Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1888)

Heft: 1195-1214

Artikel: Die Cassinischen Kurven

Autor: Huber, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319019

Dr. G. Huber.

Die Cassinischen Kurven.

Vorgetragen in der Sitzung vom 4. Februar 1888.

Eine Cassinische Kurve ist der Ort aller Punkte, für welche das Produkt der Abstände von zwei feste Punkten, den Brennpunkten, gleich einer constanten, positiven Grösse k ist.

Liegen die beiden Brennpunkte auf der x Axe im Abstand $x = \pm 1$ vom Coordinatenanfangspunkt, so ist ihre Gleichung:

$$(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2 = k^2. \qquad 1)$$

Lässt man k von 0 bis ∞ variiren, so erhält man unendlich viele solche Kurven, die alle die imaginären unendlich fernen Kreispunkte zu Doppelpunkten haben. Da sie sonst keinen Doppelpunkt mehr besitzen, so ist ihr Geschlecht $p = 1$, die Coordinaten x, y eines Punktes der Kurve lassen sich daher durch elliptische Funktionen eines Parameters ausdrücken. Zu dieser Darstellung gelangt man folgenderweise:

Setzt man in der Gleichung 1) $x^2 + y^2 = v$, so erhält man:

$$4x^2 = (v + 1 - k)(v + 1 + k)$$
$$4y^2 = (v - 1 + k)(k + 1 - v).$$

Hierin $v = (1 + k)\dfrac{1 - t}{1 + t}$ gesetzt, ergiebt:

$$x^2 = (1 + k)\frac{(1 - kt)}{(1 + t)^2} \text{ und } y^2 = (1 + k)\frac{(k - t)}{(1 + t)^2}.$$

Damit x und y reell werden, muss immer $t < k$ sein.

Es sind nun 3 Fälle zu unterscheiden:

I. $k < 1$

II. $k > 1$

III. $k = 1$ (Lemniskate).

Diese 3 Fälle sollen der Reihe nach behandelt werden.

I. k < 1.

In diesem Fall kann man setzen: $t = k\, sn^2\, u$, wo k der Modulus der elliptischen Funktion sei.

Dann werden die Coordinaten eines Punktes der Kurve:

$$2)\quad x = \pm \sqrt{1+k}\,\frac{\mathrm{dn}\,u}{1+k\,\mathrm{sn}^2 u},\quad y = \pm k\sqrt{1+k}\,\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{1+k\,\mathrm{sn}^2 u}.$$

Zu jedem Werthe von u gehören 4 zu den Coordinatenaxen symmetrisch liegende Punkte.

Für $y = 0$:

1) $\mathrm{sn}\,u = 0$, $u = 0$ und $x = \pm\sqrt{1+k}$, Schnittpunkte A und A'.

2) $\mathrm{cn}\,u = 0$, $u = K$, „ $x = \pm\sqrt{1-k}$ „ B „ B'.

Die letzteren Schnittpunkte auf der x Axe sind nur reell, wenn $k < 1$.

Für $x = 0$ wird:

$\mathrm{dn}\,u = 0$, $u = K + L$, und $y = \pm\sqrt{k-1}$ = imaginär.

Dabei sind K und L die reelle und die imaginäre Periode der elliptischen Funktionen.

Die Kurve schneidet die y Axe nicht, sie besteht aus 2 getrennten Ovalen, symmetrisch zur y Axe, um die Brennpunkte F_1 und F_2 herum, denn für alle Werthe von u zwischen 0 und K erhält man reelle, endliche Werthe für x und y.

Für $k = 0$ erhält man die Brennpunkte selber.

Es sollen nun die *Doppeltangenten* der Kurve untersucht werden. Die Parameter der Schnittpunkte der Parallelen $y = \pm q$ zur x Axe bestimmen sich aus der Gleichung:

$$q = k\sqrt{1+k}\,\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{1+k\,\mathrm{sn}^2 u},\ \text{woraus folgt:}$$

$$\mathrm{sn}^2 u = \frac{k(1+k) - 2q^2 \pm (1+k)\sqrt{k^2-4q^2}}{2k(1+k+q^2)}.$$

Die Schnittpunkte werden nur reell, wenn $q < \frac{k}{2}$ ist.

