Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 63 (1990)

Heft: 7

Artikel: Mécanique dans l'espace de phase l'approche des déformations

Autor: Boulat, B.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-116245

Helvetica Physica Acta
Vol. 63 (1990)

0018-0238/90/070940-24$1.50+0.20/0

MECANIQUE DANS L'ESPACE DE PHASE
L'APPROCHE DES DEFORMATIONS

B.BOULAT

DEPARTEMENT DE BIOCHIMIE

UNIVERSITE DE LAUSANNE

CH-1066 EPALINGES SUISSE

(22. II. 1990, revised 28. V. 1990)

Abstract: This paper is concerned with the mechanics of a particule. Firstly, we construct an algebraic structure which allow us to recover all the mechanics, this structure does not depend on the classical or quantal nature of the particule. With the help of the deformation theory of algebraic structure we link the two cases, classical and quantal, more closely. Secondly we define a representation of the Hilbert space, very next to the Bargmann representation, the properties of which allowing us to treat in a unique way the reversible dynamics of an either classical or quantal particule.

Ce papier traite de la mécanique d'une particule. Premièrement on construit une structure algébrique nous permettant de retrouver toute la mécanique, cette structure ne dépendant pas de la nature classique ou quantique de la particule. Avec l'aide de la théorie des déformations des structures algèbriques nous relions les deux cas, classiques et quantiques, de manière plus forte. Deuxièmement nous définissons une représentation de l'espace de Hilbert très proche de la représentation de Bargmann, dont les propriétés vont nous permettre d'écrire de façon unique la dynamique réversible d'une particule classique ou quantique.

INTRODUCTION

Ce qui est connu sous le nom d' " axiomatique quantique "[1],[2], a développé un ensemble de concepts physiques d'où l'on peut dériver une structure mathématique à même de décrire une particule physique. Les qualités " quantique " ou " classique " ne jouent pas de rôle au niveau du développement de la théorie, mais apparaissent comme solutions possibles de problèmes posés à l'intérieur de cette théorie.
Cependant les calculs se réalisent usuellement dans des représentations particulières de ces solutions, obligeant à décider de prime abord de la nature quantique ou classique de la particule. Le but de ce travail est de développer un formalisme mathématique permettant d'éviter ce choix primordial et de ne le faire qu'à posteriori, à la fin du calcul. Voyons dans quelle mesure ceci a pu être réalisé.
Physiquement une particule est caractérisée par ses propriétés. Ce qui conduit à choisir un ensemble d'observables. L'ensembles des propriétés actuelles déterminant l'état. C'est sur ces deux notions d'observable et d'état que l'on va s'appuyer.
L'exposé va s'organiser de la façon suivante :
Le premier chapitre est consacré à des rappels de mécanique classique et quantique. Dans le second chapitre on parle d'observables et de dérivations; plus précisément on y construit une structure algébrique qui permettra de traiter indifférement le cas quantique et le cas classique. Le troisième chapitre exposera succintement le formalisme de déformation du produit d'une algèbre.
A l'aide des éléments introduits dans les chapitres deux et trois on va pouvoir dans le chapitre quatre parler de mécanique et retrouver dans un formalisme mathématique unique le cas classique et le cas quantique, bien que ce dernier ne soit à ce stade pas pleinement justifié, car pour cela on doit se placer dans le cadre de l'espace de Hilbert. Pour ce faire dans le chapitre cinq on va décrire une représentation particulière de l'espace de Hilbert. Outre la justification du cas quantique précédement introduit, les propriétés de cette représentation vont nous permettre d'écrire dans le cas réversible une équation d'évolution unique, au niveau des états. On va retrouver aussi de façon transparente le théorème de Van Hove sur l'impossibilité d'une règle de quantification générale.

Chapitre I : Rappels

I.1 : <u>Mécanique classique</u>

On représente l'état d'une particule classique par un point d'un espace à sept dimensions Σ, l'espace des états de cette particule. Ce point donne l'instant actuel du temps, ainsi que la quantité de mouvement et la position actuelles de la particule pour cet instant. L'espace des quantités de mouvement et des positions est appelé l'espace de phase et on le note Γ. Dans tout ce travail on identifiera Γ à $\mathbb{R}^{2n}$.
Une observable est la donnée à chaque instant d'une fonction sur Γ. L'ensemble $\mathcal{F}(\Gamma)$ des observables, muni de la structure d'espace vectoriel et du produit usuel des fonctions sur $\mathbb{R}^{2n}$ forme donc une $\mathbb{R}$-algèbre commutative, triviallement de Jordan.
Soit $\mathcal{F}(\Gamma) \supset N = C^\infty(\Gamma; \mathbb{R})$, l'algèbre des fonctions C^∞ de Γ dans $\mathbb{R}$. Soit $\Xi^\infty(\Gamma)$, l'algèbre des champs de vecteurs C^∞ sur Γ. Ξ^∞ peut être identifié à l'algèbre de lie des dérivations de N.
L'évolution de la particule est la donnée d'un champ de vecteur X' sur Σ, tel que :

$$X' = \partial_t + X \qquad X \in \Xi^\infty(\Gamma)$$

Si X ne dépend pas de t, on peut se restreindre à calculer sur Γ. Par définition X est hamiltonien si l'on peut écrire :

$$i_X \Omega = -dH$$

où Ω est une deux-forme symplectique sur Γ et $H \in N$. La deux-forme symplectique induit sur N une structure d'algèbre de Lie donné par le crochet de Poisson :

$$\forall f, g \in N \qquad \text{on a} \qquad \{f, g\} = i_{X_f} i_{X_g} \Omega$$

où

$$X_f \qquad \text{est tel que} \qquad i_{X_f}\Omega = df$$

$$X_g \qquad \text{est tel que} \qquad i_{X_g}\Omega = dg$$

Soit Y un champ de vecteur sur Σ. Une courbe intégrale de Y par $x \in \Sigma$ est une courbe γ lisse satisfaisant :

$$\frac{d\gamma}{ds}(s) = Y(\gamma(s)) \qquad \gamma(0) = x$$

Si f est une fonction sur Σ on définit, pour $s \in \mathbb{R}$:

$$f_s = \phi_s^* f = f \circ \phi_s$$

où $\phi_s$est la projection du flot définie par Y soit:

$$\begin{aligned} \phi \quad &: \Sigma \times \mathbb{R} \longrightarrow \Sigma \\ &\qquad (p, s) \longmapsto \phi(p, s) = \phi_s(p) \end{aligned}$$

tel que :

$$\phi_{s'} \circ \phi_s = \phi_{s+s'}$$

$$\frac{d}{ds}\phi_s|_{s=0} = Y$$

on a :

$$\frac{d}{ds}f_s = L_y f_s = Y.f_s$$

Les intégrales premières sont telles que

$$Y.f_s = 0$$

soit avec :

$$Y = \partial_s + X \qquad X \in \Xi^\infty(\Gamma)$$
$$\partial_s f_s = -X_s f_s \qquad (*)$$

ceci définit un problème aux limites une fois f_0 donné. $f_0 = f_0(a,.)$. On choisit $s = t$, t le temps. Considérons X indépendant du temps. X définit alors un flot ψ_t sur Γ. Soit :

$$f_0^t(a) = f_0(\psi_t(a), 0) = \psi_t^* f_0(a, 0) \qquad (**)$$

avec comme condition initiale $f_0(a,0)$.Les f_0^t sont des fonctions sur Γ qui prennent en a la valeur que prend la solution du problème aux limites $(*)$ pour la condition initiale $f_0 = f_0(\psi_t(a,0)$ soit donc une valeur égale à $f_0(\psi_t(a,0)$. On a défini ainsi une courbe dans l'espace des observables, courbe satisfaisant l'équation $(**)$.
Dans le cas oû $X = \{\quad . \quad , H\}$ on obtient :

$$\frac{d}{dt}f_0^t = \{f_0^t, H\}$$

Par analogie avec la mécanique quantique on appelerait cette équation d'évolution, l'équation en forme Heisenberg.

