

**Zeitschrift:** Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern  
**Herausgeber:** Naturforschende Gesellschaft Bern  
**Band:** - (1857)  
**Heft:** 404-407

**Artikel:** Über das Polar Planimeter von Prof. Amsler in Schaffhausen  
**Autor:** Schinz, E.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-318662>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**Em. Schinz, über das Polar Planimeter  
von Prof. Amsler in Schaffhausen.**

(Vorgetragen den 28. November 1857.)

Die Jury der schweiz. Industrie-Ausstellung in Bern vom Jahr 1857 hat der Erfindung dieses Instrumentes die höchste Anerkennung durch Ertheilung der goldenen Medaille zuerkannt. — In der That verdient sowohl der theoretische Werth der dem Instrumente zu Grunde liegenden geometrischen Conception, als die vollendete praktische Form, die ihm der Erfinder zu geben wusste, diese Auszeichnung, und die Vereinigung dieser beiden Verdienste in einem und demselben Manne muss, unseres Erachtens, als eine seltene Erscheinung begrüsst werden.

Wenn einerseits der Gebrauch dieses Instrumentes, das für den Ingenieur, sei er Geometer, Eisenbahn- oder Maschinenbauer, von so grossem Werthe ist, durch die einfachen vom Verfasser ihm beigegebenen Regeln — selbst für jeden nicht mathematisch Gebildeten — leicht wird; so ist dagegen die Theorie, welche jene Regeln begründet, bei weitem nicht so leicht zur Anschauung zu bringen, als diejenige, auf der die bisherigen Planimeter beruhen, die die Quadratur von Flächen mittelst Anwendung rechtwinkliger Coordinaten bewirken.

Es ist aber nicht zu bezweifeln, dass die Verbreitung dieses nützlichen Instrumentes auch dadurch erleichtert werden muss, dass man seiner Theorie die grösstmögliche Anschaulichkeit verleiht.

In diesem Sinne unternehme ich es, selbst nachdem Prof. Amsler seine äusserst elegante und in wenigen Schritten zum Ziele führende Theorie veröffentlicht hat (in seiner Schrift: Über die mechanische Bestimmung

Bern. Mittheil. December 1857.

des Flächeninhaltes, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren, insbesondere über einen neuen Planimeter, Schaffhausen, A. Beck und Sohn) hier eine weniger kurze, aber auf mehr elementaren Anschauungen beruhende Theorie mitzutheilen, zu deren Aufstellung mich, vor der Veröffentlichung der Amsler'schen Schrift, einige bei Hrn. Mechanikus Kern in Aarau für Prof. Amsler anzufertigende Planimeter veranlassten, und welche ich im März 1856 der naturforschenden Gesellschaft in Aarau mitgetheilt habe.

Um das Nachfolgende verständlich zu machen, sei mir erlaubt, eine kurze Beschreibung des Amsler'schen Planimeters voranzuschicken. Ich werde mich hier, soweit möglich, derselben Bezeichnungen bedienen, die in Amslers Schrift eingeführt sind.

Eine Stange (EC), Radius, trägt am einen Ende die Einsatzspitze E, welche ins Papier der Zeichnung eingesteckt, fest bleibt, am andern Ende eine vertikale Axe (C), deren Verlängerung in C die Papierebene trifft. Um diese Axe (C) ist der Fahrarm (CF) drehbar, dessen Ende den Fahrstift (F) trägt. Mit dessen Spitze F wird die auf dem Papier verzeichnete Figur Z umfahren, deren Flächeninhalt wir bestimmen wollen.

Wir nennen R die Länge des Radius EC (auf der Papierebene gemessen), ebenso r die Länge des Fahrarms CF.

Der Fahrarm trägt die Lager der Axe, um welche sich die Laufrolle (D) dreht, die mit ihrem tiefsten Peripheriepunkte D stets die Papierebene berührt.

Die richtige Construction des Instrumentes fordert, dass diese Rollenaxe mit der Linie CF parallel sei. Nehmen wir ausserdem — der Einfachheit wegen — hier an, dass auch die Projection der Rollenaxe, und folglich D, mit CF zusammenfalle.

Amsler hat sein Planimeter in zwei-erlei Form construirt: Bei der neueren liegt die Rolle mit ihrer Axe zwischen der Axe (C) und dem Fahrstift (F) neben dem ausgebogenen Fahrarm; bei der älteren liegt die Rollenaxe unter dem über (C) hinaus verlängerten Fahrarm. — Diese Form gibt dem Instrument etwas grössere Stabilität und gestattet die Länge des Fahrarms beliebig zu verlängern oder zu verkürzen. Jene dagegen erleichtert die Ablesung der auf der Peripherie der Rolle angebrachten Theilung, und hebt die bei der ältern Form eintretende Beschränkung in der Drehung des Fahrarms um (C) auf, der übrigens auch bei der älteren Form durch eine etwas verlängerte Ausbiegung des Radius leicht abzuhefen wäre.

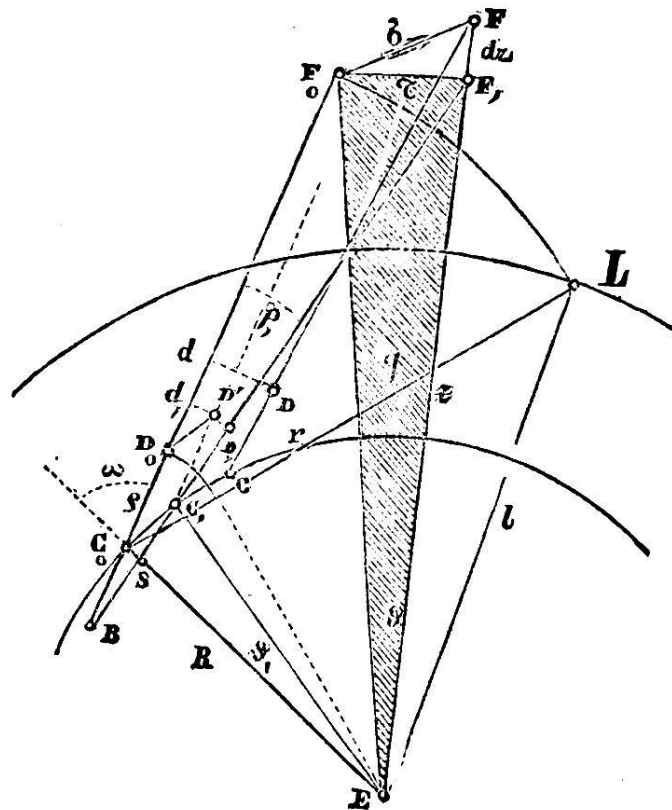
Die Rolle (D) läuft (für den in der Richtung von C nach F auf sie blickenden Beobachter) „vorwärts“ und „rechtsherum“, wenn sich ihr Mittelpunkt nach seiner Rechten bewegt. Die Zahlen ihrer Peripherie-Theilung (in 100 gleiche Theile) steigen links herum, sodass ihr Vorwärtsgehen stets höhere Zahlen zum Nullpunkt des Nonius herauf bringt, mit dessen Hülfe noch Zehnthelle der Theilungsintervalle oder Tausendtheile der Rollen Peripherie können abgelesen werden.