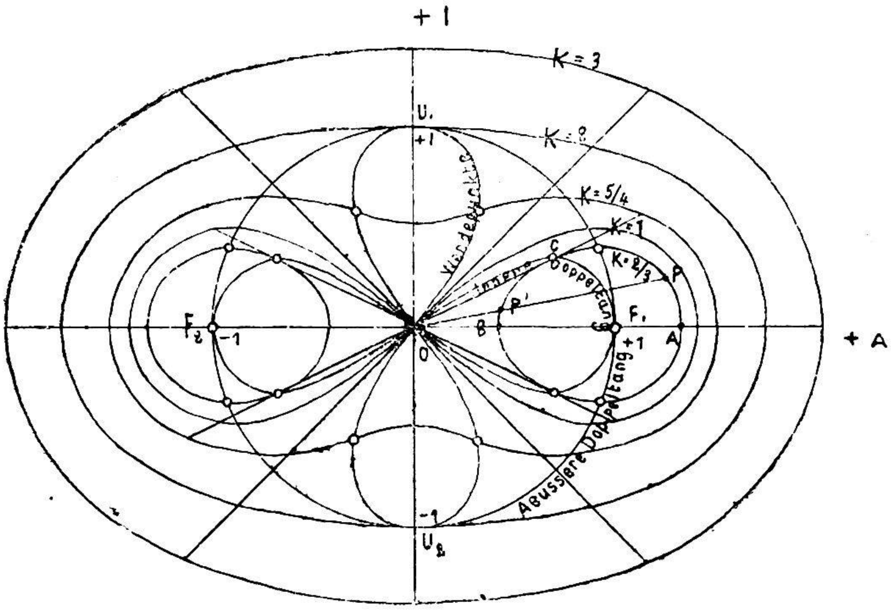
Für $q = \pm \frac{k}{2}$ fallen je 2 der 4 Schnittpunkte der Geraden mit der Kurve zusammen, die beiden Geraden $y = \pm \frac{k}{2}$ werden zu Doppeltangenten der Kurve. Für die Berührungspunkte derselben wird $\mathrm{sn}^2\, u = \frac{1}{2 + k}$, und ihre Coordinaten

$$x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 - k^2}, \quad y = \pm \frac{k}{2}. \qquad 3)$$

Durch Elimination des k ergiebt sich:

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad 4)$$

d. h. die Berührungspunkte der Doppeltangenton parallel der x Axe liegen auf dem *Einheitskreis* um O.



Die Parameter der Schnittpunkte der Geraden

$$y = \mathrm{tg}\, \alpha \,.\, x = m \,.\, x$$

erhält man aus der Gleichung

$$\mathrm{sn}^2\, u = \frac{k\,(1 + m^2) \pm \sqrt{k^2\,(1 + m^2)^2 - 4m^2}}{2\,k}.$$

Ist $k^2\,(1 + m^2)^2 - 4m^2 = 0$, so fallen von den 4 Schnittpunkten je 2 zusammen, die Gerade wird zur Doppeltangente. Es geschieht dies für die 4 Werthe: $m = \pm \left(\frac{1 \pm l}{k}\right)$, wo $l^2 = 1 - k^2$

gesetzt ist. Von diesen 4 Werthen ergeben aber nur die zwei, $m = \pm\left(\frac{1-l}{k}\right)$, reelle Lösungen; für dieselben wird $\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{1+l}}$ also $u = \frac{K}{2}$.

Es giebt also 2 reelle Doppeltangenten CC′ und DD′ durch O, so lange $k < 1$ ist. Die Coordinaten der Berührungspunkte sind

$$5)\qquad x = \pm\sqrt{\frac{l\,(1+l)}{2}},\quad y = \pm\sqrt{\frac{l\,(1-l)}{2}}.$$

Für $k = 1$ werden diese zu $x = 0$, $y = 0$. Die Berührungspunkte auf der Doppeltangente fallen in O zusammen, es ist dies ein Doppelpunkt der Kurve, die Doppeltangenten gehen in Wendetangenten in demselben über. Für dieselben wird $m = \operatorname{tg}\alpha = \pm 1$, $\alpha = \pm 45^0$. Die Kurve ist die Lemniskate.

Durch Elimination des l aus den obigen Gleichungen ergiebt sich:

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0,$$

d. h. die Berührungspunkte der innern Doppeltangenten liegen auf einer *Lemniskate* mit Doppelpunkt in O und den Brennpunkten $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = 0$. Sie geht durch die Brennpunkte $x = \pm 1$ der Cassinischen Kurven.