I.2 : Mécanique quantique

L'état d'une particule quantique est la donnée de l'intant actuel t et d'un rayon dans l'espace de Hilbert complexe, $\mathcal{H}_t$. A chaque observable est associé un opérateur auto-adjoint dans $\mathcal{H}_t$. On postule que l'ensemble des observables forme une $\mathbb{R}$-algèbre de Jordan J. On ne postule pas ceci de façon générale, mais on montrera en se plaçant dans une représentation particulière de l'espace de Hilbert que l'on peut considérer ce produit comme le symétrisé du produit de Moyal. Les dérivations sont celles de J. Elles contiennent comme sous-espace celles de l'algèbre de Moyal.
L'évolution d'une particule quantique est une évolution qui préserve sa nature quantique, soit la structure de l'espace de Hilbert et à l'intérieur de celle-ci l'interprétation des états et des observables. Une évolution déterministe et réversible est la donnée d'un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires dans l'espace de Hilbert, les $\mathcal{H}_t$ étant considérés comme identiques entre eux. Pour une telle évolution soit P_t le projecteur représentant l'état, on a l'équation :

$$i\hbar\frac{d}{dt}P_t = HP_t - P_tH = [H, P_t]$$

où H est le générateur auto-adjoint de l'évolution et $\hbar$ est la constante de Planck divisée par 2π. H est considéré indépendant du temps. Ceci étant la version qu'on appelle "Schrödinger" de l'évolution déterministe réversible. Dans la forme Heisenberg l'état est fixé et ce sont les observables qui dépendent du temps. Pour une observable A on obtient alors :

$$i\hbar \frac{d}{dt} A_t = [A_t, H]$$

avec H toujours indépendant du temps.

Chapitre II : Observables et Dérivations

Soit une particule. On postule que les observables associées à cette particule forment une algèbre de Jordan J réèlle dont on note le produit, en tant qu'application bilinéaire de $J \times J$ dans J, P_0 :

$$\begin{aligned} P_0 : J \times J &\longrightarrow J \\ (f,g) &\longmapsto P_0(f,g) \end{aligned}$$

$$P_0(\lambda f + \mu g, h) = \lambda P_0(f,h) + \mu P_0(g,h)$$
$$\forall f,g,h \in J, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
$$P_0(f,g) = P_0(g,f) \qquad \forall f,g \in J$$
$$P_0(P_0(f,f), P_0(f.g)) = P_0(f, P_0(P_0(f,f),g)) \qquad \forall f,g \in J$$

On suppose de plus J de la forme :

$$J = J_0 + J_1$$
$$\text{avec} \qquad J_1 = \lambda J_0 \qquad\qquad \lambda \ \text{ une indéterminée}$$

En tant qu'espace vectoriel J est donc $\mathbb{Z}_2$ gradué. On verra par la suite que J est une algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée, soit $\lambda J_1 = J_0$, mais dans un sens différent de celui usuellement utilisé. On considère le sous-espace vectoriel $\mathcal{F} \subset EndJ \times EndJ$ des éléments de la forme :

$$F = (M_f, D_F)$$

avec M_f, l'opérateur de multiplication par f dans J :

$$\begin{aligned} M_f : J &\longrightarrow J \\ g &\longmapsto M_f(g) = P_0(f,g) \end{aligned}$$

et D_F, une dérivation de J :

$$\begin{aligned} D_F : J &\longrightarrow J \\ g &\longmapsto D_F(g) \\ D_F(P_0(g,h)) &= P_0(D_F(g),h) + P_0(g, D_F(h)) \\ \forall g,h &\in J \end{aligned}$$

La condition pour que D_F soit une dérivation de J s'écrit aussi :

$$[D_F, M_g] = M_{D_F(g)}$$

Remarque : on a donné à $\mathcal{F}$ la structure d'espace vectoriel canonique.
On fait de $\mathcal{F}$ une algèbre en y définissant pour deux quelquonques de ses éléments F et G, $F = (M_f, D_F)$ et $G = (M_g, D_G)$:

$$FG = \left(M_{P_0(f,g)} - \lambda\left[\frac{1}{2}(M_{D_F(g)} - M_{D_G(f)})\right], \frac{\lambda}{2}[D_F, D_G]\right)$$

où :

$$[D_F, D_G] = D_F \circ D_G - D_G \circ D_F$$

et $\circ$ étant la composition usuelle des endomorphismes de J. Nous avons bien défini là une application bilinéaire de $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$. Soit :

$$[F, G] = FG - GF$$

Pour $F = (M_f, D_F)$ et $G = (M_g, D_G)$ on obtient :

$$[F, G] = \lambda(M_{D_F(g)} - M_{D_G(f)}, [D_F, D_G])$$

On a les propriétés :

$$\begin{aligned} &(i) \qquad [F, G] = -[G, F] \\ &(ii) \qquad \big[F, [G, H]\big] + \big[H, [F, G]\big] + \big[G, [H, F]\big] = 0 \end{aligned}$$

Muni du produit $[.,.]$, $\mathcal{F}$ est une algèbre de Lie [10].

Chapitre III : Déformations

Soit A une algèbre sur un corps K et V l'espace vectoriel sous-jaçent à A. Le produit P de A est une application K-bilinéaire :

$$P : V \times V \longrightarrow V$$

Soit $V[[t]]$ le K-espace vectoriel des séries formelles dans l'indéterminée t, soit les éléments de la forme :

$$u(t) = (u_0, tu_1, t^2u_2, ..., t^n u_n, t^{n+1}u_{n+1}, ...)$$

Toute fonction K-bilinéaire de $V \times V$ dans V, en particulier P peut être étendue à une fonction K-bilinéaire de $V[[t]] \times V[[t]]$ dans $V[[t]]$. Supposons qu'il existe une fonction K-bilinéaire :

$$f^{(t)} : V[[t]] \times V[[t]] \longrightarrow V[[t]]$$

telle que $\forall a, b \in V[[t]]$, on ait :

$$\left[f^{(t)}(a,b)\right]_n = \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k \in \mathbb{N}}} F_k(a_i, b_j)$$

où $a_i, b_j, \in A$ et F_k est une fonction K-bilinéaire de $V \times V \to V$ et où $F_0 = P$. Supposons que P munisse A d'une structure d'algèbre "qualifiée" , c'est-à-dire (A, P) est une algèbre soit associative, soit de Lie, soit de Jordan. Supposons encore que $f^{(t)}$ conserve la qualification originale (celle donnée par P) de A. On dira alors que $f^{(t)}$ est une déformation de la structure d'algèbre qualifiée de A.

