

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 51 (1978)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Oscillateur amorti quantique  
**Autor:** Huguenin, P.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-114954>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Oscillateur amorti quantique

par **P. Huguenin**

Institut de Physique, Université de Neuchâtel

(1.III.1978)

*Ce travail est dédié au Prof. J. Rossel à l'occasion de son 60ème anniversaire*

*Abstract.* The general solution of the equations of motion for a model of the damped harmonic oscillator is given in the framework of quantum statistical theory. The formalism is based on the Wigner isomorphism and a Fokker-Planck type equation in phase space. The solution shows that the Glauber states evolve classically but that other states pass by a mixture during the relaxation.

## 1. Introduction

Être professeur de physique théorique en pays horloger implique une réflexion sur le temps, ses définitions possibles, l'irréversibilité, la relaxation, la dissipation, les cycles limites, etc. Il n'est naturellement pas possible d'abandonner totalement ces préoccupations pour la simple raison que la mécanique quantique est essentiellement réversible, basée qu'elle est sur le formalisme Hamiltonien. J'ai donc longtemps considéré comme un défi, l'incapacité dans laquelle je me trouvais de ne pas pouvoir parler d'oscillateur amorti en mécanique quantique. La solution proposée ici présente les caractéristiques désirables suivantes :

- (1) Les moyennes des observables position et impulsion obéissent aux équations classiques de l'oscillateur amorti.
- (2) Les états de Glauber restent états de Glauber et évoluent selon la loi classique.
- (3) L'évolution est définie pour n'importe quel état de départ, mais il apparaît des mélanges statistiques au cours de l'évolution qui se termine par l'état fondamental.

Pour tirer parti au maximum de l'intuition physique, je me suis placé sur l'espace de phase en me servant de l'isomorphisme de Wigner [1] entre matrice densité et fonction sur l'espace de phase.

## 2. Rappel de quelques propriétés de l'isomorphisme de Wigner

A tout opérateur de l'espace de Hilbert des états d'un système à 1 degré de liberté, il est possible d'associer une fonction des variables de phase  $q$  et  $p$  ayant des propriétés très voisines de la fonction classique (état ou observable) qu'il représente. Si

l'observable  $A$  est donnée par ses éléments de matrice de l'espace des positions, on a [2, 3, 4]

$$a(q, p) = \int du \left\langle q - \frac{u}{2} \left| A \right| q + \frac{u}{2} \right\rangle e^{(i/\hbar)pu} \quad (2.1)$$

On vérifie que l'opérateur unité a la fonction 1 pour image et que

$$\text{Tr } A = \int a(q, p) \frac{dq dp}{2\pi\hbar}. \quad (2.2)$$

L'image du produit de deux opérateurs est assez compliquée [2], mais nous n'utiliserons ici que le produit avec les observables  $q$  et  $p$ . Nous noterons ces produits avec le symbole  $\circ$ . On vérifie

$$\text{Tr } (AB) = \int (a \circ b) \frac{dq dp}{2\pi\hbar} = \int a(q, p)b(q, p) \frac{dq dp}{2\pi\hbar}. \quad (2.3)$$

En outre

$$\begin{aligned} q \circ \dots &= \left( q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p} \right) \dots & \dots \circ q &= \left( q - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p} \right) \dots \\ p \circ \dots &= \left( p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q} \right) \dots & \dots \circ p &= \left( p + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q} \right) \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Le commutateur des observables  $q$  et  $p$  avec une fonction redonne bien le crochet de Poisson.

Nous rencontrerons l'image des états de Glauber pour une masse  $m$ , une fréquence  $\omega$  et un centre  $q_0, p_0$ :

$$g_{q_0 p_0}(q, p) = 2 \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \left[ m\omega(q - q_0)^2 + \frac{(p - p_0)^2}{m\omega} \right] \right\}. \quad (2.5)$$

Pour  $p_0 = q_0 = 0$ , nous avons l'image de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique. Le même oscillateur à température  $T = 1/k\beta$  se trouvera dans le mélange statistique [5]

$$w_T^B = \beta' \hbar \omega \exp \left\{ -\beta' \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \right) \right\} \quad (2.6)$$

$$\beta' = \frac{2}{\hbar\omega} \text{Th} \frac{\beta\hbar\omega}{2} < \frac{2}{\hbar\omega}. \quad (2.7)$$

On reconnaît la répartition de Boltzmann à une température  $T'$  modifiée par la mécanique quantique.

