^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} - \mathfrak{S}_{\lambda,}{}^{\mu} = -\kappa \mathfrak{P}_{\lambda,}{}^{\mu}. \quad (1_2)$$

Als totalen Energietensor haben wir daher jetzt

$$T_{\lambda,}{}^{\mu} \equiv -\kappa^{-1} S_{\lambda,}{}^{\mu} + P_{\lambda,}{}^{\mu}. \quad (1_3)$$

Die Durchführung der Aufgabe gestaltet sich ziemlich umfangreich, da die Komposition der Basismatrix aus Trägheits- und Parametermatrix zum Wesen der Sache gehört.

Ich begnüge mich daher, diejenigen Angaben zusammenzustellen, durch welche der Gang der Rechnung bestimmt wird. Anschliessend sollen die wichtigsten Ergebnisse Platz finden.

1. Die *Trägheitsmatrix* ist nach § 2 (5) bestimmt durch folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} y^0 &= c t; & x^0 &= c t \\ y^1 &= r \sin \vartheta \cos \varphi; & x^1 &= r \\ y^2 &= r \sin \vartheta \sin \varphi; & x^2 &= \vartheta \\ y^3 &= r \cos \vartheta; & x^3 &= \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2_1)$$

2. Die *Parametermatrix* sei gegeben durch

$$\|h_{\lambda,}{}^{\mu}\| = \left\| \begin{array}{cccc} \mathfrak{f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \quad (2_2)$$

und

$$\mathfrak{f} \equiv \mathfrak{f}(r); \quad h \equiv h(r). \quad (2_3)$$

Durch diese beiden Angaben sind nach § 2 ((16₁) und (9)) die *Basismatrix* $g^{\lambda, \mu}$ und der *metrische Tensor* $G_{, \mu \nu}$ bestimmt. Das Linienelement kann daher wie folgt geschrieben werden:

$$S^2 = f^2 c^2 t^2 - (h^2 r^2 + r^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2)). \quad (3)$$

Um aber die Kontrolle der Rechnung zu erleichtern, notiere ich noch die nicht verschwindenden Komponenten des Feldstärketensors, falls man denselben gemäss § 2 (12₃) als reinen Parametertensor schreibt.

$$f_{,1}^0 \equiv \frac{1}{2} f^{-1} f', \quad (4_1)$$

$$f_{,1}^2 \equiv f_{,1}^3 \equiv \frac{1}{2} r^{-1} (1 - h). \quad (4_2)$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass der gemäss § 2 (13₂) zugeordnete Parametervektor $f_{, \lambda}$ nur eine nicht verschwindende Komponente besitzt:

$$f_{,1} \equiv \frac{1}{2} f^{-1} f' + r^{-1} (1 - h). \quad (4_3)$$

Dabei bedeutet der Strich die Ableitung nach r .

3. Jetzt benötigen wir noch die Angaben zur eindeutigen Festlegung des *phänomenologischen Energietensors* (1₁).

Nach Definition gilt

$$u^{\lambda} = \frac{dx^{\lambda}}{ds}. \quad (5_0)$$

Dem Ruhestand entspricht

$$u'^1 = u'^2 = u'^3 = 0. \quad (5_1)$$

Aus (2₁) und (3) folgt daher

$$u'^0 = f^{-1} \quad (5_2)$$

und weiter ergibt sich

$$u_{,0} = f; \quad u_{,0} = 1. \quad (5_3)$$

Die Inkompressibilität wird nach dem klassischen Verfahren gewährleistet durch

$$M c^2 - p = M c^2, \quad (6)$$

wo M die konstante Massendichte bedeutet.

Jetzt haben wir alle Daten beieinander, welche den Gang der Berechnung eindeutig festlegen. Hauptergebnis: Die drei gesuchten Funktionen $f(r)$, $h(r)$ und $p(r)$ liefern genau die klassische Lösung von Schwarzschild [5]. Der Zusatz, den die lineare Feldtheorie liefert, beschränkt sich also auf die Energiewerte, die in der quadratischen Theorie nicht kovariant gefasst werden können.

Bezeichnen wir mit A den Radius der Flüssigkeitskugel, so ist die Länge

$$B = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{3}{\kappa M}} \quad (7)$$

eine obere Schranke für A , und

$$\alpha = \frac{A}{B} \quad (8)$$

eine reine Zahl.