Der Bogen s der Kurve ist ausgedrückt durch das Integral;

$$s = k\sqrt{1+k}\int\frac{1 - k\operatorname{sn}^2 u.}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sn}^4 u}}\,du.$$

Um dasselbe auszuführen, zerlegt man

$$\sqrt{1+k} = \sqrt{\frac{1+l}{2}} + \sqrt{\frac{1-l}{2}},$$

formt den Zähler etwas um und erhält

$$s = k\sqrt{\frac{1+l}{2}}\int\frac{1-(1-l)\operatorname{sn}^2 u}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^4 u}}\,du + k\sqrt{\frac{1-l}{2}}\int\frac{1-(1+l)\operatorname{sn}^2 u}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^4 u}}\,du.$$

Setzt man im ersten Integral: $\frac{1-(1+l)\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn} u} = t$, so geht dasselbe über in:

$$-\frac{k}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(\left(1-\frac{(1-l}{2}\right)t^2\right)}}.$$

Ebenso geht das zweite Integral durch die Substitution:

$$t' = \frac{1 - (1 - l)\,\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{dn}\, u} \text{ über in:}$$

$$-\frac{k}{2}\int \frac{dt'}{\sqrt{\left(1 - t'^2\right)\left(1 - \left(\frac{1+l}{2}\right) t'^2\right)}},$$

somit wird:

$$s = -\frac{k}{2} \times \tag{6}$$

$$\left[\int \frac{dt}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-\left(\frac{1-l}{2}\right)t^2\right)}} + \int \frac{dt'}{\sqrt{\left(1-t'^2\right)\left(1-\left(\frac{1+l}{2}\right)t'^2\right)}}\right].$$

Der Bogen der Cassinischen Kurve ist also durch 2 elliptische Normalintegrale erster Art dargestellt.

Um den halben Umfang eines Ovales zu erhalten, muss man von $u = o$ bis $u = K$ integriren, also

für t von $t = 1$ bis $t = -1$
„ t' „ $t' = 1$ „ $t' = 1$.

Die Grenzen des zweiten Integrals sind also einander gleich, es verschwindet und es wird

$$\frac{U}{2} = -\frac{k}{2} \times$$

$$\int_1^{-1} \frac{dt}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-\left(\frac{1-l}{2}\right)t^2\right)}} = k \int_o^1 \frac{dt}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-\left(\frac{1-l}{2}\right)t^2\right)}}.$$

Der Werth dieses vollständigen Normalintegrals ist gleich K für den Modul $\frac{\sqrt{1-l}}{2}$, es werde mit $K\left(\sqrt{\frac{1-l}{2}}\right)$ bezeichnet. Der Umfang eines Ovals wird also

$$U = 2k\, K\left(\sqrt{\frac{1-l}{2}}\right). \tag{7}$$

Für $k = 1$, $l = 0$ erhält man den Umfang einer Lemniskatenschleife

$$S = 2\, K\,(\sqrt{1/2}).$$

Der Inhalt eines Sektors OAP der Kurve von der x Axe aus gerechnet, bestimmt sich aus dem Integral:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^v r^2\, dv.$$

Im vorliegenden Falle ist:

$$r^2 = x^2 + y^2 = (1 + k)\,\frac{1 - k\,\mathrm{sn}^2\,u}{1 + k\,\mathrm{sn}^2\,u} \quad \text{und}$$

$$dv = k\left(\frac{1 - 2\,\mathrm{sn}^2\,u + k^2\,\mathrm{sn}^4\,u}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^4\,u}\right) du,$$

somit

$$S = \frac{k}{2}(1 + k)\int_0^u \frac{1 - 2\,\mathrm{sn}^2\,u + k^2\,\mathrm{sn}^4\,u}{(1 + k\,\mathrm{sn}^2\,u)^2}\, du.$$

Setzt man $1 + k\,\mathrm{sn}^2\,u = p$ und berücksichtigt die Formel:

$$\frac{d^2}{du^2}\,\mathrm{Lg}\,(1 + k\,\mathrm{sn}^2\,u) = \frac{4\,(1 + k)^2}{p^2} - \frac{4\,(1 + k)^2}{p} + 2\,k\,p, \text{ so folgt:}$$

$$S = \frac{1}{4}\int_0^u \left[\frac{d^2}{du^2}\,\mathrm{Lg}\,(1 + k\,\mathrm{sn}^2\,u) - 2\,k\,p + 2\,k\,(1 + k)\right] du \quad \text{oder}$$

$$S = \frac{1}{4}\left[\frac{d}{du}\,\mathrm{Lg}\,(1 + k\,\mathrm{sn}^2\,u) + 2\,(k^2 - 1)\,u + 2\int \mathrm{dn}^2\,u\,du\right]_0^u$$

