

Zeitschrift: Bündner Schulblatt = Bollettino scolastico grigione = Fegl scolastic grischun
Herausgeber: Lehrpersonen Graubünden
Band: 76 (2014)
Heft: 1: Mathematik

Artikel: Heterogenität im Mathematikunterricht - Herausforderung oder Chance? : Projekt Mastrils
Autor: Matter, Bernhard
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-720182>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Heterogenität im Mathematikunterricht – Herausforderung oder Chance?

Projekt Mastrils

Heterogene Leistungen sind bereits beim Schuleintritt eine Tatsache. In höheren Klassen ist die Spannweite von leistungsschwach bis leistungsstark tendenziell zunehmend. Dieser Heterogenität steht der Anspruch gegenüber, allen Kindern die für sie optimalen Lernprozesse zu ermöglichen. Wie können Lehrpersonen mit dieser Herausforderung im Mathematikunterricht umgehen? Welche Chancen bietet die Heterogenität für das Lernen der Kinder?

VON BERNHARD MATTER, DOZENT FÜR MATHEMATIKDIDAKTIK, PHGR

Nehmen Sie sich einige Minuten Zeit und lösen Sie folgende Aufgabe: *6 Freunde verabschieden sich voneinander mit Handschlag. Wie viele Handschläge sind es?* Vergleichen Sie Ihre Lösung mit den abgebildeten Schülerantworten¹.

Den Schülerinnen und Schülern des 4. bis 6. Schuljahres in Mastrils wurde diese Aufgabe in der folgenden Form gestellt: Die Viertklässler bearbeiteten die Frage vorerst für 4, die Fünftklässler für 5 und die Sechstklässler für 6 Freunde. Dabei ging es weniger um einen der Jahrgangsstufe angepassten Schwierigkeitsgrad der Aufgabe, als vielmehr um den

zusätzlichen Nutzen beim nachträglichen Vergleichen der Lösungen. Dieses Prinzip könnte auch in einer altershomogenen Klasse mit demselben Effekt genutzt werden.

Die Lösungswege sehen auf den ersten Blick unterschiedlich aus, doch bei allen Lösungsstrategien resultiert die Summe der ersten 3, 4 oder 5 natürlichen Zahlen, je nach vorgegebener Anzahl der Freunde². Die Lösungsstrategie des Fünftklässlers veranschaulicht die enge Verwandtschaft mit einer Aufgabe aus dem obligatorischen Geometrielehrmittel (A22, 4. Klasse): Gegeben sind 5 Punkte. Wie viele verschiedene Geraden können maximal durch je zwei Punkte gelegt werden? Dieses mathematische Muster steckt in zahlreichen weiteren Aufgabenstellungen (vgl. Kasten Aufgabenbeispiele).

Ich habe von Punkt 1 zu 2,3,4,5,6 denn von Punkt 2 zu 3,4,5,6 dann von Punkt 3 zu 4,5,6 von Punkt 4 zu 5,6...

$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$

Sechstklässlerin

Ich habe ... alle Handschläge gezeichnet von 1, 2, 3, 4 und dann habe ich alle zusammen gezählt und das gibt 10.

Fünftklässler

$3 + 2 + 1 = 6$ weil es 4 Kinder sind und ein Kind gibt 3 Handschläge der 2 zweis und der Letzte 1.

Viertklässler

Kommunizieren und Argumentieren

Nach dem individuellen Lösen tauschten die Schülerinnen und Schüler ihre Erkenntnisse in Dreiergruppen aus, so dass jede «Anzahl Freunde» vertreten war. Kinder, welche die Lösungen nur teilweise gefunden hatten, konnten mithilfe der Erklärungen ihrer Mitschülerinnen und Mitschüler ihre Strategien vervollständigen, die helfenden Kinder vertieften durch das Erklären die eigenen Erkenntnisse. Das Finden

Aufgabenbeispiele zum Muster «Dreieckszahlen»:

- Lea möchte drei Kugeln Glace kaufen. Sie mag Vanille, Erdbeer und Schokolade. Wie kann sie 3 Kugeln nehmen?
- Wie viele Zahlen kannst du in einer 3-spaltigen Stellentafel mit 1, 2, 3 oder mehr Plättchen legen?
- Wie viele verschiedene Steine enthält ein handelsübliches Dominospiel?
- Gegeben sind eine vorgegebene Anzahl Punkte. Wie viele verschiedene Geraden können maximal durch je zwei Punkte gelegt werden?
- An einer Party stösst jeder mit jedem an. Dabei erklingen die Gläser 120 mal. Wie viele Personen nehmen an der Party teil?
- Wie gross ist die Anzahl der mit 3 Würfeln möglichen Würfe, wenn die Würfel nicht unterscheidbar sind?

Arbeit in 3er Gruppen

a) Vergleicht eure Lösungswege. Findet ihr Gemeinsamkeiten?

- Wir haben alle den gleichen Lösungsweg.
 - Wir haben immer von einem Schüler auf die anderen gezählt.
 - 4 Klasse: 6 H. Schläge +4
 - 5 Klasse: 10 H. Schläge +5
 - 6 Klasse: 15 H. Schläge +5

b) Wie viele Handschläge sind es bei 7, 8, 9 oder 10 Freunden? Begründet eure Antwort.

7: 21 H. Schläge \rightarrow A: es ist immer +1
 8: 28 H. Schläge \rightarrow mehr bei den Lösungen
 9: 36 H. Schläge \rightarrow weil es Jack Zahlen
 10: 45 H. Schläge \rightarrow sind.



von Gemeinsamkeiten in den Lösungen, das Verallgemeinern auf höhere Anzahlen von Freunden und das gemeinsame Formulieren fördert wichtige prozessbezogene Kompetenzen der Kinder und führt zu einem nachhaltigen Lerneffekt. Mehrere Gruppen erinnerten sich dabei an eine früher gelöste Aufgabe zu der Stellentafel (s. Kasten Aufgabenbeispiele) und notierten den Begriff Dreieckszahlen. Eine Gruppe hat in ihrer gemeinsamen Antwort den Ursprung dieses Begriffs dargestellt (vgl. Schülerbeispiel zu 3er-Gruppen). Bereits in der Lösung der Sechstklässlerin (s. oben) lässt sich ein Dreiecksmuster erkennen. Im Verlauf der weiteren Schulzeit werden die Kinder diesem mathematischen Konzept in unterschiedlichen Problemstellungen erneut begegnen. Dabei erfahren die Lernenden, dass sich ein und dasselbe Muster in arithmetischen, geometrischen, algebraischen, kombinatorischen oder anderen Zusammenhängen manifestieren kann.

Durch eigenständiges Erforschen solcher fundamentaler Konzepte, zusammen mit dem Kommunizieren und Argumentieren in Gruppen oder in der Klasse erwerben die Schülerinnen und Schüler ein nachhaltiges Verständnis, welches ihnen zunehmend ermöglicht, diese mathematischen Konzepte in neuen Problemen erfolgreich anzuwenden. Der bekannte deutsche Mathematikdidaktiker Wittmann³ hat einmal geschrieben: «Mathematische Muster dürfen nicht als etwas fest Gegebenes angesehen werden, das man nur betrachten und reproduzieren kann. Ganz im Gegenteil: Es gehört zu ihrem Wesen, dass man sie erforschen, fortsetzen, ausgestalten und selbst erzeugen kann.» Mathematik ist somit nicht eine Sammlung von Faktenwissen, das fortwährend kumulativ erweitert wird. Neues mathematisches Wissen entwickelt

sich auf der Basis des bereits vorhandenen Wissens, welches durch neue Erfahrungen, insbesondere durch Abstraktions- und Verallgemeinerungsprozesse, selbst wieder neu strukturiert wird. Dieser individuelle Konstruktionsprozess erfordert entsprechend der historischen Entwicklung der Mathematik die soziale Interaktion. So wie sich das heutige mathematische Wissen in langwierigen Prozessen durch Kommunizieren und Argumentieren, Formulieren und Umformulieren entwickelte, braucht es auch in der Schule für strukturelles Lernen die soziale Auseinandersetzung unter den Lernenden und mit den Lehrpersonen.