### 3. Oscillateur amorti classique

Assez curieusement, il est rare de trouver une présentation du mouvement harmonique amorti qui se place sur l'espace de phase, bien que la chose soit assez jolie en

elle-même. Il s'agit d'étudier l'équation

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (3.1)$$

de solution générale

$$q = A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.2)$$

$$\dot{q} = -A\omega e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \varphi) - \lambda q \quad (3.3)$$

Où

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2. \quad (3.4)$$

Nous supposons pour la suite que  $\omega$  est réel, c'est-à-dire que l'amortissement n'est pas trop fort et que le système présente des oscillations amorties. Dans ce cas, il est judicieux de choisir le conjugué canonique de  $q$  de la façon suivante

$$p = m(\dot{q} + \lambda q). \quad (3.5)$$

Ce choix de jauge simplifie considérablement la description de l'évolution mais  $p$  cesse d'être la quantité de mouvement. Elle n'en diffère que par un terme d'ordre  $\lambda$  qui s'annule pour une dynamique hamiltonienne. Introduisons une notation pour le point d'espace de phase:

$$x(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = e^{-\lambda t} R_t x(0). \quad (3.6)$$

où  $R_t$  est simplement une matrice de "rotation" d'angle  $\omega t$

$$R_t = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{m\omega} \sin \omega t \\ -m\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Ce mouvement obéit aux équations non hamiltoniennes

$$\dot{x}^\mu = \{x^\mu, h\} - \lambda x^\mu \quad (3.8)$$

avec

$$h(x) = \frac{1}{2} \left( m\omega^2 q^2 + \frac{1}{m} p^2 \right). \quad (3.9)$$

La fonction de Hamilton (3.9) qui apparaît dans le crochet de Poisson de (3.8) n'est pas l'énergie. D'abord à cause de l'apparition de  $\omega$  au lieu de  $\omega_0$  dans le terme potentiel et par l'apparition de  $\lambda$  dans l'expression (3.5) pour  $p$ . Plus précisément

$$E = \frac{1}{2} m(\omega_0^2 q^2 + \dot{q}^2) = h(x) - \lambda m q \dot{q} = h(x) + \lambda^2 q^2 - \lambda q p. \quad (3.10)$$

L'évolution temporelle de  $E$  n'est pas aussi simple que celle de  $h$ . En effet

$$\frac{d}{dt} h(x) = -2\lambda h(x). \quad (3.11)$$

La valeur de la fonction de Hamilton (3.9) évolue exponentiellement pour tendre vers zéro avec la constante de temps  $2\lambda$ , alors que l'énergie  $E$ , bien que monotone décroissante, présente des paliers pour les points de rebroussement de la coordonnée  $q$ . La



Du point de vue quantique, l'équation (3.14) est inacceptable. L'état asymptotique (3.13) n'est pas l'image d'un état quantique. A un facteur près, c'est l'image de l'opérateur parité! [6]. Il faudrait aboutir à une fonction gaussienne plutôt qu'à la fonction  $\delta$  sur l'espace de phase. On peut s'inspirer ici des équations de Fokker-Planck et ajouter un courant de diffusion

$$j_{\text{Diffusion}}^{\mu} = -\lambda kT c^{\mu\nu} \frac{\partial w}{\partial x^{\nu}} \quad (3.16)$$

Les coefficients  $c^{\mu\nu}(x)$  sont des paramètres que nous choisirons de telle sorte que l'état asymptotique soit la répartition de Boltzmann. L'équation d'évolution de  $w$  devient:

$$\dot{w} = -\{w, h\} + \lambda \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left[ x^{\mu} w + kT c^{\mu\nu} \frac{\partial w}{\partial x^{\nu}} \right]. \quad (3.17)$$

La répartition de Boltzmann satisfait les équations

$$\left( \frac{\partial h}{\partial x^{\nu}} + kT \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right) w_T^B(x) = 0. \quad (3.18)$$