Benutzen wir schliesslich A gemäss

$$r = A \varrho \quad (9_0)$$

als natürliche Längeneinheit, so wird durch

$$0 \leq \varrho < 1 \quad (9_1)$$

das Innere der Flüssigkeitskugel und durch

$$1 < \varrho < \infty \quad (9_2)$$

der Aussenraum durchlaufen.

Dies vorausgeschickt liefert nun die Lösung folgende Ausdrücke für die gesuchten Funktionen.

a) innen:

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{1}{2} (3\sqrt{1-\alpha^2} - \sqrt{1-\alpha^2\varrho}) , \\ h &= \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2\varrho^2}} , \\ p &= M_0 c^2 \frac{\sqrt{1-\alpha^2\varrho^2} - \sqrt{1-\alpha^2}}{3\sqrt{1-\alpha^2} - \sqrt{1-\alpha^2\varrho^2}} . \end{aligned} \right\} (10_a)$$

b) aussen:

$$\left. \begin{aligned} f &= \sqrt{1-\alpha^2\varrho^{-1}} , \\ h &= \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2\varrho^{-1}}} , \\ p &= 0 . \end{aligned} \right\} (10_b)$$

Die Lösung a) geht also auf dem Rande $\varrho = 1$ stetig in die Lösung b) über, wie es sein muss.

Aus (10_b) ergibt sich weiter, dass der für die Beobachtung im Aussenraum massgebende «Gravitationsradius» den Wert

$$2a = \alpha^2 A \quad (11)$$

besitzt.

Zu dieser klassischen Lösung treten nun neu hinzu die Energietensordichten, nämlich

$$\mathfrak{T}_{a_0,0} = \frac{A}{\kappa} \left[\frac{3\alpha^2\varrho^2}{\sqrt{1-\alpha^2\varrho^2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2\varrho^2}} + \sqrt{1-\alpha^2\varrho^2} - 2 \right) \right] \sin\vartheta \quad (12_a)$$

im Innenraum und

$$\mathfrak{T}_{b0,0} = -\frac{A}{\kappa} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2 \rho^{-1}}} + \sqrt{1-\alpha^2 \rho^{-1}} - 2 \right) \sin \vartheta \quad (12_b)$$

im Aussenraum.

Die zugehörigen Integralwerte sind

$$E_a = 4 \pi \int_0^1 \mathfrak{T}_{a0,0} d\rho = \frac{16 \pi A \alpha^2}{\kappa (1 + \sqrt{1-\alpha^2})^2} \quad (13_a)$$

und

$$E_b = 4 \pi \int_1^\infty \mathfrak{T}_{b0,0} d\rho = -\frac{\alpha^2}{4} E_a. \quad (13_b)$$

Neben diese Werte stellen wir nun das Einsteinsche Energieäquivalent

$$E^* = M c^2, \quad (14_1)$$

wobei M die Masse der Flüssigkeitskugel darstellt. Bezeichnet man also mit V das Volumen der Kugel, so gilt

$$M c^2 = M V. \quad (14_2)$$

Mit Rücksicht auf (7) ergibt sich daher

$$M c^2 = \frac{3 V}{\kappa B^2}. \quad (14_3)$$

Für das Volumen fordert die Metrik (3) die Formel

$$V = 4 \pi \int_0^A h r^2 dr \quad (15_1)$$

und die Berechnung liefert

$$V = \frac{2 \pi A^3}{\alpha^3} \left(\text{Arc sin } \alpha - \alpha \sqrt{1-\alpha^2} \right). \quad (15_2)$$

Gestützt auf (14₃) folgt also

$$M c^2 = \frac{6 \pi A}{\kappa \alpha} \left(\text{Arc sin } \alpha - \alpha \sqrt{1-\alpha^2} \right). \quad (15_3)$$

Führen wir schliesslich in diese Formel den Gravitationsradius (11) ein, so erhalten wir

$$M c^2 = \frac{12 \pi a}{\kappa} \cdot \frac{\text{Arc sin } \alpha - \alpha \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha^3}. \quad (16)$$

Da die Beobachtung am Rande der Flüssigkeitskugel (Sonne) erfolgen muss haben wir diesen Wert mit (13_a) zu vergleichen. Wir führen daher auch hier (11) ein und können schreiben

$$E_a = \frac{8 \pi a}{\kappa} \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}} \right)^2. \quad (17)$$

Da offenbar $\alpha < 1$ sein muss, kann man (16) und (17) nach Potenzen von α^2 entwickeln. Die 0te Näherung liefert genau

$$E_a = M^* c^2 = \frac{8 \pi a}{\kappa}, \quad (18_0)$$

also die Einsteinsche Formel.