Gute, sogenannte substantielle Aufgaben

Gute, sogenannte substantielle Aufgaben fördern tieferes Verständnis durch prozessbezogenes Denken, durch suchen, beschreiben und entwickeln von Mustern und durch kommunizieren und begründen. Unter diesen Gesichtspunkten wird klar, dass Planarbeit (Mathepläne, Wochenpläne) diese Ansprüche nicht erfüllen kann. Diese zum Teil auf dem Markt erhältlichen vorgefertigten Pläne bestehen mehrheitlich aus reproduzierenden Aufgaben, es gibt kaum Raum für das Erforschen von Mustern oder den Austausch mit den Mitschülerinnen und Mitschülern. Lernende, welche zu häufig mit Plä-

Für die folgenden Aufgaben brauchst du die Ziffernkärtchen 1, ..., 9 je ein Mal.

- Wähle zwei Ziffernkärtchen aus.
Wie viele verschiedene zweistellige Zahlen kannst du mit zwei Ziffern bilden? Addiere die Zahlen und dividiere durch die Summe der Ziffern.
Wiederhole diese Aufgabe mit andern Ziffernkärtchen, bis dir etwas Besonderes auffällt. Kannst du deine Erkenntnis begründen?
- Wähle wiederum zwei Ziffernkärtchen aus und nimm eine der Ziffern zwei Mal. (Beispiel: 2, 5, 5)
Wie viele verschiedene dreistellige Zahlen kannst du mit den gewählten Ziffern bilden? Addiere diese Zahlen und dividiere durch die Summe der Ziffern.
Wiederhole diese Aufgabe mit andern Ziffernkärtchen, bis dir etwas Besonderes auffällt. Kannst du deine Erkenntnis begründen?
- Wähle jetzt drei Ziffernkärtchen aus.
Wie viele dreistellige Zahlen kannst du mit diesen drei Ziffern bilden? Addiere diese Zahlen und dividiere durch die Summe der Ziffern.
Wiederhole diese Aufgabe mit andern Ziffernkärtchen, bis dir etwas Besonderes auffällt. Kannst du deine Erkenntnis begründen?
- Wähle wiederum drei Ziffernkärtchen aus und nimm eine der Ziffern zwei Mal. (Beispiel: 3, 5, 8, 5)
Wie viele verschiedene vierstellige Zahlen kannst du mit den gewählten Ziffern bilden? Addiere diese Zahlen und dividiere durch die Summe der Ziffern. Wiederhole diese Aufgabe mit andern Ziffernkärtchen, bis dir etwas Besonderes auffällt. Kannst du deine Erkenntnis begründen?

A 3, 7, 5, 3

753	$3 \times 300 : 15 = 212$	A: Wenn der Divisor die Hälfte einer Zahl ist gibt es immer 2 2 2....
735	$3000 : 15 = 200$	
375	$300 : 15 = 20$	
357	$30 : 15 = 2$	
537		

573
380

B Jede Ziffer kommt 6 mal vor dann gibt es immer das doppelte von der Summe der Zahlen. So ist es gleich wie bei der Aufgabe 2. Nur ist es das doppelte.

$200 + 20 + 2 = 222$

C 4. Gegeben sind die Ziffern 1, 2, 3, 4. Beantworte die folgenden Fragen, ohne alle möglichen Zahlen aufzuschreiben:

a) Stelle dir vor,

- du würdest alle möglichen dreistelligen Zahlen, die du aus diesen 4 Ziffern bilden kannst, addieren und
- danach durch die Summe der Ziffern (Quersumme) dividieren. Welches wäre das Ergebnis? Begründe deine Antwort.