Durch eine endlose Schraube auf der Rollenaxe wird für jede ganze Umdrehung der Rolle ein Zahn des mit 10 Zähnen versehenen Zählrädchens fortgerückt, wodurch auch die ganzen Umdrehungen der Rolle unzweideutig markirt werden, da die Axe dieses Rädchens eine gleichfalls in 10 Theile getheilte Scheibe trägt, welche successive zu einem festen Index gelangen.

5. Bei dem Planimeter der neueren Form kann sich der Winkel zwischen Fahrarm und Radius bis zu  $180^{\circ}$  öffnen, sodass der Fahrstift alle Punkte erreichen

kann, die zwischen den Kreisperipherieen um  $E$  vom Radius  $(R + r)$  und  $\pm (R - r)$  liegen. Der Punkt  $D$  der Rolle bleibt zwischen den um  $E$  concentrischen Kreisen vom Radius  $R + \rho$  und  $R - \rho$ . Diese Bemerkung gibt über Umfang und Lage der Figur, deren Fläche das Instrument mit Einer Operation auszumessen vermag, genügende Auskunft.

Die Anwendung des Planimeters besteht darin, dass man die Peripherie der auszumessenden Fläche „rechts-herum“ mit dem Fahrstift  $F$  umfährt, und die Grösse der Drehung der Rolle bestimmt, welche das Umfahren der Figur bewirkt hat.



$Z$  sei eine geschlossene Curve, die von ihr umschlossene Fläche heisse  $J$ . Ihre Peripherie werde in unendlich kleine Curven Elemente wie  $F_0 F = \sigma$  getheilt,

nach deren Ende ziehe man aus E Radien vectoren von der Länge  $z$ , und  $z + dz$ , welche den Winkel  $\vartheta$  einschliessen. Das von ihnen und  $\sigma$  eingeschlossene Elementar-Dreieck hat den Inhalt:  $q = \vartheta \frac{z^2}{2}$

Von  $F_0$  fallen wir das Perpendikel  $F_0 F_1 = r$  auf  $EF$ , dann ist  $F_1 F = dz$  und  $EF_1 = EF_0$ .

Während der Fahrstift  $F$  das Element  $\sigma$  befährt, von  $F_0$  nach  $F$ , bewegt sich der Punkt der Rolle ( $D$ ), der die Papierebene berührt, von  $D_0$  nach  $D$ .

Da die Rolle sich nur in sofern dreht, als sie sich in der auf  $C_0 F_0$  senkrechten Richtung bewegt, dagegen mit ihrem tiefsten Punkt  $D$  nur auf dem Papier gleitet, sofern sie sich in der Richtung parallel zu  $C_0 F_0$  fortbewegt, so können wir die Drehung der Rolle, d. h. den von ihr abgewickelten Bogen  $w$ , offenbar durch die Entfernung des Punktes  $D$  von  $C_0 F_0$  messen, d. h. durch das von  $D$  auf  $C_0 F_0$  gefällte Perpendikel  $Dd$ .

Ebenso würde für die Bewegung des Fahrstifts von  $F_0$  nach  $F_1$ , wofür ( $D$ ) von  $D_0$  nach  $D_1$  gelangt, der von der Rolle abgewickelte Bogen  $u = D_1 d_1$ , d. h. gleich dem von  $D_1$  auf  $C_0 F_0$  gefällten Perpendikel sein.

Für die Bewegung des Fahrstiftes von  $F_1$  nach  $F$  aber, wofür ( $D$ ) von  $D_1$  nach  $D$  geht, wäre der von der Rolle abgewickelte Bogen,  $v$ , gleich dem von  $D$  auf  $C_1 F_1$ , oder von  $D_1$  auf  $CF$  gefällten Perpendikel.

Wegen der Kleinheit von  $\sigma$  und  $C_0 C_1$  oder  $C_0 C$  ist nämlich auch der Winkel, den  $C_0 F_0$  mit  $C_1 F_1$  oder mit  $CF$  einschliesst, unendlich klein, die auf deren verschiedene Schenkel gefällten Senkrechten demnach einander so viel als parallel. Ueberdies sind auch die Entfernungen  $DD_1$  oder  $dd_1$ , sowie  $FF_1$ , in Vergleich mit  $CD = C_0 D_0 = \rho$  unendlich klein, und daher die von  $D$  auf  $C_1 F_1$  und

von  $D_1$  auf  $CF$  gefällten zwei Perpendikel einander gleich.

Aus dieser Betrachtung geht hervor, dass:  $w = u + v$ , wo  $v$  negativ ist, wenn  $D$  zwischen  $C_0F_0$  und  $C_1F_1$  liegt, und hieraus folgt, dass die Bewegung der Rolle ganz dieselbe ist, ob der Fahrstift direkte von  $F_0$  nach  $F$  geführt werde, oder ob man ihn (in der Vorstellung) erst das Element  $\overline{F_0F_1} = \tau$  und dann  $\overline{F_1F} = dz$  befahren lasse.

Die Inhalte der unendlich kleinen Flächenelemente  $F_0EF$  und  $F_1EF$  sind aber nur um eine Grösse von einander verschieden, die unendlichmal kleiner ist als jene.

Die Befahrung von  $\tau$  gibt der Rolle die Drehung  $u$ , die Befahrung von  $dz$  hingegen die Drehung  $v$ .