Die erste Näherung ergibt

$$E_a = \frac{8 \pi a}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \right), \quad (18_1)$$

und

$$M^* c^2 = \sqrt{\frac{8 \pi a}{\kappa} \left(1 + \frac{3}{10} \alpha^2 \right)}, \quad (18_2)$$

worauf folgt

$$E_a = \left(1 + \frac{1}{5} \alpha^2 \right) M^* c^2. \quad (19)$$

Für die Sonne findet man $\alpha^2 \sim 4 \cdot 10^{-6}$. Die durch (19) gelieferte Erhöhung der Energie ist also nicht beobachtbar.

Die lineare Feldtheorie liefert somit wiederum den Ablenkungswinkel von 1,75" der quadratischen Theorie. Grosses Interesse verdienen daher zwei neue Messungen bei Radiosternen [6]. Sie lieferten die Ablenkungswinkel 1,77" und 1,82", welche verglichen mit den früheren Messungen eine Tendenz zum Einsteinschen Wert anzeigen.

Unter diesen Umständen ist vielleicht zu erwägen, ob eine Verallgemeinerung des Schwarzschildschen Modells auf kompressible Flüssigkeiten eine beobachtbare Modifikation der Gleichung (19) liefert.

Schliesslich wenden wir (19) noch an auf das Neutron. Mit den Annahmen $A = 2 \cdot 10^{-13}$ cm und $m = 5/3 \cdot 10^{-24}$ g findet man $\alpha^2 \sim 10^{-41}$. Praktisch ist also die Einsteinsche Gleichung genau erfüllt, auch wenn man erheblich grössere Werte für A wählt.

§ 5. Schlussbemerkungen

Über das Verhältnis der linearen Feldtheorie (LF) zur quadratischen Feldtheorie (QF) kann man jetzt in Zusammenfassung früherer Ergebnisse folgendes sagen:

Bei Beschränkung auf die Wirkungsfunktion (1) von § 3 liefert die LF alle Aussagen der QF. Darüber hinaus liefert sie einen kovarianten Energietensor, der im statischen Falle Einsteins Äquivalenzgesetz § 1 (1) herzuleiten gestattet. Schliesslich

liefert die LF eine kovariante Näherung für ebene Gravitationswellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen und als Überraschung für Energie und Impuls verschiedene Vorzeichen ergeben. In Ergänzung der am Schluss von § 3 erwogenen Alternative sei noch folgendes bemerkt:

Wenn man Einsteins Vergleich mit der Poissonschen Gleichung ausnahmslos akzeptiert, ergibt sich in beiden Fällen eine positive Strahlungsenergie. Der Schluss auf das Vorzeichen ist aber mathematisch nicht zwingend, weil keine nullte Näherung existiert. Die Alternative kann daher nur durch die Erfahrung entschieden werden. Die Energiedarstellung der LF liefert ein Verfahren, um energetisch unbrauchbare Lösungen der QF auszuschneiden. Das einfachste Beispiel liefern die zylindrischen Gravitationsfelder der QF. Dieselben repräsentieren nach der LF pro Längeneinheit eine unendliche Totalenergie.

Eine explizite Darstellung der Identität § 3 (8) ist daher von Interesse. Sie wird im beigefügten Anhang angegeben und erläutert.

ANHANG

Darstellung des verjüngten Riemannschen Krümmungstensors $R_{,\rho\sigma}$ im Rahmen der linearen Feldtheorie

Diese Darstellung bildet die Grundlage für die fundamentale Identität § 3 (8). Ich habe sie schon 1955 [7] angegeben, allerdings ohne sie auf die Wirkungsfunktion § 2 (17) zu spezialisieren. Aber gerade diese Spezialisierung hat sich 1957 [2] als für alles weitere entscheidend erwiesen. Sie soll daher hier in der in den Arbeiten [1] und [8] bereinigten Zeigerbezeichnung Platz finden.