Ergebnis: 6666

Begründung: In jeder spalte ist immer ist immer jede Zahl sechs mal dann gibt es z.B mit den zahlen 1,2,3,4 immer 60. 24 zahlen

b) Kannst du sagen, wie gross die Summe aller möglichen Zahlen wäre, ohne zu addieren?

Das was man : gerechnet hat muss man : rechnen

1, 2, 3, 4

1234	4231	
1342	4213	
1324	4312	60
1432	4321	
1432	4123	$60000 : 10 = 6000$
1243	66660	$6000 : 10 = 600$
1423		$600 : 10 = 60$
2134		
2341		
2413		
2431		
2314		
3142		
3124		
3241		
3214		
3412		
3421		

D Ergebnis: 6666

Begründung: Es ist das gleiche nur kann man bei man jede Ziffer 6 mal an jede Stelle setzen kann. Es sin 4 Stellen darum gibt es 6 möglichkeiten.

Man muss die Summe der Ziffern mal 6666 rechnen.

nen arbeiten, neigen dazu, Aufgaben schnell abzuhaken, ohne vertiefte Auseinandersetzung. Durch das eilige Springen von Aufgabe zu Aufgabe werden kaum Zusammenhänge erkannt und die Kommunikation verunmöglicht, weil die Lernenden an unterschiedlichen Orten im Plan sind. Planarbeit ist somit bloss eine zeitliche Flexibilisierung. Die Lehrerzentrierung wird verlegt ins Aufgabenmaterial mit meist vorgeschriebenen Lösungswegen⁴.

Auch das Üben von algorithmischen Tätigkeiten wie schriftliche Rechenverfahren kann in einem substantiellen Umfeld eingebettet werden. Das zweite Beispiel (siehe Kasten) soll zeigen, dass dabei grundlegende Einsichten für das Verständnis solcher Verfahren zusätzlich vertieft werden können. Während das erste Beispiel mit den Freunden auf einer einfachen, kurzen Fragestellung beruht, zeigt dieses zweite Beispiel, dass substantielle Aufgaben auch umfassender sein können. Es braucht eine Einführung in das Aufgabenformat, so dass

auf dieser Basis forschendes, interaktives Lernen möglich wird. Beschränken wir uns auf kleine Ausschnitte aus zwei Schülerdokumenten zur Aufgabe 3. Die grosse Heterogenität widerspiegelt sich auch in der Qualität von Begründungen. Die Spannweite reicht von blossen Beschreibungen bis zur Formulierung tieferer Einsichten. Nicht nur Texte **B**, sondern auch die Art und Weise der Darstellung von Lösungswegen, können Erkenntnisse dokumentieren, so wie die Division im Lösungsbeispiel einer Schülerin **A**. Kinder können nicht einfach plötzlich argumentieren. Sie müssen diese Kompetenz im Verlaufe ihrer Schulzeit aufbauen. Alle Schülerinnen und Schüler haben durch die korrekte Ausführung zahlreicher Additionen und Divisionen ihre Kompetenzen im Operieren verbessert. Dabei benötigten sie keine Berichtigungen durch die Lehrpersonen, da alle Kinder im Verlaufe der Arbeit die Muster erkannt haben und falsch gelöste Aufgaben eigenständig korrigierten.

THEMA

In dieser Lernsequenz arbeiteten die Kinder in Partnergruppen. Nach einem Austausch im Klassengespräch folgte eine weitere Aufgabe in Einzelarbeit, um den Lernerfolg zu überprüfen. Es zeigte sich, dass einige Schülerinnen und Schüler ihre Erkenntnisse nicht auf vier verschiedene Ziffern übertragen konnten, andere konnten diesen Transfer zwar vollziehen, haben aber doch noch alle Zahlen notiert und addiert (s. Beispiel¹). Ein Schüler konnte durch logisches Folgern und Argumentieren allein zu einem korrekten Ergebnis kommen (s. Beispiel²). Für uns Lehrpersonen bleibt die Einsicht, dass Lernende nur besondere Leistungen erbringen können, wenn wir ihnen dazu Gelegenheit geben.