Offenbar ist  $v$  von  $dz$  und  $z$  abhängig, nicht aber von der Richtung des Radiusvector  $EF$ ; man kann sich daher sämtliche Elemente  $dz$  auf demselben Radiusvector aufgetragen und befahren denken; die Summe aller  $dz$  theilt sich hiebei in zwei gleiche und über einander fallende Hälften; beim Umfahren der Peripherie werden die Elemente der einen Hälfte von  $E$  weg, die der anderen nach  $E$  hin befahren.

Die Summe der Drehungen  $v$  der Rolle, die der Befahrung aller Elemente  $dz$  entspricht, ist daher gleich Null.

Wir können uns somit darauf beschränken, den Einfluss der Befahrung von  $\tau$  auf die Drehung der Rolle zu untersuchen.

Durch eine gerade Linie, die wir von  $C_1$  zu  $C_0F_0$  parallel legen, wird das Perpendikel  $\overline{D_1d_1}$  in zwei Theile getheilt, deren einer  $= \overline{C_0C_1} \cos \omega$  ist, wenn der Winkel

$EC_0F_0 = \pi - \omega$  gesetzt wird, deren anderer aber  $= \varrho \varphi_1$  ist. Man hat daher:

$$u = R \mathfrak{S}_1 \cos \omega + \varrho_1 \varrho$$

wenn  $\mathfrak{S}_1$  den Winkel  $C_0EC_1$  bezeichnet.

Schneiden sich die verlängerten Positionen des Fahrarms  $C_0F_0$  und  $C_1F_1$  im Punkte B, und bezeichnen wir den Schnittpunkt der Linien  $BF_1$  und  $EC_0$  mit S, so erhält man die zwei ähnlichen Dreiecke  $SC_0B$  und  $SC_1E$ , welche nämlich die entsprechenden zwei Winkel bei S und diejenigen bei  $C_0$  und  $C_1$  respective gleich haben. Die beiden dritten Winkel  $\varphi_1$  und  $\mathfrak{S}_1$  sind demnach ebenfalls gleich.

Aus der zufolge Gleichheit der drei Seiten sich ergebenden Congruenz der Dreiecke  $EC_0F_0$  und  $EC_1F_1$  folgt ferner:  $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S} = \varphi_1$

Und demnach ist

$$u = \mathfrak{S} [R \cos \omega + \varrho].$$

Für die Planimeter der älteren Form liegt D auf der Verlängerung von CF jenseits C; in diesem Falle ist

$$u = \mathfrak{S} [R \cos \omega - \varrho].$$

Schreiben wir daher allgemein

$$u = \mathfrak{S} [R \cos \omega + \eta \varrho],$$

wo  $\eta = + 1$  für Planimeter der neueren Form,

$\eta = - 1$  für Planimeter der älteren Form gilt.

Man kann aber  $R \cos \omega$  aus der Relation berechnen

$$z^2 = R^2 + r^2 + 2 R r \cos \omega$$

wonach:

$$u = \mathfrak{S} \frac{z^2 - R^2 - r^2 + 2\eta r \varrho}{2r}$$

oder, wenn man abkürzend  $l^2 = R^2 + r^2 - 2\eta r \varrho$  setzt

$$u = \mathfrak{S} \frac{z^2 - l^2}{2r}$$



Bemerken wir hier noch, dass  $u = 0$  wird, wenn  $z = 1$ , und dass man also nicht nur das Element  $r$ , sondern jeden beliebigen Bogen des Kreises  $L$  vom Radius  $l$  befahren kann, ohne dass die Rolle sich dreht.

Der Fahrstift gelangt nämlich in die Peripherie dieses Kreises  $L$ , wenn das wachsende  $\omega$  den Werth  $\omega_0$  erreicht, für den  $R \cos \omega_0 = -\eta \rho$ , also:  $z^2 = l^2$  wird.

Man kann leicht auf graphischem Wege  $\omega_0$  und  $l$  construiren: Man beschreibe um  $C_0$  mit dem Radius  $\rho$  einen Kreisbogen, und an diesen aus  $E$  eine Tangente, und zwar rechts oder links von  $C_0$  (für den Beobachter in  $E$ ), jenachdem  $\eta = +1$  oder  $\eta = -1$  ist.

Durch  $C_0$  und den Berührungspunkt der Tangente zieht man nun die Gerade  $C_0L$ , welche mit  $C_0E$  den Winkel  $\pi - \omega_0$  einschliesst, und den um  $C_0$  mit dem Radius  $r$  beschriebenen Kreis in einem Punkte  $L$  schneidet, der von  $E$  um die Grösse  $l$  entfernt ist.

Solange  $\omega$  klein ist, hat man  $R \cos \omega > \rho$ , d. h.:  $u$  erscheint als positive Grösse. Das ist sie aber nur dann, wenn  $r$  nach rechts befahren wird.

In der That geht in diesem Fall die Rolle für einen Beobachter, der in der Richtung von  $C_0F_0$  auf dieselbe sieht, nach rechts und „vorwärts“, indem sie sich „rechts-herum“ dreht. — Die auf ihrer Peripherie markirten Zahlen wachsen linksherum, sodass hiebei stets höhere Zahlen zum Nullpunkt des Nonius heraufgeführt werden, also wirklich die abzulesende Drehung der Rolle zunimmt.

Für ein Curvenelement  $\sigma'$  aber, dessen tangentielle Kathete  $r'$  nach links zu befahren wäre, wird, wenn  $S'$  der von  $r'$  überspannte Winkel, und  $z'$  der Radius von  $r'$  ist, der Abwickelungsbogen der Rolle:

$$u' = -s' \frac{z'^2 - l^2}{2r}$$

Heissen wir nun die von  $r$  und  $r'$  und von den ihnen anliegenden Radien vectoren eingeschlossenen Elementar-Dreiecke  $q$  und  $q'$ , so hat man:

$$q = s \frac{z^2}{2}, \quad q' = s' \frac{z'^2}{2}$$

woraus folgt:  $ru = q - s \frac{l^2}{2}, \quad ru' = -q' + s' \frac{l^2}{2}$

oder:  $q = ru + s \frac{l^2}{2}, \quad q' = -ru' + s' \frac{l^2}{2}$

Wir erhalten aber den Inhalt  $J$  der umfahrenen Figur, wenn wir alle Elementar-Dreiecke  $q'$ , deren zur Curve  $z$  gehörende kleine Seiten  $r'$  nach links befahren werden, von der Summe der Elementar-Dreiecke  $q$  abziehen, deren kleine Seiten  $r$  nach rechts befahren werden: d. h. man hat:

$$J = \Sigma q - \Sigma q'$$

Oder:

$$J = r (\Sigma u + \Sigma u') + \frac{l^2}{2} (\Sigma s - \Sigma s')$$

Es ist aber  $\Sigma u + \Sigma u' = U$  die Summe aller im Vor- und Rückwärtsgehen von der Rolle abgewickelten Bogen, oder der Gesamtbogen, den sie während des Umfahrens von  $Z$  abgewickelt hat.