III.1 :Applications

III.1.1 : Déformations d'une structure d'algèbre associative.

Dans ce cas l'algèbre de départ A est associative. On doit avoir :

$$
\begin{aligned}
&f^{(t)}\big(f^{(t)}(a,b),c\big) = f^{(t)}\big(a, f^{(t)}(b,c)\big) \\
&\forall a,b,c \in V[[t]] \qquad \text{donc} \\
&\sum_{r+s+j+k+l=m} F_k\big(F_l(a_r,b_s),c_j\big) - F_k\big(a_r, F_l(b_s,c_j)\big) = 0 \\
&\forall m \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

En particulier pour $a,b,c \in A$ (donc la composante d'ordre 0 de $V[[t]]$) on obtient :

$$
\sum_{k+l=m} F_k\big(F_l(a,b),c\big) - F_k\big(a, F_l(b,c)\big) = 0
$$

Ce qui donne pour $m = 0$:

$$
\begin{aligned}
&F_0\big(F_0(a,b),c\big) - F_0\big(a, F_0(b,c)\big) = 0 \\
&P\big(P(a,b),c\big) - P\big(a, P(b,c)\big) = 0
\end{aligned}
$$

ce qui est la condition d'associativité que satisfait par hypothèse l'algèbre originale. Pour $m = 1$ on a :

$$
(*) \qquad F_1\big(F_0(a,b),c\big) + F_0\big(F_1(a,b),c\big) - F_0\big(F_1(a,b),c\big) - F_1\big(a, F_0(b,c)\big) = 0
$$

L'équation obtenue permet d'aborder les problèmes de "rigidité" :
On dit qu'une algèbre est rigide si toute déformation est équivalente à la déformation triviale (celle où tous les F_i sont nuls). On ne précisera pas l'équivalence (voir [3]). On obtient des informations sur la rigidité de l'algèbre en étudiant sa cohomologie. Dans le cas associatif, la cohomologie étudiée est celle de Hochschild. La relation $(*)$ permet d'identifier F_1 comme un élément de $\mathbf{Z}^2(A,A)$ l'espace des deux cocycles de A à coefficients dans A de cette cohomologie. On a le résultat que si :

$$
\mathbf{H}^2(A,A) = \frac{\mathbf{Z}^2(A,A)}{\mathbf{B}^2(A,A)}
$$

est trivial alors l'algèbre est rigide. $\mathbf{B}^2(A,A)$: espace des deux cobords de A.

III.1.2 : <u>Déformations d'une structure d'algèbre de Lie.</u>

Dans ce cas l'algèbre de départ est de Lie. On doit avoir :

$$(i) \qquad f^{(t)}(a,b) = -f^{(t)}(b,a)$$
$$(ii) \qquad f^{(t)}\big(f^{(t)}(a,b),c\big) + f^{(t)}\big(f^{(t)}(b,c),a\big) + f^{(t)}\big(f^{(t)}(c,b),a\big) = 0$$

$\forall a,b,c \in V[[t]]$ donc

$$(i') \sum_{i+j+k=m} F_k(a_i,b_j) - F_k(b_j,a_i) = 0$$
$$(ii') \sum_{\substack{i+j+s+k+l=m \\ i,j,s,k,l,m\in\mathbb{N}}} F_l\big(F_k(a_i,b_j),c_s\big) + F_l\big(F_k(b_j,c_s)a_i\big) + F_l\big(F_k(c_s,a_i),b_j\big) = 0$$

en particulier pour $a,b,c \in A$:

$$(i'') \qquad F_k(a,b) = -F_k(b,a)$$
$$(ii'') \sum_{l+k=m} F_l\big(F_k(a,b),c\big) + F_l\big(F_k(b,c),a\big) + F_l\big(F_k(c,a),b\big) = 0$$

Pour $m = 0$ on récupère la condition posée par hypothèse que A soit de Lie. Pour $m = 1$ on obtient que F_1 doit appartenir à l'espace des deux cocycles de A à coefficients dans A de la cohomologie de Chevalley de A. (voir[3,4]).

III.1.3 : <u>Déformation d'une structure d'algèbre de Jordan</u>.

Dans ce cas l'algèbre de départ est de Jordan. On recquiert :

$$(i) f^{(t)}(a,b) = f^{(t)}(b,a)$$
$$(ii) f^{(t)}\big(f^{(t)}(a,a), f^{(t)}(a,b)\big) = f^{(t)}\Big(a, f^{(t)}\big(f^{(t)}(a,a),b\big)\Big)$$

Pour $a,b \in A$ on obtient :

$$(i') F_k(a,b) = F_k(b,a)$$
$$(ii') \sum_{\substack{i+j+k=m \\ i,j,k,m\in\mathbb{N}}} F_i\big(F_j(a,a), F_k(a,b)\big) - F_i\Big(a, F_j\big(F_k(a,a),b\big)\Big) = 0$$

Pour $m = 0$ on récupère l'hypothèse faite sur la nature de Jordan de l'algèbre originale. Pour $m = 1$, la relation obtenue ici force la définition d'une cohomologie appropriée de A, dans laquelle F_1 sera vu comme un deux cocycles de A à coefficients dans A

Chapitre IV : Mécanique

On peut maintenant aborder la mécanique d'une particule et voir dans quels cas il est possible de ne pas décider à l'avance de la nature quantique ou classique de cette particule. On va d'abord reécrire dans le cadre ci-dessus proposé les deux théories.