Der Lehrplan 21

Der Lehrplan 21 wird im Bereich Mathematik dank dem zugrundeliegenden Kompetenzmodell im Zusammenspiel mit substantiellen Aufgaben den Umgang mit Heterogenität erleichtern. Man kann sich die inhaltlichen (Kompetenzbereiche) und die prozessbezogenen (Handlungsaspekte) Kompetenzen als Gerüststangen vorstellen, entlang derer die Kinder im Verlaufe der Schulzeit im Sinne des Spiralprinzips lernen. Die Schülerinnen und Schüler befinden sich zwar in unterschiedlichen Höhen auf den Gerüststangen, aber die substantiellen Aufgaben erlauben ihnen einen individuellen Einstieg und Lernzuwachs. Ein einzelner Lernender kann auf der «Gerüststange Operieren» bereits weit oben, jedoch auf der «Gerüststange Argumentieren» noch weit unten sein. Substantielle Aufgaben werden gemeinsam mit einem verstärkten Einbezug der sozialen Interaktion die entsprechenden Kompetenzen verbessern und damit zu einem nachhaltigen Lerneffekt führen.

¹Alle Schülerbeispiele stammen aus einem gemeinsamen Projekt des Fachbereichs Mathematik der PHGR und der Primarschule Mastrils.

²Aus Platzgründen musste bei allen Beispielen aus einer Vielzahl von Schülerdokumenten eine beschränkte Auswahl getroffen werden.

³s. Literaturverzeichnis

⁴Vgl. dazu Einführung in die Mathematikdidaktik (s. Literaturverzeichnis), S. 226ff

Literatur

- Krauthausen, Günter; Scherer, Petra (2007): Einführung in die Mathematikdidaktik. 3. Aufl. München: Elsevier Spektrum Akad. Verl. (Mathematik Primar- und Sekundarstufe).
- Wittmann, E.Ch. (2003): Was ist Mathematik und welche Bedeutung hat das wohlverstandene Fach für den Mathematikunterricht auch der Grundschule? In: Baum, M. und Wielpütz, H.: Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch. Seelze: Kallmeyer, 18-46

DIE SPRACHE VERLOREN
– MUSIKTHEATER AN DER PHGR

Die Rose Zuleida

Die Studierenden der PHGR führen im Frühsommer 2014 das Musiktheater «Die Rose Zuleida» auf. In dieser märchenhaften Metapher zum Sprachensterben und zum Klang der Sprache wechseln Textbeiträge mit Choreinlagen. Projektionen unterstreichen die schauspielerischen Interventionen auf der Bühne und evozieren magische Bilder, Lachen geht über in Besinnung.

Die Studierenden der PHGR laden alle Lehrpersonen ein, mit ihren Primarschulklassen die «Rose Zuleida» zu besuchen. (Unkostenbeteiligung 5.00 Sfr pro Person)

Das Musiktheater in der Aula der PHGR dauert etwa 70 Minuten.

Die Aufführungen finden zu folgenden Daten und Zeiten statt:

- **Dienstag, 17. Juni 2014:**
8.30 Uhr, 10.30 Uhr
- **Mittwoch, 18. Juni 2014:**
8.30 Uhr, 10.30 Uhr, 20.00 Uhr
- **Donnerstag, 19. Juni 2014:**
8.30 Uhr, 10.30 Uhr, 14.00 Uhr



Weitere Informationen
über das Musiktheater
«Die Rose Zuleida» erhalten
Sie unter www.phgr.ch

Die PHGR freut sich auf Ihre
Anmeldung!
E-Mail: info@phgr.ch
Telefon: +41 (81) 354 03 02

phGR