Ferner ist  $\Sigma s - \Sigma s' = 2W$ , das Ergebniss der Subtraction der nach links überfahrenen Winkelräume von den nach rechts überfahrenen.

Hier müssen wir zwei Gebrauchsarten der Amsler'schen Planimeter, (seien sie neuerer oder älterer Form), unterscheiden.

1) Wenn die Einsatzspitze E ausserhalb der auszumessenden umfahrenen Fläche eingesteckt ist, so kann man leicht erkennen, dass  $W = 0$  sein muss, weil soweit wir auch, die Figur nach rechts befahrend, die Summe der Winkel  $\vartheta$  vermehren, doch der Radius vector wieder zu seiner anfänglichen Lage umkehren und dabei alle Winkel in entgegengesetztem Sinne überfahren muss.

2) Wenn aber die Einsatzspitze E auf der umfahrenen Fläche selbst sich befindet, so gelangt der Radius vector zu seinem Ausgangspunkt, indem er, abgesehen von allfälligem Vor- und Rückwärtsgehen, doch einmal um dem Punkt E ganz herum geht. Es wird also hier  $2W = 2\pi$ . — Man hat daher:

$$J = rU + l^2 W,$$

wo:  $W = 0$ , wenn E ausserhalb,

$W = \pi$ , wenn E innerhalb der von Z umschlossenen Fläche liegt.

Die erste Gebrauchsart wird auch in dem Falle angewendet, wo eine ringförmige Fläche ausgemessen werden soll, die von 2 geschlossenen Curven Z und Z' begränzt ist, deren innere Z' den Punkt E umschliesst. Man hätte hier mit dem Fahrstift erst Z rechtsherum zu umfahren, dann auf dem Radius vector zur Curve Z' zu gelangen, diese linksherum zu umfahren, und auf demselben Radius vector wieder zum Ausgangspunkt zurückzukehren. Dieses Verfahren und die hier geltende Formel  $J = rU$ , wo  $W = 0$  geworden, rechtfertigt sich aus der Betrachtung, dass man, ohne die Grösse der Fläche zu ändern, sie zu einer von nur Einer Peripherie umschlossenen Fläche machen kann, die E nicht enthält, wenn man die 2 zu befahrenden Radien unendlich nahe neben einander setzt, so dass deren Zwischenraum von der Peripherie der Curve, und also vom Fahrstift nie überschritten wird.

Eine ringförmige Fläche, deren innere Curve  $Z'$  der Kreis  $L$  ist, hat also ebenfalls den Inhalt  $J = r \cdot U$ ; das Befahren der beiden Radien und der inneren Curve gibt aber der Rolle keine Drehung. Die Drehung der Rolle ist also dieselbe, wie wenn nur die äussere Curve  $Z$  allein rechtsherum befahren wäre. Die ganze von  $Z$  umschlossene Fläche ist also:  $rU + \pi l^2$ , wenn  $U$  der für die Befahrung von  $Z$  von der Rolle abgewickelte Bogen ist, wie wir oben gefunden haben.

### ***I. Erste Gebrauchsart.***

Der Punkt  $E$  liege nicht auf der umfahrenen Fläche. Es ist dann  $W = 0$ , und somit der Inhalt der Fläche

$$J = r \cdot U.$$

Der Inhalt der umfahrenen Fläche ist also gleich einem Rechteck, dessen Basis die Länge des Fahrarms, und dessen Höhe die Länge  $U$  des von der Rolle während des Umfahrens rechtsherum abgewickelten Bogens ist.

Kennt man nun die Peripherie  $p$  der Rolle, so findet man  $U$ , wenn man die Zahl der Umdrehungen und ihre Bruchtheile mit  $p$  multiplicirt.

Der Stand der Rolle, für den sowohl sie selbst als das Zählrädchen auf Null eingestellt sind, möge der Normalstand heissen.

Wenn wir beim Beginn des Umfahrens die Rolle nicht auf ihren Normalstand zurückführen, so bedeute  $n_0$  diejenige ganze Zahl, welche angibt, um wie viele Tausendstels-Periphericen die Rolle von ihrem Normalstand absteht.

Beim Vorwärtsdrehen der Rolle wird sich nun die Zahl, die ihren Stand bezeichnet, vermehren, bis sie,

bei 10000 angelangt, wieder von Null an zu wachsen beginnt.

Die für die zweite Ablesung zu schreibende Zahl  $n$  kann daher die unmittelbar ablesbare um 10000 oder selbst um 20000 übertreffen, was leicht durch eine Betrachtung der Zählrädchens während der Fahrt, oder durch eine rohe Schätzung der umfahrenen Fläche ermittelt wird.

Man hat alsdann:

$$J = (n - n_0) \frac{pr}{1000}.$$

Die Construction der Planimeter fordert nun eine genaue Beziehung zwischen den Grössen  $p$  und  $r$  für jedes besondere Instrument.