IV.1 : Le cas classique

Soit $N = C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on munit d'une structure d'algèbre pour le produit usuel. Soit :

$$J = J_0 \oplus J_1 \qquad J_1 = \lambda J_0 \quad J_0 = N$$

On définit $\forall f, g \in J$:

$$(f.g)_l = \lambda^l \sum_{\substack{p+q=l \\ p,q,l \in \mathbb{Z}_2}} (-1)^{M(p,q)} f^{(p)}.g^{(q)}$$

où :

$$M(p,q) = \begin{cases} 1, & \text{si } p = q = 1; \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Les dérivations de J sont de la forme :

$$X = X^{(0)} + \lambda X^{(1)} \qquad X^{(0)}, X^{(1)} \in \Xi^\infty(\mathbb{R}^{2n})$$

On a donc :

$$\mathcal{F} = \Big\{ F = (M_f, D_F) \big| f \in J, D_F \in Der\, J \Big\}$$

et :

$$\forall F, G \in \mathcal{F} \qquad FG = \Big(M_{f.g} + \frac{\lambda}{2} M_{D_F(g) - D_G(f)}, \frac{\lambda}{2} [D_F, D_G] \Big)$$

$$[F, G] = \lambda \Big(M_{D_F(g) - D_G(f)}, [D_F, D_G] \Big)$$

En particulier avec $F = \big(M_f, 0\big)$ et $G = \big(0, X_G\big)$ on a :

$$[F, G] = (-\lambda M_{X_G.f}, 0)$$

IV.2 : Le cas quantique

Il faut considΘrer pour l'instant ce qui suit comme des définitions. Ce n'est que dans le cadre de l'espace de Hilbert que l'on aura la justification de la qualification quantique de ce cas. Considérons l'espace vectoriel N sur $\mathbb{R}$des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^{2n}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ainsi que des fonctions $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $V_N[[t]]$ l'espace des séries formelles dans l'indéterminée t à coefficients dans N. Sur $V_N[[t]]$ on définit le produit :

$$\begin{aligned} P_0(t) : V_N[[t]] \times V_N[[t]] &\longrightarrow V_N[[t]] \\ (u \quad ,v) &\longmapsto P_0(u,v) \end{aligned}$$

avec :

$$[P_0(u,v)]_n = \sum_{i+j+k=n} P_{k,0}(u_i,v_j)$$

$$P_{k,0}(u_i,v_j) = \frac{(-1)^k}{2^k}\{u_i,v_j\}^{2k}$$

$$\text{et} \qquad \{u_i,v_j\}^0 = u_i.v_j$$

où dans une base $p_1,p_2,...p_n,q_1,q_2,...q_n$ de $\mathbb{R}^{2n}$ on a :

$$\{u,v\}^{2k} = \frac{1}{(2k)!}\Lambda^{\alpha_1\beta_1}\Lambda^{\alpha_2\beta_2}...\Lambda^{\alpha_{2k}\beta_{2k}}\partial_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{2k}}u\partial_{\beta_1\beta_2...\beta_{2k}}v$$

$$(\Lambda^{\alpha\beta}) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} p & q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Soit :

$$J^{(t)} = J_0^{(t)} \oplus \lambda J_0^{(t)} \qquad J_0^{(t)} = V_N[[t]]$$

On étend le produit $P_0^{(t)}$ à $J^{(t)}$ comme suit :

$$\forall u,v \in J^{(t)} \qquad \left[P_0^{(t)}(u,v)\right]_n = \sum_{i+j+k=n} P_{k,0}^{(t)}(u_i,v_j)$$

$$P_{k,0}^{(t)} : (N \oplus \lambda N) \times (N \oplus \lambda N) \longrightarrow N \oplus \lambda N$$

$$\left[P_{k,0}^{(t)}(u_i,v_j)\right]_l = \lambda^l(-1)^k \sum_{\substack{p+q=l \\ p,q,l \in \mathbb{Z}_2}} (-1)^{M(p,q)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \left\{u_i^{(p)},v_j^{(q)}\right\}^{2k}$$

$$u_i^{(p)} \in \lambda^p N, v_j^{(q)} \in \lambda^q N$$

$$M(p,q) = \begin{cases} 1, & \text{si } p=q=1; \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

On a que $P_0^{(t)}$ est une déformation de la structure d'algèbre de Jordan de J. Pour obtenir le cas quantique, il va falloir donner une valeur à t, ce que l'on fait en considérant l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^{(t)} :\mathcal{D}_\alpha^{(t)} &\longrightarrow N \\ u \quad &\longmapsto \sum_n \alpha^n u_n \qquad\qquad \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où $\mathcal{D}_\alpha^{(t)} \subset V_N[[t]]$, est donc l'ensemble des séries composées d'éléments de N, sommables dans N pour la valeur particulière $t = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Voyons ce qu'il en ait de la stabilité de $\mathcal{D}_\alpha^{(t)}$ vis-à-vis du produit P_0 (cas $\alpha \neq 0$, le cas $\alpha = 0$ étant trivial) :

(1)Soient $u, v \in \mathcal{D}_\alpha^{(t)}$, tels que les u_n soient des polynômes et n fini. Vu la définition des $P_{k,0}$ on obtient alors une somme finie pour $\psi_\alpha^{(t)}\left(P_0^{(t)}(u,v)\right)$.

(2)Soient $u, v \in \mathcal{D}_\alpha^{(t)}$, tels que $\psi_\alpha^{(t)}(u), \psi_\alpha^{(t)}(v) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$. On peut montrer alors que $\psi_\alpha^{(t)}\left(P_0^{(t)}(u,v)\right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{2n}$, ceci pour la valeur $\alpha = 1$.[Voir D.Arnal,[5]].

Le cas quantique correspond justement au cas $\alpha = 1$. Au cas $\alpha = 0$ correspond la restriction du cas classique au N défini dans ce paragraphe. Dans le cas où l'on a donné une valeur à t, selon le schéma introduit ci-dessus on a :

$$\left[P_0^{(t)}(u,v)\right] = \sum_n \alpha^n \sum_{i+j+k=n} P_{k,0}^{(t)}(u_i, v_j)$$

Dans le cas quantique on a donc :

$$\mathcal{F} = \left\{ (M_f, D_F) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \in N \oplus \lambda N \\ D_F \quad \text{une dérivation pour ce produit} \end{array} \right\}$$

IV.3 : <u>Le cas canonique</u>

Supposons que J_0 en plus d'une algèbre de Jordan, soit une algèbre de Poisson c'est à dire que J_0 est muni d'un produit P_1 tel que (J_0, P_1) soit une algèbre de Lie et $\forall f \in J_0$, $P_1(f, .)$ est une dérivation de J_0 relativement au produit P_0 soit :

$$P_1(f, P_0(g,h)) = P_1(P_0(f,g),) + P_1(g, P_0(g,h))$$

On étend P_1 à $J = J_0 \oplus \lambda J_0$ de la façon suivante :

$$P_1(f,g) = \sum_{\substack{p,q=0,1 \\ p,q \in \mathbb{Z}_2}} \lambda^{p+q}(-1)^{m(p,q)} P_1\left(f^{(p)}, g^{(q)}\right)$$

$$m(p,q) = \begin{cases} 1, & \text{si } p = q = 1; \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

On a alors que $\forall f \in J$, $P_1(f,.)$ est une dérivation de (J, P_0). Considérons le sous-espace vectoriel $\mathcal{C}$ de $\mathcal{F}$ formé des éléments :

$$F = (M_f, D_F)$$
$$\text{avec} \qquad D_F = P_1(u,.) \qquad u \in J$$

Pour $F = (M_f, P_1(u,.))$ et $G = (M_g, P_1(v,.))$ on a :

$$\begin{aligned} FG &= \left(M_{P_0(f,g)} + \frac{\lambda}{2} M_{\left(P_1(u,g)-P_1(v,f)\right)}, \frac{\lambda}{2}\left[P_1(u,.), P_1(v,.)\right] \right) \\ &= \left(M_{P_0(f,g)} + \frac{\lambda}{2} M_{\left(P_1(u,g)-P_1(v,f)\right)}, \frac{\lambda}{2} P_1\left(P_1(u,v),.\right) \right) \end{aligned}$$