8) $$S = \frac{1}{2}\left[\frac{k\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1 + k\,\mathrm{sn}^2\,u} - l^2\,u + \mathrm{Eam.}\,u\right]_0^u.$$

Dieser Sektor OAP ist von O aus bis zur äussern Begrenzung der Kurve gerechnet. Der Sektor APP′B, welcher der Kurve angehört, ist:

$$S = \text{Sektor OAP} - \text{Sektor OBP}' = S_1 - S_2.$$

In den Schnittpunkten A und B der Kurve mit der x Axe hat u die Werthe 0 und K, der Berührungspunkt C der äussersten Tangente hat, wie gefunden, den Parameter $u = \frac{K}{2}$. Das Argument hat daher auf den Bögen AC und BC, in Punkten, die auf demselben Strahl durch O liegen, die Werthe u und K — u.

Der Sektor S_1 wird durch Formel 8 bestimmt, und S_2 erhält man, wenn in derselben u durch K — u ersetzt wird

$$S_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{k \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k \operatorname{sn}^2 u} - l^2 (K - u) + E - \operatorname{Eam} u\right]_0^u,$$

wo E das vollständige Normalintegral zweiter Art ist.

Der Kurvensektor APP'B wird nun:

$$S = \operatorname{Eam} u - l^2 u - \frac{k^2 \operatorname{sn}^3 u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}. \qquad (9$$

Für $u = \frac{K}{2}$ erhält man den Inhalt eines halben Ovals:

$$\frac{O}{2} = \frac{1}{2}(E - l^2 K),$$

somit der Inhalt eines Ovals:

$$O = E - l^2 K, \qquad (10$$

annähernd $= \frac{\pi}{2} k^2$ für kleine k, mit Vernachlässigung der vierten und höhern Potenzen von k.

Für $k = 1$ erhält man den Inhalt einer Lemniskatenschleife

$$L = 1.$$

II. $k > 1$.

In diesem Falle gelten die vorigen Formeln nicht mehr. Man transformirt zu einem Modul $k' = \frac{1}{k} < 1$ durch Transformation des ursprünglichen Periodenverhältnisses z zu einem neuen z' durch Substitution $z' = \frac{z}{1 + z}$.

Im transformirten System werden alle Grössen durch Accente bezeichnet. Dann gelten die Gleichungen:

$$z' = \frac{z}{1 + z}, \quad k = \frac{1}{k'}, \quad l = \frac{\sqrt{k'^2 - 1}}{k'}, \quad u = k' u', \quad t = \operatorname{sn}' u',$$

$$\operatorname{sn} u = k' \operatorname{sn}' u', \quad \operatorname{cn} u = \operatorname{dn}' u', \quad \operatorname{dn} u = \operatorname{cn}' u'.$$

Die Gleichungen der Cassinischen Kurve werden nun:

$$x = \pm\sqrt{\frac{1 + k'}{k'}} \, \frac{\operatorname{cn}' u'}{1 + k' \operatorname{sn}'^2 u'}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{1 + k'}{k'}} \, \frac{\operatorname{sn}' u' \operatorname{dn}' u'}{1 + k' \operatorname{sn}'^2 u'}. \qquad (11$$

Die Schnittpunkte mit den Axen werden:

Für $y = o$ 1) $sn' u' = o, u' = o, \qquad x = \frac{\pm\sqrt{1+k'}}{k'} = \pm\sqrt{1-k}.$

2) $dn' u' = o, u' = K' + L', x = \pm\sqrt{\frac{k'-1}{k'}} =$ imaginär.

$x = o \qquad cn' u' = o, u' = K' \qquad y = \sqrt{\frac{1-k'}{k'}} = \sqrt{k-1}.$

Die Kurve besteht aus nur einem Zweig, symmetrisch zu den Axen.