Das Planimeter Nr. 199 z. B., welches die neuere Form und einen unveränderlichen Fahrarm hat, ist so eingerichtet, dass:  $r \cdot p = 9000^{\text{mmq}}$ . Wäre es also möglich, bei allen ähnlichen Instrumenten z. B.:  $p$  genau gleich  $60^{\text{mm}}$  zu machen, so könnten auch alle Fahrarme einander gleich, und gleich  $150^{\text{mm}}$  gemacht werden, und man hätte

$$J = (n - n_0) \cdot 9^{\text{mmq}} = (n - n_0) 1'' \square \text{ Schw.}$$

Da aber die Grösse  $p = 60^{\text{mm}}$  beim Abdrehen der Rolle nicht mit der Genauigkeit erreicht werden kann, die eine nur etwas sorgfältige Messung der fertigen Rolle gewährt, so ist man genöthigt, erst nach sorgfältiger Messung der Peripherie  $p$  die Länge des Fahrarms  $r$  zu bestimmen, und ihn dieser gemäss zu construiren oder wenigstens zu ajustiren. Um letzteres zu bewerkstelligen, ist das Stück, welches den Fahrstift trägt, nicht fest mit dem Fahrarm verbunden, sondern mittelst 2 Schrauben auf ihm befestigt, deren schlitzartig verlängerte Löcher eine kleine Verschiebung jenes Stückes zulassen.

Ich habe, obwohl nur mit sehr geringen Mitteln zum Messen ausgerüstet, die Bestimmung von  $p$  in dem fertigen Planimeter Nr. 199 vorgenommen. Auf einem glatten, auf's Reissbrett gespannten Papierbogen wurde nämlich eine gerade Linie gezeichnet. Auf dieser wurde mit einer Nadel ein feines Loch eingestochen, in welches ich den Fahrstift einsetzte.

Nun stellte ich den Fahrarm (EC) parallel zur gezeichneten Linie, und liess die Gränze vom Schatten des Fahrarms mit ihr zusammenfallen, welchen die schmale Seite der Flamme meiner Studierlampe (mit flachem Docht) erzeugte.

Nun wurde der Stand der Rolle abgelesen oder auf Null gestellt. Hierauf fasste ich die gehobene Einsatzzspitze an, und führte die Axe (C) um F herum bis wieder die Schattengränze mit der gezeichneten Linie zusammenfiel.

Die nun erfolgende zweite Ablesung gab die Zahl N der Drehungen der Rolle, welche sie, über Eine Kreisperipherie vom Radius  $\overline{DF} = r - \rho$  fortrollend, ausgeführt hatte. — Die zehnmahlige Wiederholung dieses Verfahrens ergab:

1 <sup>ste</sup>	Ablesung	0.000	
2 <sup>te</sup>	„	14.476	N = 14.476
3 <sup>te</sup>	„	28.940	14.464
4 <sup>te</sup>	„	43.412	14.472
5 <sup>te</sup>	„	57.884	14.472
6 <sup>te</sup>	„	72.350	14.466
7 <sup>te</sup>	„	86.818	14.468
8 <sup>te</sup>	„	101.291	14.473
9 <sup>te</sup>	„	115.753	14.462
10 <sup>te</sup>	„	130.226	14.473
11 <sup>te</sup>	„	144.695	14.469
			<u>144.695.</u>

Das arithmetische Mittel gibt also für N den Werth  $N = 14.469$ , der wohl nicht um den zehntausendsten Theil fehlerhaft ist, trotz der Mangelhaftigkeit der Methode und deren Ausführung. — Die Differenz in den einzelnen Beobachtungen steigt auf 1 Tausendtel. — Indess habe ich bei Anwendung einer analogen Methode bei Tage, wo die Einstellung mittelst einer aufgestellten Equerre bewirkt wurde, für die Rolle des Planimeters Nr. 198 zehn Beobachtungen erhalten, deren extreme Werthe für  $N = 19,385$  und  $19,389$  betragen, bei dem mittleren Werthe  $N = 19,386.7$ .

Ich führe diese Versuche hier an, weil sie für das gleichmässige Fortrollen der Rolle auf der Ebene eines gewöhnlichen Papierbogens ein schönes Zeugniß ablegen.

Um nun auch  $\overline{DF} = k = r - \eta \rho$  zu messen, wurde die Rolle schwach angedrückt, und die Entfernung ihres Eindruckes von der Mitte des Loches gemessen. Ich fand sie:

$$k = r - \rho = 138.0^{\text{mm}} \quad \text{bei Nr. 199,}$$

$$k = r + \rho = 187.0^{\text{mm}} \quad \text{bei Nr. 198,}$$

wovon ich übrigens eine Genauigkeit bis auf Ein Tausendtel nicht verbürgen kann. — Aus  $2\pi k = Np$  ergibt sich daher meiner Messung zufolge  $p = 59^{\text{mm}}.923$  für Nr. 199, wovon wohl die unteren 3 ersten Ziffern richtig sind.

Damit also  $p \cdot r = 9000^{\text{mm}^2}$  sei, muss  $r = 150^{\text{mm}}.2$  gemacht werden. Meine angenäherte Messung gab:  $r = 150^{\text{mm}}.0$ .

Diese erste Gebrauchsart des Planimeters hängt, wie man sieht, nur von der richtigen Bestimmung von r ab (in Vergleich zu p), und verlangt, dass die Projection

der Rollenaxe parallel zu CF sei. Dagegen ist sie ganz unabhängig von den Werthen, die R und  $\rho$  erhalten, und wird daher auch von einer bleibenden Aenderung dieser Werthe nicht beeinträchtigt.

Amsler hat seinen Planimetern ein Mittel zur Prüfung beigelegt, das ich einen Verificator nennen möchte.

Es besteht dasselbe aus einem kurzen Lineal von Neusilber (wodurch auch das Befahren gerader Linien mit dem Fahrstift erleichtert wird), welches auf seiner Mittellinie zwei runde Löcher eingebohrt trägt, das eine etwas weitere geht durch; eine kurze Nadelspitze, welche durch dasselbe hindurch in das Reissbrett eingesteckt wird, macht seine Axe zur Drehungsaxe, um welche das zweite kleine Loch im Kreise herumgeführt werden kann. Setzt man nun in dieses den Fahrstift des Planimeters ein, und markirt den Ausgangspunkt, gegenüber einem Index am Ende des Lineals, auf dem Papier, so kann man schnell und mit grösster Präcision einen Kreis ein oder mehrere Mal umfahren, dessen Radius (die Entfernung der beiden Löchermitten) mit Sorgfalt bestimmt wird. Amsler schreibt den Inhalt des mit demselben beschriebenen Kreises in Schw. Quadratlinien auf das Lineal; so trägt der eine Verificator die Zahl 3844<sup>'''</sup> □ (Kreisfläche vom Radius 34<sup>'''</sup>98), der andere die Zahl 799<sup>'''</sup> □ (Kreisfläche vom Radius 15<sup>'''</sup>948).