Par conséquent $\mathcal{C}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}$. En particulier considérons dans la définition de F et G, $u = f$, $v = g$. On obtient :

$$\begin{aligned} FG &= \left(M_{P_0(f,g)} + \frac{\lambda}{2} M_{\left(P_1(f,g)-P_1(g,f)\right)}, \frac{\lambda}{2} P_1\left(P_1(f,g),.\right) \right) \\ &= \left(M_{\left(P_0(f,g)+\lambda P_1(f,g)\right)}, \frac{\lambda}{2} P_1\left(P_1(f,g),.\right) \right) \end{aligned}$$

On voit qu'ainsi on a définit sur J un nouveau produit :

$$P = P_0 + \lambda P_1$$

IV.3.1 : <u>Le cas canonique classique</u>

On prend J comme dans le cas classique. On définit $P_1(f,g)$ comme :

$$P_1(f,g) = \frac{1}{2} \sum_{p,q=0,1} \lambda^{p+q} (-1)^{m(p,q)} \left\{ f^{(i)}, g^{(j)} \right\}$$

où :

$$\left\{ f^{(i)}, g^{(j)} \right\}$$

est le crochet de Poisson de f et g, lui-même défini de la manière suivante. Soit Ω la deux-forme symplectique sur $\mathbb{R}^{2n}$. On définit :

$$\left\{ f^{(i)}, g^{(j)} \right\} = i_{Y_{f^{(i)}}} i_{Y_{g^{(j)}}} \Omega$$

où $Y_{f(i)}$ et $Y_{g(j)}$ sont tels que :

$$i_{Y_{f(i)}}\Omega = df^{(i)}$$
$$i_{Y_{f(j}}\Omega = dg^{(j)}$$

Dans les coordonnées canoniques $p_1, p_2, ..., p_n, q_1, q_2, ..., q_n$ de $\mathbb{R}^{2n}$ on écrit :

$$\Omega = \frac{1}{\hbar}\sum_{i=1}^{2n} dp_i \wedge dq_i$$

$$\text{d'où} \qquad \left\{f^{(i)}, g^{(j)}\right\} = \frac{1}{\hbar}\Lambda^{\alpha\beta}\partial_\alpha f^{(i)}\partial_\beta g^{(j)}$$

$$\text{avec} \qquad \left(\Lambda^{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

IV.3.2 : Le cas canonique quantique

On fait la même remarque que dans le cas quantique. Considérons $V_N[[t]]$ comme dans le cas quantique. On définit $P_1^{(t)}$ comme suit :

$$\left[P_1^{(t)}(f,g)\right]_n = \sum_{i+j+k=n} P_{k,1}^{(t)}\left(f^{(i)}, g^{(j)}\right)$$

où $\qquad P_{k,1}^{(t)} : (N \oplus \lambda N) \times (N \oplus \lambda N) \longrightarrow N \oplus \lambda N$

et $\qquad \left[P_{k,1}^{(t)}(f_i, g_j)\right]^{(l)} = \sum_{p+q+1=l} \lambda^{p+q}(-1)^{m(p,q)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}\left\{f_i^{(p)}, g_j^{(q)}\right\}^{2k+1}$

où $\qquad \left\{f_i^{(p)}, g_j^{(q)}\right\}^{2k+1} = \dfrac{\hbar^{2k+1}}{(2k+1)!}\Lambda^{\alpha_1\beta_1}\Lambda^{\alpha_2\beta_2}...\Lambda^{\alpha_{2k+1}\beta_{2k+1}}\partial_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{2k+1}}f_i^{(p)}\partial_{\beta_1\beta_2...\beta_{2k+1}}g_j^{(q)}$

$$\left(\Lambda^{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

On a que $P_1^{(t)}$ est une déformation de la structure d'algèbre de Lie de J. Le cas quantique canonique correspond au cas $t = 1$, dans l'esprit de ce que l'on a fait précédemment pour le cas quantique.
Soit :

$$P^{(t)} = P_0^{(t)} + \lambda P_1^{(t)}$$

Considérons l'application bilinéaire :

$$\begin{aligned} P^{(1)} = \psi_1^{(t)} \circ P^{(t)} &= \psi_1^{(t)} \circ P_0^{(t)} + \lambda\psi_1^{(t)} \circ P_1^{(t)} \\ &= P_0^{(1)} + P_1^{(1)} \end{aligned}$$

$$\text{où} \qquad P_0^{(1)} = \psi_1^{(t)} \circ P_0^{(t)} \qquad P_1^{(1)} = \psi_1^{(t)} \circ P_1^{(1)}$$

Le produit :

$$P^{(1)} = P_0^{(1)} + \lambda P_1^{(1)}$$

est un produit de type Moyal (c'est, à l'identification de λ et $\sqrt{-1} = i$ près, le produit de Moyal). On peut montrer que c'est seulement pour cette valeur $t = 1$ que le produit est associatif.

IV.4 : Discussion des résultats

On a vu dans un premier temps quelles structures algébriques on pouvait construire, qui puissent contenir au niveau de l'algèbre des observables et des dérivations de cette algèbre le cas classique et le cas quantique comme cas particulier. Ce cadre est unique que la particule soit classique ou quantique. Dans le cas classique on sait que les dérivations de l'algèbre des observables (C^∞) sont les champs de vecteur (C^∞). On les a dans notre formalisme et l'on peut donc considérer des évolutions qui ne sont pas hamiltoniennes. Dans le cas quantique l'algèbre de Jordan des observables est spéciale (soit A une algèbre associative, d'espace vectoriel sous jacent V, et dont le produit est noté P, l'algèbre de Jordan spéciale J associée à A, est l'algèbre de même espace vectoriel sous jacent V, mais dont le produit est le symétrisé du produit P). On sait montrer dans le cas algébrique (dimension finie) que l'ensemble des dérivations d'une algèbre de Jordan spéciale coïncide avec celle de l'algèbre associative associée (voir Jacobson[9]). Nous ne sommes pas dans le cas algébrique et nous pouvons seulement montrer que toute dérivation de l'algèbre associative associée à notre algèbre de Jordan, est une dérivation de cette algèbre de Jordan.

Dans le cas canonique on écrit l'unique équation d'évolution pour une particule :

Soit $H = (0, [\ \ .\ \ , -h]_{P^{(t)}})$ une dérivation de $J^{(t)}$ avec $h \in V_N[[t]]$ et soit $F_s = \left(M_{f_s}, 0\right)$ on écrit :

$$\lambda \left(\hbar \frac{d}{ds} F_s\right) = [F_s, H]$$

Pour $t = 0$ on obtient :

$$\frac{d}{ds} F_s = \left(M_{\{f_s, h\}}, 0\right)$$

qui est bien l'équation d'évolution déterministe réversible classique " en Heisenberg" . Pour $t = 1$ on obtient :

$$\lambda \hbar \frac{d}{ds} F_s = \left(M_{[f_s, h]_{P^{(1)}}}, 0\right)$$

On peut d'ores et déjà annoncer que cette équation est l'équation d'évolution déterministe réversible en "Heisenberg" d'une particule quantique. Il faudra cependant attendre les résultats du chapitre suivant pour avoir une justification totale de ce fait.