Der Krümmungstensor $\gamma_{,\cdot\mu\nu}^{\lambda\cdot\cdot\cdot 0}$ der LF ist aus den Dreizeigersymbolen $\gamma_{,\cdot\mu\nu}^{\lambda\cdot\cdot\cdot}$ genau gleich aufgebaut wie der Krümmungstensor $R_{,\cdot\mu\rho\sigma}^{\lambda\cdot\cdot\cdot}$ der QF aus den Dreizeigersymbolen $\Gamma_{,\cdot\mu\nu}^{\lambda\cdot\cdot\cdot}$. Für die Zurückführung der QF auf die LF ausschlagend ist die Identität

$$\Gamma_{,\cdot\mu\nu}^{\lambda\cdot\cdot\cdot} \equiv \gamma_{,\cdot\mu\nu}^{\lambda\cdot\cdot\cdot} + f_{,\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} + f_{,\nu\mu}^{\cdot\cdot\lambda} \quad (1_0)$$

Bezeichnen wir also die kovariante Ableitung in der QF mit $D_{,\lambda}$, in der LF mit $\partial_{,\lambda}$ und definieren wir

$$\Delta_{,\lambda} \equiv D_{,\lambda} - \partial_{,\lambda}, \quad (1_1)$$

so werden durch den Operator

$$D_{,\lambda} \equiv \Delta_{,\lambda} + \partial_{,\lambda} \quad (1_2)$$

die Γ auf die γ reduziert.

Mit der Abkürzung

$$F_{,\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} \equiv f_{,\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} + f_{,\nu\mu}^{\cdot\cdot\lambda} \quad (2)$$

findet man dann

$$\boxed{R_{,\cdot\mu\rho\sigma}^{\lambda\cdot\cdot\cdot} - \gamma_{,\cdot\mu\nu\sigma}^{\lambda\cdot\cdot\cdot} \equiv \partial_{,\sigma} F_{,\mu\rho}^{\cdot\cdot\lambda} - \partial_{,\rho} F_{,\mu\sigma}^{\cdot\cdot\lambda} + F_{,\alpha\sigma}^{\cdot\cdot\lambda} F_{,\mu\rho}^{\cdot\cdot\alpha} - F_{,\alpha\rho}^{\cdot\cdot\lambda} F_{,\mu\sigma}^{\cdot\cdot\alpha}} \quad (3)$$

also eine Γ -freie Darstellung.

Jetzt empfiehlt es sich, gemäss $\lambda = \varrho = \beta$ zu verjüngen. Das Ergebnis kann geschrieben werden in der Gestalt

$$\boxed{R_{,\varrho\sigma} - r_{,\varrho\sigma} \equiv \partial_{,\sigma} F_{,\alpha\varrho}^{\cdot\cdot\alpha} - \partial_{,\alpha} F_{,\varrho\sigma}^{\cdot\cdot\alpha} + F_{,\alpha\varrho}^{\cdot\cdot\beta} F_{,\beta\varrho}^{\cdot\cdot\alpha} - F_{,\beta\alpha}^{\cdot\cdot\beta} F_{,\varrho\sigma}^{\cdot\cdot\alpha}} \quad (4)$$

Alles Weitere verläuft nun ganz im Rahmen der LF. Jetzt zeigt sich ein wesentlicher Unterschied zwischen der LF und der QF.

$$r_{,\varrho\sigma} \equiv r_{,\cdot\varrho}^{\alpha\cdot\cdot\sigma} \quad (5_1)$$

ist asymmetrisch und besitzt einen ebenfalls asymmetrischen Partner

$$s_{,\varrho\sigma} \equiv r_{,\varrho}^{\cdot\alpha\cdot\cdot\sigma}, \quad (5_2)$$

während $R_{,\varrho\sigma}$ symmetrisch und in der QF einzig ist. Die wichtigsten Relationen für die weitere Berechnung sind

$$\partial_{,\sigma} F_{,\alpha\varrho}^{\cdot\cdot\alpha} = r_{,\sigma\varrho} - f_{,\alpha\beta\sigma}^{\cdot\cdot\cdot} f_{,\cdot\cdot\varrho}^{\beta\alpha\cdot} \quad (6_1)$$

und

$$\partial_{,\alpha} F_{,\varrho\sigma}^{\cdot\cdot\alpha} \equiv s_{,\varrho\sigma} + s_{,\sigma\varrho} + f_{,\alpha} F_{,\varrho\sigma}^{\cdot\cdot\alpha} - 2 f_{,\alpha\beta\varrho} f_{,\cdot\cdot\sigma}^{\alpha\beta\cdot}. \quad (6_2)$$