Ich habe diese beiden Kreisflächen vom Fahrstifte F des Planimeters Nr. 199 zehnmal umfahren lassen, und fand die folgenden Differenzen der successiven Able-  
sungen :



3847	801	Beide Mittel sind etwas
47	804	grösser als die Zahlen des
45	802	Verificators.
46	801	Wenigstens bei der grös-
46	799	seren Fläche ist die grösste
42	801	Differenz Einer Beobachtung
45	802	vom Mittel kleiner, als $\frac{1}{100}$
46	802	der gemessenen Grösse, wor-
46	801	aus man ersehen kann, auf
46	799	welche Genauigkeit man bei
<u>38456.</u>	<u>80:2.</u>	richtiger Ajustirung und prä-
		cisem Umfahren bei diesem Iustrumente rechnen darf.

Bei den Planimetern der älteren Form, wie Nr. 201, wo der Fahrarm in seiner Hülse verschiebbar ist, kann die Ajustirung für verschiedene Flächeneinheiten vorgenommen werden, indem man nur diejenigen Stellen desselben, bis zu denen er in die Hülse eingeschoben werden soll, damit der Fahrarm die jenen Einheiten entsprechende Länge habe, durch je eine eingeschnittene Linie markirt.

Amsler schreibt zu diesen die ihnen entsprechende Flächeneinheit, d. h. (in neuerer Zeit) denjenigen Zuwachs zu der auszumessenden Fläche, den die Rolle anzeigt durch ihr Vorwärtsdrehen um Ein Tausendtel ihrer Peripherie.

Ich finde für das Planimeter Nr. 201 (angenähert)  
 $p = 62^{\text{mm}}5$

$$\text{Für: } r = \frac{9000}{62.5} = 144.0^{\text{mm}};$$

wird daher:  $J = (n - n_0)'''' \square \text{ Schw.}$

$$\text{Für: } r = \frac{10000}{62.5} = 160.0^{\text{mm}};$$

dagegen:  $J = (n - n_0) 10^{\text{mm}} \square.$

Neben den diesen beiden Werthen von  $r$  entsprechenden Marken, mit  $1'' \square$  Schw. und  $10^{mm} \square$  bezeichnet, findet sich noch eine dritte, die mit  $1'' \square$  engl. bezeichnet ist. — Amsler versteht darunter das Quadrat, dessen Seite  $\frac{1}{10}$  des engl. Duodec.-Zolles

$$= \frac{304^{mm} 7945}{120} = 2^{mm} 53995 \text{ ist.}$$

Die hier zu verstehende engl. (Duod.) Quadratlinie ist daher  $= 6^{mq} 45135$ .

Für  $rp = 6451.35$ , oder  $r = 103^{mq} 22$  wird daher  $J = (n - n_0)'' \square$  Duod. Engl.

Das Planimeter Nr. 200 verbindet mit der neueren Form die Einrichtung, dass aus dem hohlen Fahrarm eine genau passende kürzere Stange, die den Fahrstift trägt, ein wenig herausgezogen werden kann, wodurch es möglich wird, auch hier der Länge  $r$  des Fahrarms verschiedene Werthe zu geben.

Die Rollenperipherie ist hier angenähert:  $p = 59^{mq} 70$ . Demnach für:

$r = 167^{mq} 5 \quad \therefore pr = 10000$  und  $J = (n - n_0) 10^{mm} \square$ ,  
ebenso für:

$r = 150^{mq} 75 \quad \therefore pr = 9000$  und  $J = (n - n_0)'' \square$  Schw.

Auf diesem Instrument befindet sich noch eine dritte Einstellungsmarke, mit  $1'' \square$  Engl. bezeichnet, die aber hier eine andere Bedeutung hat, als im Planimeter Nr. 201. Es ist nämlich ein Quadrat darunter verstanden, dessen Seite 0.01 des engl. Fusses  $= 3^{mq} 047945$  beträgt. Diese engl. (Centesimal-) Quadratlinie ist demnach  $= 9^{mq} 2897$ .

Macht man daher  $rp = 9289^{mq} 7$ , d. h.  $r = 155^{mq} 60$ , so wird:  $J = (n - n_0)'' \square$  Centes. Engl.

\*

Auf anderen Planimetern findet sich noch die Marke, die mit 1''' □ Duod.-Schw. bezeichnet wird, worunter ein Quadrat verstanden ist, dessen Seite  $\frac{1}{120}$  Schw. Fuss oder 2<sup>mm</sup>5 lang ist. Es ist somit 1''' □ Duod.-Schw. = 6<sup>mmq</sup> 25.

Dafür findet man r aus der Relation  $rp = 6250^{\text{mmq}}$ .

Oft ist es, zumal bei Katasterplänen, bequem, die reducirten Flächen auch sofort durch eine nach demselben Verhältniss reducirte Juchart als Flächeneinheit auszumessen.

Amsler hat daher auch auf manchen seiner Planimeter die nach dem Reductionsmassstab von 1 : 1000 reducirte Schweizer Juchart, d. h.:

$$\frac{40000'}{1000000} \square \text{ Schw.} = 4'' \square = 3600^{\text{mm}} \square,$$

als Flächeneinheit eingeführt.

Da dieselbe aber zu gross ist, um eine brauchbare Länge für r zu geben, macht man vielmehr:

$$pr = 3600^{\text{mm}} \square = 1 \text{ Juch. Schw. (reducirt),}$$

so dass:

$$J = \frac{n - n_0}{1000} \text{ Juch. Schw.} \quad (\text{Reduct. } 1 : 1000),$$

oder wenn man die Ablesungen

$$N = \frac{n}{1000}, \quad N_0 = \frac{n_0}{1000}$$

durch ganze Peripherien ausgedrückt, einführt:

$$J = (N - N_0) \text{ Juch. Schw.} \quad (\text{Reduct. } 1 : 1000).$$

## **II. Zweite Gebrauchsart.**

Der Punkt E liege in der umfahrenen Fläche, so dass:  $W = \pi$  und  $J = r \cdot U + \pi l^2$ ;

wo  $l^2 = R^2 + r^2 - 2\eta r\rho$  und  $\eta = +1$  für die neuere,  $\eta = -1$  für die ältere Form des Planimeters gilt.