V : Mécanique dans l'espace de Hilbert

V.1 : Une représentation particulière de l'espace de Hilbert

On décrit sommairement cette représentation. Pour plus de détails, on consultera [10]. Soit :

$$G_0(p,q) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{p^2+q^2}{\hbar}\right)$$

$$G_m(p,q) = \left[\left(\frac{2}{\hbar}\right)^m \frac{1}{m!}\right]^{\frac{1}{2}} (q-ip)^m G_0(p,q)$$

et soit $\mathcal{G}$ l'espace vectoriel complexe des combinaisons linéaires des G_m, $m \in \mathbb{N}$, tel que l'application :

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle : &\mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{C} \\ &(G,G') \longmapsto \langle G, G' \rangle \end{aligned}$$

$$\langle G, G' \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} \left(\overline{G}.G'\right)(p,q) \left(\frac{1}{\hbar} dp\, dq\right)$$

soit définie. $\langle .,. \rangle$ définit sur $\mathcal{G}$ un produit scalaire, soit une forme hermitienne définie positive. On a :

$$\langle G_m, G_{m'} \rangle = \delta_{mm'}$$

D'où pour $G = \sum_m \alpha_m G_m \qquad \alpha_m \in \mathbb{C}, \forall m.$

$$\langle G, G \rangle = \sum_m |\alpha_m|^2$$

La condition pour que $G = \sum_m \alpha_m G_m$ appartienne à $\mathcal{G}$ est donc que :

$$\sum_m |\alpha_m|^2 < \infty$$

La convergence forte dans $\mathcal{G}$ implique la convergence en chaque point. L'espace de Hilbert $\mathcal{G}$ est donc un espace de Hilbert de fonctions. De plus :

$$\begin{aligned} [p_0, q_0] : &\mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{C} \\ &G \longmapsto G(p_0, q_0) \end{aligned}$$

L'application $[p_0, q_0]$ est $\forall (p_0, q_0) \in \mathbb{R}^2$ une fonctionnelle linéaire bornée d'où par le théorème de Riez :

$$G(p_0, q_0) = \langle e_{p_0,q_0}, G \rangle$$

pour un e_{p_0,q_0} uniquement déterminé et $\forall G \in \mathcal{G}$. On déduit :

$$|G(p_0, q_0))| = |\langle e_{p_0,q_0}, G\rangle| \leq \|e_{p_0,q_0}\| \, \|G\|$$

L'inégalité étant l'inégalité de Schwartz. Les vecteurs $e_{p,q}$ seront appelés les vecteurs principaux. On a :

$$\langle G, H\rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} \langle G, e_{p,q}\rangle \langle e_{p,q}, H\rangle \frac{1}{\hbar}(dp\, dq)$$

Les $\left\{e_{p,q}, \quad (p,q) \in \mathbb{R}^2\right\}$ forment un ensemble complet.

On montre que $L^2(\mathbb{R}, dx)$ et $\mathcal{G}$ sont unitairement équivalents.
Soit A cet isomorphisme unitaire. A établit un isomorphisme entre les opérateurs linéaires sur $L^2(\mathbb{R}, dx)$ et ceux sur $\mathcal{G}$, notamment :

$$M = A^{-1} L A$$

où L est un opérateur dans $\mathcal{G}$ et M un opérateur dans $L^2(\mathbb{R}, dx)$. Les domaines respectifs sont reliés par :

$$\mathcal{D}(M) = A^{-1}\mathcal{D}(L)$$

Soit dans $L^2(\mathbb{R}, dx)$ les opérateurs :

$$\tilde{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X - \frac{d}{dx}\right) \qquad \mathcal{D}\left(\tilde{a}^\dagger\right) \subset L^2(\mathbb{R}, dx)$$

$$\tilde{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X + \frac{d}{dx}\right) \qquad \mathcal{D}(\tilde{a}) \subset L^2(\mathbb{R}, dx)$$

Définissons dans $\mathcal{G}$ les opérateurs $a^\dagger$ et a comme suit :

$$\left(a^\dagger\right)(p,q) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(q - ip)G(p,q) + \frac{i\hbar}{2}\left(\partial_p - i\partial_q\right)G(p,q)\right]$$

$$(aG)(p,q) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(q - ip)G(p,q) + \frac{i\hbar}{2}\left(\partial_p - i\partial_q\right)G(p,q)\right]$$

Dans les deux cas la définition est valable si le membre de droite est un élément de $\mathcal{G}$, ceci définissant dans $\mathcal{G}$ les domaines $\mathcal{D}\left(a^\dagger\right)$ et $\mathcal{D}(a)$ de $a^\dagger$ et a respectivement. $\tilde{a}^\dagger$ et $\tilde{a}$ étant des opérateurs fermés on a que $A\tilde{a}^\dagger A^{-1}$ et$A\tilde{a}A^{-1}$ sont fermés et on vérifie :

$$A\tilde{a}^\dagger A^{-1} = a^\dagger$$

$$A\; aA^{-1} = a$$

D'où l'on tire pour :

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{a}^\dagger + \tilde{a}\right)$$

$$\left(AXA^{-1}G\right)(p,q) = qG(p,q) + \frac{i\hbar}{2}\partial_p G(p,q)$$

et pour $\quad \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{d}{dx} = \dfrac{1}{i\sqrt{2}}\left(\tilde{a} - \tilde{a}^\dagger\right)$

$$\left(A\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}A^{-1}G\right)(p,q) = pG(p,q) - \frac{i\hbar}{2}\partial_q G(p,q)$$

On peut maintenant revenir à la justification du cas quantique défini au paragraphe IV.3.2 Pour ce faire identifions λ à $i = \sqrt{-1}$ dans le produit $P^{(1)}$. On a :

$$P^{(1)}(q,G)(p,q) = qG(p,q) + \frac{i\hbar}{2}\partial_p G(p,q)$$
$$P^{(1)}(p,G)(p,q) = pG(p,q) - \frac{i\hbar}{2}\partial_q G(p,q)$$

Convenons d'écrire $P^{(1)}$, P et définissons l_p et l_q comme :

$$l_q(G) = P(q,G)$$
$$l_p(G) = P(p,G)$$

On a alors identifié dans notre représentation les opérateurs de position et de quantité de mouvement comme étant respectivement l_q et l_p. On vérifie :

$$[l_q, l_p] = l_q \circ l_p - l_p \circ l_q = i\hbar$$

Ainsi se trouve justifié à posteriori la dénomination quantique apparaissant dans le chapitre IV.