Die Geraden $y = \pm \frac{k}{2}$ sind wieder Doppeltangenten der Kurve; die Coordinaten der Berührungspunkte sind:

$$x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4k'^2-1}{k'}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4-k^2},\ y = \pm\frac{1}{2k'} = \pm\frac{k}{2}.$$

Sie werden durch dieselben Gleichungen bestimmt wie diejenigen für die Cassinischen Kurven aus zwei Ovalen bestehend, die Berührungspunkte liegen also auf demselben Kreis

$$x^2 + y^2 = 1,$$

der durch die Brennpunkte geht.

Die Doppeltangenten sind nur reell, so lange $k < 2$ ist. Für $k = 2$ fallen die Berührungspunkte auf jeder derselben zusammen in den Punkten $x = 0$, $y = \pm 1$, die Doppeltangenten werden zu *Undulationstangenten*. Die Cassinische Kurve $k = 2$ hat daher 2 Undulationspunkte in $x = o$, $y = \pm 1$.

Für die Parameter der *Inflexionspunkte* muss die Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{dx}{du'} \cdot \frac{d^2y}{du'^2} - \frac{dy}{du'} \cdot \frac{d^2x}{du'^2} = o$$

Es ist diese Bedingung erfüllt, wenn

$$sn'^2u' = \frac{k' + 2 \pm \sqrt{3(1-k'^2)}}{k'(2k'+1)}$$

Von den 8 Wendepunkten, die sich hieraus ergeben, sind aber nur 4 reell, denn das positive Vorzeichen der Wurzel liefert imaginäre Werthe für u'.

Für $k = k' = 1$, die Lemniskate, wird $sn' u' = 1$, $u' = K'$ und $x = o$, $y = o$; die 4 Wendepunkte fallen im Doppelpunkt zusammen.

Das negative Vorzeichen der Wurzel liefert einen reellen Werth für u', also 4 reelle Wendepunkte, so lange $1 > k' > {}^1/_2$ oder $1 < k < 2$ ist. Denn wird $k' < {}^1/_2$ so wird der obige Ausdruck für $sn'^2 u'$ wieder > 1, also u' imaginär.

Für die Grenze selber $k = 2$ wird $sn' u' = 1$, $u' = K'$ und die Coordinaten der Wendepunkte werden:

$$x = o,\ y = \pm 1$$

d. h, in diesen beiden Punkten, die wir bereits als Undulationspunkte der Kurve $k = 2$ gefunden haben, fallen je 2 Wendepunkte zusammen.

Die Cassinischen Kurven mit 4 reellen Wendepunkten erhält man, wenn k zwischen 1 und 2 liegt; die untere Grenze $k = 1$ ist die Lemniskate mit Doppelpunkt, die obere Grenze $k = 2$ ein Oval mit 2 Undulationspunkten. Für $k > 2$ haben die Curven keine Doppeltangenten und keine Inflexionspunkte mehr, es sind Ovale; ein Kreis mit unendlich grossem Radius bildet die Grenze.

Die Coordinaten der Wendepunkte sind:

$$x^2 = -\frac{1}{6\,k'^2}(l'^2 - k'\,l'\sqrt{3}) \text{ u. } y^2 = \frac{1}{6\,k'^2}(l'^2 + k'\,l'\sqrt{3}). \quad (12$$

Durch Elimination von k' und l' ergiebt sich:

$$(x^2 + y^2)^{\,2} + (x^2 - y^2) = 0 \quad (13$$

d. h. die Wendepunkte sämmtlicher Cassinischen Kurven liegen auf einer Lemniskate mit Doppelpunkt in O, und den Brennpunkten auf der y Axe im Abstand $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dieselbe geht durch die Undulationspunkte $x = 0$, $y = \pm 1$ und ist congruent mit der vorher gefundenen Lemniskate, auf welcher die Berührungspunkte der innern Doppeltangenten liegen, nur ist sie um 90^0 gedreht.

Für den Bogen s der Kurve erhält man:

$$s = \frac{1}{\sqrt{k'}} \cdot \sqrt{1 + k'} \int \frac{1 - k'\,sn'^2\,u'}{\sqrt{1 - k'^2\,sn'^4\,u'}}\,du'.$$

Vom Faktor $\frac{1}{\sqrt{k'}}$ abgesehen, ist das Integral dasselbe wie das im Fall I behandelte; es wird daher:

$$s = -\frac{1}{2\sqrt{k'}} \times$$

$$\left[\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\left(\frac{1-l'}{2}\right)t^2\right)}} + \int \frac{dt'}{\sqrt{(1-t'^2)\left(1-\left(\frac{1+l'}{2}\right)t'^2\right)}}\right]$$