Denkt man sich  $p, R, r, \rho$ , und somit  $l$  als Zahlen, welche angeben, wie vielmal grösser die entsprechenden Längen sind, als  $1^{\text{mm}}$ , so geben die Producte je zweier dieser Zahlen an, wie viel grösser die Rechtecke aus den entsprechenden Längen sind, als  $1^{\text{mm}^2}$ .

Man kann alsdann  $J$  so schreiben:

$$J = [(n - n_0) \frac{p \cdot r}{1000} + \pi l^2] \cdot 1^{\text{mm}^2},$$

wo die Grössen in der Klammer sämmtlich abstracte Zahlen sind.

Den Werth von  $\pi l^2 = \pi (R^2 + r^2 - 2\eta r \rho)$  kann man entweder aus den vorher zu bestimmenden Werthen von  $R$  und  $\rho$  und dem gegebenen  $r$  ableiten; oder man kann die Constante  $\pi l^2$  als solche unmittelbar durch Eine Messoperation bestimmen; z. B. mit Hülfe des Verificators vom Radius  $h = 34.98$  Schw. Steckt man nämlich die Einsatzspitze  $E$  durch das durchgehende Loch des Verificators hindurch auf dem Reissbret fest, und setzt den Fahrstift in das zweite kleinere Loch ein, so kann man, den bekannten Kreis  $\pi h^2$  umfahrend, durch Ablesung den entsprechenden Werth von

$$rU = \frac{n - n_0}{1000} \cdot pr$$

bestimmen, und somit aus  $J = \pi h^2 = rU + \pi l^2$  den Werth von  $\pi l^2$  berechnen.

Auf solche Weise wurde für das Planimeter Nr. 199, dessen unveränderbares  $r = 150^{\text{mm}^2}$  gefunden worden ist,

$$\pi l^2 = 14122'' \square \text{ Schw. ermittelt;}$$

$$\text{aus: } \pi l^2 = (3844 - n + n_0)'' \square \text{ Schw.}$$

Man beachte, dass  $(n - n_0)$  hier eine negative Grösse wird.

Eine Schätzung der Grössen, von denen  $l^2$  abhängig ist, ergab:  $R = 146^{\text{mm}}8$ ,  $\rho = 12^{\text{mm}}2$ , woraus für  $\pi l^2$  der dem obigen nahe liegende Werth

$$\pi l^2 = 127063^{\text{mm}^2} = 14118'' \square \text{ Schw. folgt.}$$

Jede andere Flächenbestimmung mittelst dieses Planimeters geschieht also, wenn E in der umfahrenen Fläche liegt, nach der Formel:

$$J = (n - n_0 + 14122)'' \square \text{ Schw.}$$

Um diese Constante immer bei der Hand zu haben, hat Amsler dieselbe auf den Fahrarm graviren lassen.

Bemerken wir hier noch, dass mittelst des Planimeters Nr. 199 eine Fläche umfahren, also mittelst Einer einzigen Beobachtung ausgemessen werden kann, deren Umfang nicht aus dem Kreise vom Inhalt  $J_m = \pi (R + r)^2$  heraustritt. Für diese Maximumsfläche wird die Zahl  $n - n_0$  der Tausendtel-Umdrehungen der Rolle ein Maximum,  $m$ , dessen Werth sich aus

$$\frac{mp}{1000} = 2\pi (R + \rho)$$

ergibt, woraus  $m = 16672$ , also:

$$J_m = (m + 14122)'' \square = 30794'' \square \text{ folgt.}$$

Man kann also eine Fläche von 3 Quadratfuss mit einem Instrument, das kaum mehr als  $\frac{1}{2}$  Fuss Länge hat, ausmessen.

Für die Planimeter mit mehreren Einstellungsarten hat diese Constante, deren Werth von dem veränderten  $r$  abhängt, natürlich verschiedene Werthe, kann aber für jede auf die angegebenen zwei Weisen leicht gefunden werden. — Ihren Werth — ausgedrückt in derselben Einheit, welche der zugehörigen Marke beigeschrieben ist — schreibt Amsler, nächst derselben, auf die benachbarte Seitenfläche des vierkantigen Fahrarms.

Wir wollen hier zum Schluss noch das Planimeter Nr. 198 etwas näher betrachten.

Dasselbe hat eine eigenthümliche Einrichtung, der zufolge es zur unmittelbaren Inhaltsbestimmung von Flächen in jeder beliebigen Flächeneinheit dienlich ist. In seinem Bau schliesst es sich den Planimetern der älteren Form an. — Statt aber einzelne besondere Marken zur Einstellung zu tragen, ist vielmehr der in seiner mit einem Nonius versehenen Hülse verschiebbare Fahrarm, seiner Länge nach, in gleiche Theile von der Länge  $s$  (nahe =  $8^{\text{mm}}$ ) getheilt; die diesen Theilpunkten beige-schriebenen Zahlen wachsen vom Fahrstift  $F$  gegen die Axe  $C$  hin bis 21. Jedoch findet sich ihr Nullpunkt nicht mehr auf dem Fahrarm, sondern fällt über  $F$  hinaus, um eine Grösse  $x$  von nahe  $2^{\text{mm}}$ . Die Theile  $s$  sind wiederum in 10 gleiche Theile getheilt, und der Nonius an der Hülse gestattet, auch noch die Zehntel von diesen, also die Hundertel von  $s$ , abzulesen. Es sei  $k$  die bis auf Hundertel genau bestimmte Zahl, die angibt, um wie vielmal  $s$  der dem Nullpunkt des Nonius gegenüber liegende Punkt  $K$  der Scale von deren Nullpunkt absteht. Dann ist  $ks - x$  die Entfernung des Punktes  $F$  von der Ebene, die durch  $K$  senkrecht auf  $CF$  gelegt ist. Die Axe ( $C$ ) liegt jenseits dieser Ebene, und um die Grösse  $x$  von derselben entfernt. — Die Entfernung  $CF = r$  ist also  $x + (ks - x)$  oder  $r = ks$ .

In der Formel für  $J = rU + l^2W$  ist zufolge der älteren Form, die für den Bau dieses Planimeters gewählt wurde,  $\eta = -1$ ; also  $l^2 = R^2 + r^2 + 2r\rho$ .