Ihre Eintragung in [4] liefert

$$\boxed{R_{,\varrho\sigma} \equiv r_{,\sigma\varrho} + r_{,\varrho\sigma} - (s_{,\varrho\sigma} + s_{,\sigma\varrho}) - 2 f_{,\alpha} (f_{,\varrho\sigma}^{\cdot\cdot\alpha} + f_{,\sigma\varrho}^{\cdot\cdot\alpha}) - f_{,\varrho\alpha\beta}^{\cdot\cdot\cdot} f_{,\sigma}^{\alpha\beta\cdot} + f_{,\varrho\alpha\beta}^{\cdot\cdot\cdot} f_{,\cdot\cdot\sigma}^{\alpha\beta\cdot} + f_{,\sigma\alpha\beta}^{\cdot\cdot\cdot} f_{,\cdot\cdot\varrho}^{\alpha\beta\cdot} + 2 f_{,\alpha\beta\varrho}^{\cdot\cdot\cdot} f_{,\cdot\cdot\sigma}^{\alpha\beta\cdot}} \quad (7)$$

In einer letzten Etappe haben wir noch die Skalare

$$r \equiv G^{\varrho\sigma} r_{,\varrho\sigma} ; \quad s \equiv G^{\varrho\sigma} s_{,\varrho\sigma} \quad (8_0)$$

zu ermitteln. Man findet

$$r \equiv \partial_{,\alpha} f^{\alpha} + \underset{2}{H} - \underset{3}{H}, \quad (8_1)$$

$$s \equiv -\partial_{,\alpha} f^{\alpha} - \underset{2}{H} + \underset{3}{H}. \quad (8_2)$$

Aus (7) ergibt sich hierauf

$$\boxed{R \equiv 4 \underset{1}{r} + \underset{2}{H} - 2 \underset{2}{H} + 4 \underset{3}{H}.} \quad (9)$$

Es gilt daher die Identität

$$R_{,\varrho\sigma} - \frac{1}{2} G_{,\varrho\sigma} R \equiv R_{,\varrho\sigma} - 2 G_{,\varrho\sigma} r - G_{,\varrho\sigma} \left(\frac{1}{2} \underset{1}{H} - \underset{2}{H} + 2 \underset{3}{H} \right). \quad (10)$$

Führen wir in der rechten Seite von (10) die rechte von (7) ein, so erhalten wir schliesslich

$$\begin{aligned}
 R_{,\rho\sigma} - \frac{1}{2} G_{,\rho\sigma} R &\equiv r_{,\rho\sigma} + r_{,\sigma\rho} - (s_{,\rho\sigma} + s_{,\sigma\rho}) - 2 G_{,\rho\sigma} r \\
 - 2 f_{,\alpha} (f_{,\rho\sigma}^{\cdot\cdot\alpha} + f_{,\sigma\rho}^{\cdot\cdot\alpha}) - f_{,\rho\alpha\beta}^{\cdot\cdot\cdot} f_{,\sigma}^{\cdot\cdot\alpha\beta} + f_{,\rho\alpha\beta}^{\cdot\cdot\cdot} f_{,\sigma}^{\cdot\cdot\alpha\beta} + f_{,\sigma\alpha\beta}^{\cdot\cdot\cdot} f_{,\rho}^{\cdot\cdot\alpha\beta} \\
 + 2 f_{,\alpha\beta\rho}^{\cdot\cdot\cdot} f_{,\sigma}^{\cdot\cdot\alpha\beta} - G_{,\rho\sigma} \left(\frac{1}{2} H_1 - H_2 + 2 H_3 \right)
 \end{aligned} \tag{11}$$

Bemerkenswert an dieser Umrechnung ist die Tatsache, dass sich die rechte Seite von (11) als explizit symmetrisch erweist.

Die rechte Seite von (11) ist also genau das, was man erhält, wenn man die Tensordichte $\mathfrak{B}_{\lambda}^{\mu}$ der Gleichung § 3 (7) in einen Parametertensor $W_{,\rho\sigma}$ umwandelt mit der Vorschrift, alle zweiten Ableitungen auf die Krümmungsgrößen $r_{,\rho\sigma}$, $s_{,\rho\sigma}$ und r zu reduzieren. Die direkte Verifikation ist natürlich umständlich.

Für die Umwandlung von Tensordichten in Tensoren sind vor allem folgende Identitäten wichtig:

$$\frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} \equiv g (\partial_{,\alpha} + f_{,\alpha}) v^{\alpha}, \tag{12_1}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} \equiv g (\partial_{,\beta} + f_{,\beta}) F^{\alpha\beta}, \tag{12_2}$$

wobei $F^{\alpha\beta}$ antisymmetrisch sein muss.