Man erhält den Quadranten der Kurve, wenn man nach u' von $u' = o$ bis $u' = K'$ integrirt, und man erhält wie dort:

$$\frac{U}{4} = \frac{1}{\sqrt{k'}} K\left(\sqrt{\frac{1 - l'}{2}}\right) = \sqrt{k}\ K\left(\sqrt{\frac{1 - l'}{2}}\right),$$

somit der ganze Umfang der Kurve:

14) $$U = 4\sqrt{k}\ K\left(\sqrt{\frac{1 - l'}{2}}\right).$$

Für $k = k' = 1$, $l' = o$ erhält man den Umfang der Lemniskate:

$$U = 4\ K\left(\sqrt{1/2}\right)$$

Den Kurvensektor erhält man durch Transformation der Gleichung 8 auf das neue Periodenverhältniss:

15) $$S = \frac{1}{2k'}\left[\frac{k' \operatorname{sn}' u' \operatorname{cn}' u' \operatorname{dn}' u'}{1 + k' \operatorname{sn}'^2 u'} + E' \operatorname{am} u'\right]_o^{u'}.$$

Da die Kurve eintheilig ist, wird der Sektor vom Ursprung aus gerechnet. Der Inhalt eines Quadranten wird erhalten, wenn man von $u' = 0$ bis $u' = K'$ integrirt, somit

$$\frac{O}{4} = \frac{1}{2k'} E' \operatorname{am} K' = \frac{E'}{2k'} = \frac{k}{2} E'.$$

Der Inhalt der ganzen Kurve wird also:

16) $$O = 2k\ E'.$$

Für kleine Werthe von k' oder grosse Werthe von k wird annähernd

$$O = \pi\left(\frac{4k^2 - 1}{4k}\right)$$

nach Vernachlässigung der vierten und höhern Potenzen von k'.

Für $k' = k = 1$ erhält man den Inhalt der Lemniskate:

$$L = 2.$$

III. k = 1. Die Lemniskate mit Doppelpunkt.

In diesem Falle wird bei Einführung von hyperbolischen Funktionen:

$$\operatorname{sn} u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \frac{\sin u}{\cos u} = \text{tang. } u,\ \operatorname{cn} u = \operatorname{dn} u = \frac{1}{\cos u}.$$

Die Coordinaten eines Punktes der Lemniskate werden nun, sowohl nach den Gleichungen 2 als auch nach den Gleichungen 11:

17) $$x = \pm\sqrt{2}\,\frac{\cos u}{\cos 2u} \text{ und } y = \pm\sqrt{2}\,\frac{\sin u}{\cos 2u}.$$

Für $\cos 2u = 0$, $u = \pm i \frac{\pi}{4}$ wird $x = \pm \infty$, $y = \pm i \infty$ und die Richtung dieser unendlich fernen, imaginären Punkte ist: $\frac{y}{x} = \pm i$, d. h. die unendlich fernen, imaginären Kreispunkte gehören der Lemniskate als Doppelpunkte an.

Für $u = \infty$ fallen je zwei entgegengesetzte Werthe von x und y im Ursprung zusammen. derselbe ist ein Doppelpunkt der Kurve.

Der Bogen der Lemniskate wird dargestellt durch das Integral:

$$s = \sqrt{2} \int \frac{du}{\sqrt{\cos 2u}}. \tag{18}$$

Um den halben Umfang einer Schleife zu erhalten, muss man $x = \sqrt{2}$ bis $x = 0$ oder von $u = 0$ bis $u = \infty$ integriren, so dass

$$\frac{U}{2} = \sqrt{2} \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{\cos 2u}}$$

Setzt man $\cos 2u = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$, so wird:

$$U = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} = 2K\left(\sqrt{1/2}\right). \tag{19}$$

Der Kurvensektor wird:

$$S = \int \frac{du}{\cos^2 2u} = \frac{1}{2} \operatorname{tang.} 2u. \tag{20}$$

Den Inhalt einer halben Schleife erhält man durch Integration von $u = 0$ bis $u = \infty$. Also:

$$\frac{J}{2} = \frac{1}{2} \Big[\operatorname{tang.} 2u\Big]_0^\infty = \frac{1}{2}.$$

Der Inhalt einer Schleife wird daher

$$J = 1$$

wie bereits früher gefunden.