Pour que  $w_T^B$  soit un point fixe de (3.17), il suffit de choisir

$$(c^{-1})_{\nu\mu} x^{\mu} = \frac{\partial h}{\partial x^{\nu}}.$$

C'est-à-dire

$$(c^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1/m\omega^2 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Et

$$\dot{w} = -\{w, h\} + \lambda \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} c^{\mu\nu} \left[ \frac{\partial h}{\partial x^{\nu}} w + kT \frac{\partial w}{\partial x^{\nu}} \right]. \quad (3.20)$$

La solution générale de (3.20) est de la forme

$$w(x, t) = \int w_{T(1-e^{-2\lambda t})}^B(x - e^{-\lambda t} R_t x') w(x', 0) \frac{d^2 x'}{2\pi\hbar}. \quad (3.21)$$

Cette expression généralise la solution (3.12) pour  $T \neq 0$ . Il suffit de poser  $T = 0$  pour la retrouver.

On vérifie explicitement que

- (1) Les valeurs moyennes des coordonnées

$$\langle x^{\mu} \rangle = \text{Tr} (w x^{\mu})$$

évoluent comme les coordonnées d'espace de phase (3.8).

- (2) L'évolution est un semi-groupe.
- (3) La thermalisation s'effectue exponentiellement avec la constante de temps  $2\lambda$ . Il y a donc liaison entre thermalisation et dissipation.
- (4) L'état asymptotique n'est pas tout à fait la répartition de Boltzmann. Il faudrait remplacer  $h$  par  $E$  pour l'obtenir. Notre système reste en contact avec le réservoir de chaleur et nous ne connaissons pas parfaitement l'état

l'équilibre dans ces conditions. J'ai choisi ici d'utiliser l'expression qui me paraissait la plus simple.

(5) L'énergie libre

$$F = \langle h + kT \log w \rangle$$

est monotone décroissante et bornée inférieurement.

#### 4. Transcription quantique

Les propriétés des solutions de la forme (3.21) laissent espérer une interprétation quantique à la condition de choisir  $kT \geq \hbar\omega/2$ . Dans ces cas, l'état asymptotique est de la forme (2.6) et satisfait l'inégalité (2.7). Etudions donc spécialement le cas limite  $kT = \hbar\omega/2$ . Dans ce cas

$$w(x, t) = \frac{2}{1 - e^{-2\lambda t}} \int \exp \left\{ -\frac{2h(x - e^{-\lambda t} R_t x')}{\hbar\omega(1 - e^{-2\lambda t})} w(x', 0) \frac{d^2 x'}{2\pi\hbar} \right. \quad (4.1)$$

et l'équation d'évolution s'écrit explicitement sous la forme suivante.

$$\dot{w} = -\{w, h\} + \lambda \left[ \frac{\partial}{\partial q} \left( q + \frac{\partial}{2m\omega} \frac{\partial}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left( p + \frac{m\hbar\omega}{2} \frac{\partial}{\partial p} \right) \right] w.$$

Les opérations du second membre peuvent être écrites au moyen du produit associatif  $\circ$  introduit au § 2. Il convient de construire les opérateurs d'annihilation :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} q + i \sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}} p \right]. \quad (4.2)$$

On a bien, comme on le vérifie à l'aide de 2.4

$$\begin{aligned} h &= \hbar\omega(a^* \circ a + \frac{1}{2}) \\ -\{w, h\} &= \frac{1}{i\hbar} [h \circ w - w \circ h] \\ \left( q + \frac{\hbar}{2m\omega} \frac{\partial}{\partial q} \right) w &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a \circ w + w \circ a^*) \\ \left( p + \frac{m\hbar\omega}{2} \frac{\partial}{\partial p} \right) w &= \frac{1}{i} \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a \circ w - w \circ a^*) \\ \frac{\partial}{\partial p} &= \frac{1}{i\hbar} (q \circ \dots - \dots \circ q) \quad \frac{\partial}{\partial q} = \frac{i}{\hbar} (p \circ \dots - \dots \circ p). \end{aligned}$$

En regroupant

$$\begin{aligned} \dot{w}(x, t) &= \frac{\omega}{i} [a^* \circ a \circ w - w \circ a^* \circ a] \\ &+ \lambda [2a \circ w \circ a^* - \{a^* \circ a \circ w + w \circ a^* \circ a\}]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

On peut maintenant écrire la même équation pour les opérateurs auxquels les termes correspondent :

$$\dot{W} = -\frac{1}{i\hbar} [W, H] + \lambda(2AWA^* - \{A^*A, W\}). \quad (4.4)$$

Le premier terme engendre l'évolution réversible et le second est une combinaison astucieuse qui préserve trace et positivité des états, comme l'a démontré E. B. Davies [7]. Nous tenons donc une solution quantique de l'oscillateur harmonique amorti.