Wendet man (12₁) an auf den Vektor $v^{\alpha} \equiv f^{\alpha}$, so erhält man

$$g \partial_{,\alpha} f^{\alpha} \equiv \frac{\partial(g f^{\alpha})}{\partial x^{\alpha}} - g H_3. \tag{13}$$

Multipliziert man also die Gleichungen (8₁) und (9) mit g und eliminiert hierauf r , so ergibt sich

$$g R \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (g f^{\alpha}) + 2 g W, \tag{14}$$

wobei W die durch § 3 (1) definierte Wirkungsfunktion ist.

Mit anderen Worten: Die Wirkungsichte $g R$ der QF unterscheidet sich von der doppelten Wirkungsichte $2 g W$ der LF nur um eine Divergenz.

Die QF und die LF müssen daher äquivalente Gravitationsgleichungen liefern, was durch die Identität (11) bestätigt wird.

Schliesslich gibt uns die explizite Symmetrie der Identität (11) Anlass zu einer wichtigen Folgerung. Führen wir den Parametertensor $h^{\lambda}_{,\mu}$ gemäss § 2 (16₁) ein in § 2 (9'), so erhalten wir wegen § 2 (6') die Gleichung

$$G_{,\mu\nu} \equiv L_{,\alpha\mu} h^{\alpha}_{,\beta} h^{\beta}_{,\nu} \tag{15}$$

Da nun die Trägheitsmatrix $t^{\lambda}_{,\mu}$ nach § 2 (5₁) durch die Parameterwahl festgelegt ist, gilt nach § 2 (6') dasselbe für den Lorentztensor $L_{,\lambda\mu}$. Aus (15) können wir nun ersehen, dass der Parametertensor der eigentliche «Kerntensor» der LF ist. Er muss ja erst nach getroffener Parameterwahl noch bestimmt werden.

Setzen wir jetzt die rechten Seiten von (11) gleich Null, so haben wir alle Gleichungen, welche die Wirkungsinvariante

$$W \equiv \frac{1}{2} H_1 + H_2 - 2 H_3 \quad (16)$$

liefert. In anderen Worten, wir haben 10 Gleichungen für 16 Unbekannte.

Um also die überschüssigen 6 Unbekannten zu eliminieren, genügt es, $h_{,\mu}^{\lambda\cdot}$ zu symmetrisieren. Dies geschieht am einfachsten durch den Ansatz

$$h_{,\mu}^{\lambda\cdot} \equiv L^{\lambda\alpha} k_{,\alpha\mu}, \quad (17)$$

falls $k_{,\lambda\mu}$ symmetrisch ist. Anstelle von (15) tritt dann

$$G_{,\mu\nu} \equiv L^{\alpha\beta} k_{,\alpha\mu} k_{,\beta\nu}. \quad (18)$$

Die rechten Seiten von (11) gleich Null gesetzt liefern also *nach Festlegung des Parametersystems* genau 10 Gleichungen zur Bestimmung des 10gliedrigen Kerntensors.

Die in der QF nur implizit fassbare Willkür der Parameterwahl tritt also in der LF durch die Trägheitsmatrix explizit in Erscheinung.

Anstelle der Gleichungen § 2 (16₁) und (16₂) treten jetzt die Gleichungen

$$g_{,\mu}^{\lambda\cdot} = e^{\lambda} t_{\lambda,\alpha}^{\cdot} k_{,\alpha\mu} \quad (19_1)$$

und

$$g_{\lambda,\mu}^{\cdot} = e_{\lambda} t_{,\alpha}^{\lambda} \bar{k}^{\alpha\mu}. \quad (19_2)$$

Dabei ist $\bar{k}^{\lambda\mu}$ der zu $k_{,\lambda\mu}$ transverse Tensor.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Helv. phys. Acta 37, 317 (1964).
- [2] Z. Physik 152, 319 (1958).
- [3] Helv. phys. Acta 39, 513 (1966).
- [4] JEAN CHEVALIER, *Theorie relativiste linéaire du champ gravitationnel faible. Application au problème du disque tournant*, Dissertation, Bern, 29. 1. 1970.
- [5] HERRMANN WEYL, *Raum, Zeit und Materie*, § 35 (Darmstadt 1961).
- [6] Sky and Telescope, Sept. 1970, S. 138.
- [7] Z. Physik 141, 374 (1955).
- [8] Helv. phys. Acta 38, 215 (1965).