Setzen wir  $r = k \cdot s$  in diese Formel ein, so wird

$$J = \frac{n - n_0}{1000} p \cdot s \cdot k + \frac{W}{\pi} (\pi R^2 + \pi k^2 s^2 + 2\pi ks \cdot \rho).$$

Denken wir uns die Längen  $p$ ,  $s$ ,  $R$  und  $\rho$  durch Millimeter ausgedrückt, so können wir ihre Quadrate und die Produkte je zweier als Zahlen betrachten, wenn wir dieselben mit  $1^{\text{mm}^2}$  multipliciren. Machen wir ausserdem noch  $\frac{k}{2}$  zum gemeinschaftlichen Factor, und setzen

$$C_k = 2 \cdot [2\pi\rho s + \frac{\pi R^2}{k} + \pi s^2 \cdot k],$$

so wird:

$$J = \left\{ (n - n_0) \frac{2ps}{1000} + \frac{W}{\pi} C_k \right\} \frac{k}{2} \cdot 1^{\text{mm}^2}.$$

Die Werthe von  $p$  und  $s$  wurden nun so gewählt, dass das Rechteck:  $20 \cdot s \cdot p = 10000$  Quadratmillimetern oder  $2ps = 1000$  wird. Also haben wir:

$$J = \left\{ (n - n_0) + \frac{W}{\pi} C_k \right\} \frac{k}{2} \cdot 1^{\text{mm}^2},$$

wo  $n$ ,  $n_0$ ,  $k$  und  $C_k$  absolute Zahlen sind.

Liegt (bei der ersten Gebrauchsart)  $E$  ausserhalb der umfahrenen Fläche, so ist  $W = 0$ . Dagegen ist für die zweite Gebrauchsart, wo  $E$  innerhalb der umfahrenen Fläche liegt,  $W = \pi$ .

Um die für die verschiedenen Einstellungen mit  $k$  wechselnden Werthe der Constanten  $C_k$  zu bestimmen, müssen wir die unveränderten 3 Grössen kennen.

Amsler hat ihre Werthe folgendermassen bestimmt:

$$a = 4\pi\rho \cdot s = 3036,$$

$$b = 2\pi R^2 = 153010,$$

$$c = 2\pi s^2 = 409.$$

Der Werth von  $b$  setzt  $R = 156.05$  voraus,  
 derjenige „  $c$  „  $s = 8.068$  „  
 der „  $a$  „  $\rho = 29.945$  „  
 folglich ist, wegen  $ps = 500$ , ..  $p = 61.973$  angenommen.

Den Werth von  $C_k = 3036 + \frac{153010}{k} + 409k$  hat  
 Amsler auf den Fahrarm graviren lassen, woraus sich  
 also für jeden Werth von  $k$  der entsprechende Werth  
 der Zahl  $C_k$  bestimmen lässt.

Der Inhalt wird also unzweideutig durch die Formel  
 bestimmt:

$$J = \left\{ n - n_0 + \frac{W}{\pi} C_k \right\} \frac{k}{2} 1^{mmq},$$

wo man der Einstellungszahl  $k$  jeden beliebigen Werth  
 geben kann, der innerhalb der Gränzen der getheilten  
 Scale des Fahrarms (4 und 21) liegt.

Indem man  $e = \frac{k}{2} 1^{mmq}$  successive den oben be-  
 sprochenen Flächeneinheiten gleichsetzt, erhält man :

1) Für  $e = \frac{k}{2} 1^{mmq} = 10^{mmq} \quad \therefore k=20 \quad \therefore C_k=18866.$

2) Für  $e = 1''' \overset{\text{Schw.}}{\square} = 9^{mmq} \quad \therefore k=18 \quad \therefore C_k=18898.$

3) Für  $e = 1''' \overset{\text{Duod. Schw.}}{\square} = 6.25^{mmq} \quad \therefore k=12.5 \quad \therefore C_k=20389.$

4) Für  $e = 1''' \overset{\text{Duod. Engl.}}{\square} = 6.45135^{mmq} \quad \therefore k=12.90 \quad \therefore C_k=20172.$

5) Für  $e = 1''' \overset{\text{Centes. Engl.}}{\square} = 9.2897^{mmq} \quad \therefore k=18.58 \quad \therefore C_k=18870.$

6) Für  $e = \frac{0.001}{1000000} \overset{\text{Juch. Schw.}}{=} 3.600^{mmq} \quad \therefore k=7.2 \quad \therefore C_k=27232.$



Man hat also:  $J = \left\{ n - n_0 + \frac{W}{\pi} C_k \right\} \cdot e$ , wo für  $e$  und  $C_k$  diejenigen Werthe zu setzen sind, die der gewählten Einstellung,  $k$ , entsprechen.

Für 6) kann man statt:

$$J = \left\{ n - n_0 + \frac{W}{\pi} 27232 \right\} \frac{0.001 \text{ Juch. Schw.}}{1000^2}$$

auch setzen:

$$J = \left\{ \frac{n - n_0}{1000} + \frac{W}{\pi} 27.232 \right\} \frac{1 \text{ Juch. Schw.}}{(1000)^2},$$

oder:

$$J = \left\{ N - N_0 + \frac{W}{\pi} 27.232 \right\} 1 \text{ Schweiz. Juch. (im Reductions-Massstab von 1 : 1000).}$$

In allen diesen Formeln ist:

$W = 0$  für die erste Gebrauchsart, wo  $E$  ausserhalb der Fläche  $J$ ,

$W = \pi$  für die zweite Gebrauchsart, wo  $E$  innerhalb der Fläche  $J$  eingesetzt wird.

Indem ich  $k = 18$  machte, fand ich durch Umfahren des Thuner- und Brienersee's auf der von Scheuermann gestochenen Karte des Berner Oberlandes für  $(n - n_0)$  die Werthe 123,5 und 79. Da  $E$  ausserhalb der umfahrenen Flächen war, so ist der Flächeninhalt  $J$  auf der Karte respective 123,5''  $\square$  Schw. und 79''  $\square$  Schw. — Die Karte ist aber im Massstab von 1 : 200000 gezeichnet. Die wirklichen Flächen der beiden Seen sind daher  $(200000)^2$  Mal grösser, also diejenige

des Thunersee's = 494000000'  $\square$  = 12350 Juch. Schw.

des Brienersee's = 316000000'  $\square$  = 7900 Juch. Schw.