Soit $l_{P_{G_n}}$ l'opérateur qui agit dans $\mathcal{G}$ de la manière suivante :

$$l_{P_{G_n}}(G) = P\left(\frac{1}{\alpha^2}P\left(G_n, \overline{G_n}\right), G\right)$$

$l_{P_{G_n}}$ est $\forall G_n$ un projecteur. Si $G \in \mathcal{G}$, le projecteur sur G s'écrira :

$$l_{P_G} = \frac{1}{\alpha^2}P(G,G) = \frac{1}{\alpha^2}G * \overline{G}$$

V.4 : <u>Applications</u>

Soit $\Gamma = \mathbb{R}^{2n}$ et $\mathcal{S} = \left\{ S \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \middle| S^*\Omega = \Omega \right\}$

Aut(Γ) : l'ensemble des automorphismes de Γ.

Ω : La deux-forme symplectique.

$\mathcal{S}$ est un groupe. Pour $S \in \mathcal{S}$ définissons :

$$\begin{aligned} U_S : &\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \\ &G \longmapsto U_S G \qquad \text{tel que :} \\ &\qquad (U_S g)(a) = \alpha_S(a) G\left(S^{-1}(a)\right) \qquad a \in \Gamma. \\ &\qquad \alpha_S : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad |\alpha_S(a)| = 1 \qquad \forall a \in \Gamma \end{aligned}$$

U_S a les propriétés :

• U_S est linéaire.

• $\langle U_S G, U_S H \rangle = \langle G, H \rangle \quad \forall G, H \in \mathcal{G}$. En effet la forme volume sur Γ est $\beta \Omega^n$ et l'on a : $S^* \Omega^n = \Omega^n \qquad (\ \Omega^n = \Omega \wedge \Omega \wedge \ldots \wedge \Omega \ )$.

• $U_S^{-1} = U_{S^{-1}}$

De plus on a :

$$(U_S G)(a) = \langle e_a, U_S G \rangle = \langle U_{S^{-1}} e_a, G \rangle$$
$$(U_S G)(a) = \alpha_S(a) G\left(S^{-1}(a)\right) = \left\langle \overline{\alpha_S}(a) e_{S^{-1}(a)}, G \right\rangle$$

d'où :

$$U_S e_a = \alpha_S(a) e_{S(a)}$$

Inversément supposons que :

$$U_S e_a = \alpha_S(a) e_{S(a)}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} (U_S G)(a) &= \langle e_a, U_S G \rangle \\ &= \left\langle \overline{\alpha_S}(a) e_{S^{-1}(a)}, G \right\rangle \\ &= \alpha_S(a) G\left(S^{-1}(a)\right) \end{aligned}$$

D'où :

$$(U_S G)(a) = \alpha_S(a) G\left(S^{-1}(a)\right) \qquad \forall G \in \mathcal{G}$$

Soit $\{V_\gamma, \gamma \in \mathbb{R}\}$ un groupe à un paramètre continu, unitaire dans l'espace de Hilbert. Via le théorème de Stone on a :

$$i \frac{d}{d\gamma} U_\gamma \psi \bigg|_{\gamma=0} = B\psi$$

B auto-adjoint.

Ayant identifié B comme un l_b, b une fonction sur $\mathbb{R}^{2n}$ on a dans notre représentation, pour l_{P_G} le projecteur de rang 1 associé à $G \in \mathcal{G}$:

$$\left[i \frac{d}{d\gamma} U_\gamma l_{P_G} U_\gamma^{-1} \right]_{\gamma=0} = [l_b, l_{P_G}] = l_{[b, P_G]_P}$$

On a fait d'autre part l'hypothèse que U_γ soit tel que l'on puisse définir $[b, P_G]_P$. Dans les coordonnées $p_i, q_i, i = 1, 2, ...n$, si b est tel qu'il soit au plus quadratique en les p_i, q_i on a :

$$[b, P_G] = [b, P_G]_{P(0)}$$

Via l'isomorphisme qui à une 1-forme associe un champ de vecteur, donné par :

$$i_X \Omega \longleftrightarrow X$$

on associe à db le champ de vecteur X_b :

$$i_{X_b} \Omega = db$$

X_b définit alors un groupe à un paramètre S_γ d'automorphismes de Γ tel que :

(i) $S_\gamma^* \Omega = \Omega$

(ii) Si V_{S_γ} est le groupe à un paramètre unitaire, continu dans $\mathcal{G}$ associé à S_γ :

$$\left(V_{S_\gamma} G\right)(a) = G\left(S_\gamma^{-1} a\right)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \left[i \frac{d}{d\gamma} V_{S_\gamma} l_{P_G} V_{S_\gamma}^{-1}\right]_{\gamma=0} &= l_{[b,P_G]_{P(0)}} \\ &= l_{[b,P_G]_P} \end{aligned}$$

Pour $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ l'espace projectif associé à $\mathcal{G}$, U_γ et V_{S_γ} définissent la même transformation :

$$U_\gamma = \beta(\gamma) V_{S_\gamma} \qquad |\beta(\gamma)| = 1$$

Donc on retrouve le fait bien connu de l'impossibilité d'une "règle de quantification "au delà des polynômes quadratique en p, q. Ceci provient du fait que la dérivation $[b, .]_P$ coïncide avec $[b, .]_{P(0)}$ seulement si b est au plus quadratique en p et q.

On a cependant le fait intéréssant suivant :

Moyennant l'identification d'un état classique $(p_0, q_0) \in \mathbb{R}^2$ avec le rayon de l'espace de hilbert $e_{p_0,q_0} \in \mathcal{G}$, on peut écrire une équation d'évolution unique, en Schrödinger, pour le cas quantique et classique. Ceci n'est du reste pas limité à l'équation d'évolution, mais s'applique aussi aux équations que l'on obtient en considérant les représentations des groupes à un paramètre de symmétrie du système dont le générateur peut s'exprimer comme une fonction en p et q compatible avec le produit P.

Supposons qu'une particule soit soumise à un potentiel $V(q)$ où $V(q)$ est un polynôme ou encore une fonction $\mathcal{S}$ en q. l'hamiltonien H s'écrit :

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

Sans connaître la nature quantique ou classique de la particule, on montre que l'on peut écrire l'équation d'évolution :

$$i\hbar\frac{d}{dt}P_G = [H, P_G]_{P^{(t)}}$$

où P_G est défini comme précédemment. Traiter le cas quantique revient à faire $t = 1$ dans $P^{(t)}$. Le cas classique consiste lui à choisir pour G un $e_{p,q}, p, q \in \mathbb{R}^2$ et à faire $t = 0$ dans $P^{(t)}$.