Il n'est pas difficile de calculer l'évolution d'un état de Glauber tel que (2.5), en utilisant la formule (4.1). On trouve

$$w(x, t) = g_{e^{-\lambda t} R_t x_0}(x). \quad (4.5)$$

Les états purs de Glauber restent des états purs de Glauber au cours de l'évolution. C'est une propriété qui n'a pas son équivalent pour les systèmes ayant un nombre fini d'états. Pour un spin, il est impossible de trouver une équation linéaire qui présente une relaxation pour des états purs, qui restent purs au cours de l'évolution.

En contraste, l'évolution à partir d'un état propre de l'Hamiltonien fait apparaître des mélanges statistiques. Les mélanges diagonaux en nombre d'excitations restent diagonaux. Posons dans une notation universellement admise :

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) |n\rangle \langle n|. \quad (4.6)$$

L'équation (4.4) donne le système différentiel

$$\dot{c}_n = 2\lambda[(n+1)c_{n+1} - c_n]. \quad (4.7)$$

C'est une chaîne de Markoff. Les 2 solutions suivantes sont instructives. Si le système se trouve dans l'état 1 au temps  $t = 0$ , alors

$$c_0(t) = 1 - e^{-2\lambda t} \quad c_1(t) = e^{-2\lambda t} \quad (4.8)$$

Si le système se trouve dans l'état 2 au temps  $t = 0$  alors

$$c_0(t) = 1 - 2e^{-2\lambda t} + e^{-4\lambda t} \quad c_1 = 2(e^{-2\lambda t} - e^{-4\lambda t}) \quad c_2 = e^{-4\lambda t}. \quad (4.9)$$

Le système ne passe jamais par l'état pur  $|1\rangle$  qui apparaît au plus avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ . La partie dissipative de l'évolution étudiée ici ne fait pas apparaître la cascade habituelle pour laquelle les états propres de  $H$  sont métastables. Elle serait d'ailleurs incompatible avec l'amortissement sans à-coups postulé au départ.

L'apparition des états propres de l'Hamiltonien, phénomène si fondamental pour la formation de la mécanique quantique est donc, en réalité, autant le reflet de l'interaction électromagnétique que de la quantification du mouvement.

## 5. Conclusion

Nous avons construit un exemple, résolu complètement, de système quantique relaxé. Ce système conserve la pureté de certains états convenablement préparés (états de Glauber) mais produit temporairement un mélange statistique pour d'autres états.



Du point de vue pratique, il semble qu'une situation de ce genre apparaisse dans les cavités micro-ondes à basse température. Ce serait là un champ d'applications intéressant mais le but de ce travail était de montrer une solution correcte de ce problème qui n'admet pas d'équation de Schrödinger linéaire pour la fonction d'onde, contrairement à certaines affirmations hâtives [8].

## REFERENCES

- [1] E. P. WIGNER, *Phys. Rev.* *40*, 749 (1932).
- [2] H. J. GROENEWOLD, *Physica* *12*, 405 (1946).
- [3] J. E. MOYAL, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* *45*, 99 (1949).
- [4] P. HUGUENIN, *Zeit. f. Naturforschung* *28a*, 1090 (1971).
- [5] K. IMRE, E. ÖZIZMIR, M. ROSENBAUM, P. ZWEIFEL, *Jour. Math. Phys.* *8*, 1097 (1967).
- [6] A. GROSSMANN, P. HUGUENIN, *Group-theoretical aspects of the Wigner–Weyl isomorphism*. A paraître dans *Helv. Phys. Acta*.
- [7] E. B. DAVIES, *Comm. Math. Phys.* *39*, 91 (1974).
- [8] H. DEKKER, *Zeit. f. Physik* *B21*, 295 (1975).