Deux oscillateurs couplés

Nous allons traiter le cas de deux oscillateurs couplés. Comme dans la méthode usuelle on va considérer un changement de variables amenant à considérer deux particules fictives, l'une au centre de masse et l'autre appelée relative. La nouveauté introduite par un des auteurs dans un problème similaire, toutefois traité là dans le formalisme habituel [11] consiste à considérer la particule lié au centre de masse comme une particule classique.
Soit donc deux oscillateurs de même masse, couplés par un ressort. L'hamiltonien de ce système s'écrit :

$$h = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(q_1 - a)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(q_2 + a)^2 + \lambda m\omega^2(q_1 - q_2)^2$$

Effectuons le changement de variables :

$$q_G = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) \qquad q_r = q_1 - q_2$$
$$p_G = p_1 + p_2 \qquad p_r = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)$$

On postule donc que les variables du centre de masse sont des variables classiques, ce qui revient à dire que l'algèbre de Jordan générée par les p_G et q_G est selon le schéma introduit au paragraphe IV une algèbre de Jordan classique. Les variables de la particule relative seront elles considérées comme quantiques, donc l'algèbre de Jordan qu'elles génèrent sera une algèbre quantique (voir IV). La connaissance de l'algèbre générée par les p_G et q_G et de celle générée par les p_r et q_r nous permet de connaître quelle type d'algèbre engendrent les p_1, q_1 et p_2, q_2.
Il n'en demeure pas moins que dans notre formalisme nous ne sommes pas obligés à ce stade de choisir la nature classique ou quantique des particules fictives en présence. Voyons le déjà dans le formalisme du paragraphe II :
Soit a une observable relative à la particule liée au centre de masse. a est donc de la forme :

$$a = a_1 \otimes I$$

Dans le formalisme du paragraphe III on lui associe $A = (M_a, 0)$. La forme d'une observable b liée à la particule relative est :

$$b = I \otimes b_2$$

Dans le formalisme du paragraphe III on lui associe $B = (M_b, 0)$. L'hamiltonien du problème s' écrit :

$$\begin{aligned} h &= \frac{p_G^2}{2\mu_G} \otimes I + \frac{1}{2}\mu_G \omega_G^2 q_G^2 \otimes I + I \otimes \frac{p_r^2}{\mu_r} + I \otimes \frac{\omega_r^2}{2}\left(q_r - \frac{2a}{1+4\lambda}\right)^2 + \\ &\quad I \otimes m\omega^2 a^2 \frac{4\lambda}{1+4\lambda} \\ &= h_G \otimes I + I \otimes h_r \\ &= \mathcal{H}_G + \mathcal{H}_r \end{aligned}$$

où : $\omega_g = \omega$ et $\omega_r = \omega(1+4\lambda)^{\frac{1}{2}}$ A $\mathcal{H}_G$ et $\mathcal{H}_r$ sont associés :

$$H_G = (0, [\quad . \quad, -\mathcal{H}_G]_{P(t)}) \mathrm{et} H_r = (0, [\quad . \quad, -\mathcal{H}_r]_{P(t)})$$

Soit A_s (resp. à B_s) la courbe dans l'espace des observables associées à A (resp. à B), on a l' équation du mouvement :

$$\lambda\left(\hbar \frac{d}{ds} A_s\right) = [A_s, H_G] \qquad \left(\mathrm{resp.}\lambda\left(\hbar \frac{d}{ds} B_s\right) = [B_s, H_r]\right)$$

Si l'on préfère se placer en Schrödinger, on écrit quelles que soient la nature des variables considérées, l'équation de mouvement :

$$i\hbar \frac{dP_G}{dt} = [h, P_G]_{P(t)}$$

P_G est de la forme $P_{G_G} \otimes P_{G_r}$; on obtient alors les équations:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dP_{G_G}}{dt} &= [h_g, P_{G_G}]_{P(t)} \\ i\hbar \frac{dP_{G_r}}{dt} &= [h_r, P_{G_r}]_{P(t)} \end{aligned}$$

On peut alors résoudre ces équations sans donner encore une valeur à t. Aprés cela on peut se ramener au choix fait précédemment sur la nature classique ou quantique des particules fictives en présence et par conséquent choisir comme condition initiale pour P_{G_G} un G_G égal à un $e_{p,q}$, et faire $t = 0$ et comme condition initiale pour P_{G_r} un G_r égal à l'un quelquonque des vecteurs de $\mathcal{G}$ et faire $t = 1$.

CONCLUSION

Dans ce travail nous n'avons pas cherché à déduire la mécanique quantique de la mécanique classique ou inversément. Cependant certains objets et structures communs nous ont permis de construire dans le chapître II un formalisme mathématique entièrement nouveau et suceptible de développements ultérieurs. Au niveau des observables nous avons considéré la structure d'algèbre de Jordan comme étant la structure physiquement importante, ce qui nous a conduit à déformer cette structure en premier lieu. Nous avons pu par la suite faire le lien avec le formalisme de déformations de structures d'algèbre associative et de lie déjà introduites dans [7]. On notera à ce propos qu'ici nous nous sommes limités au cas plat (ou local) mais que de nombreux résultats concernants le problème de déformations de $C^\infty(W)$, W une variété symplectique ou de Poisson, existent [12,13,14].
Enfin la représentation "pseudo-Bargmann" introduite dans le chapîte V s'appaente II la technique d'états cohérents bien connue [15], mais le fait d'utiliser le formalisme de déformation "en Schrödinger est original et permettra peut-être dans le futur de voir sous quelle conditions une particule peut perdre des propriétés classique tout en gagnant des propriétés quantiques ou inversément.

BIBLIOGRAPHIE

[1] : C.Piron : Foundations of quantum physics, W.A Benjamin, Reading, Mass., 1976.

[2] : D.Aerts : The one and the many, Doctoral Thesis, Vrije Universiteit, Brussel, Tena(1981).

[3] : M.Gerstenhaber : Annals of mathematics, 79, 1964, 59-103.

[4] : A.Lichnerowicz : in Quantum theory, Groups, Fields and particules, 3, 1982 D.Reidel publishing company.

[5] : D.Arnal : in Quantum theory and Geometry, 1988, Kluwer academic publishers and references quoted there.

[6] : V.Bargmann : Communications on pure and applied mathematics, vol.XIV, 1961, 187-214.

[7] : F.Bayen, M.Flato, C.Fronsdal, A.Lichnerowicz, D.Sternheimer, Annals of physics 111, 1978, 61-149.

[8] : H.Groenewold, Physica 12, 1946,405-460.

[9] : N.Jacobson, Sructure and Representation of Jordan Algebra, Amer. Math.Soc.Colloq.Publ., vol.39, Providence, R.I, 1969.

[10] : B.Boulat, Mécanique dans l'espace de phase, l'approche des déformations, thèse 2380 de l'Université de Genève, 1989.

[11] : C.Piron, Cours de physique théorique, Université de Genève, 1988.

[12] : M.De Wilde, P.Lecomte, in deformation theory of algebras and structures and applications, edited by M.Hazewinkel and M.Gerstenhaber, Nato Asi series, series C, vol.247, 1988, p897.

[13] : J.Vey, Comm.Math.Helv., 50, 1975, 421-454.

[14] : J.Bassart, M.Flato, A.Lichnerowicz, D.Sternheimer, Letter in math.phys., 8, 1984, 483-494.

[15] : A.Perelomov, generalized coherent states and their applications , Springer, 1986.