Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Band: - (1901)

Heft: 1500-1518

Artikel: Die Schale Vivianis

Autor: Sidler, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319111

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 09.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

G. Sidler.

Die Schale Vivianis.

(Eingereicht Febr. 1901.)

Die Aufgabe Vivianis, auf der Kugel ein quadrirbares Flächenstück zu begrenzen, lässt eine völlig elementare Behandlung zu.

1. In jedem eingehendern Lehrbuche der Stereometrie finden wir die Quadratur der sogen. hufförmigen Abschnitte des geraden Kreiscylinders. Wir können daher den folgenden Satz als bekannt voraussetzen:

Sei A C B die halbkreisförmige Basis eines geraden Cylinders (Fig. 1), so legen wir durch den Durchmesser A O B derselben eine Ebene A D B, die mit der Basis einen Winkel $= 45^0$ bilde. Dies vorausgesetzt, ist der Flächeninhalt des von der Basis A C B und der Schnittlinie A D B jener Ebene mit dem Cylindermantel begrenzten Teiles des Cylindermantels $= 2\,R^2$, wo R der Radius des Cylinders.

In der That legen wir durch den höchsten Punkt D der Schnittlinie A D B parallel zur Basis die obere Grenzebene D G E des Cylinders, welche die Axe O P in P schneide, so ist C D = O C, also OP = R. Eine durch die Axe gehende Ebene POlk, die mit der Ebene P O A E den Winkel λ bilde, schneide nun die Cylinderfläche in der Erzeugenden l k, und l k treffe die Schnittlinie A D B im Punkte S; ferner sei n h die Projektion von l k auf die Ebene A B G E. Endlich sei $l'k'$ eine benachbarte Erzeugende des Cylinders und $n'h'$ deren Projektion. Nun ist $l\,S = n\,l = R \sin \lambda$ und somit Flächenelement $ll'SS' = ll' . R \sin \lambda$.

Das Element ll' des Äquators bildet mit nn' den Winkel $90^0 - \lambda$, und daher ist $nn' = ll' . \sin \lambda$ und Flächenelement $nn'hh' = R . nn'$ $= ll' . R \sin \lambda$.

Die Flächenelemente $ll'SS'$ und $nn'hh'$ sind also einander gleich und somit Hufffläche ACB, $ASDS''B$ = Rechteck $ABGE = 2\,R^2$, wie z. z.

2. Betrachten wir nun die Kugel (Fig. 2), deren Durchmesser AOB ist, die also den Cylindermantel längs des Äquators ACB und die obere Grenzfläche im Pole P dieses Äquators berührt. Dies vorausgesetzt, schneiden wir Cylinder und Kugel durch ein System von Ebenen parallel zur Basis ACB. Eine dieser Ebenen schneide die Axe OP im Punkte J und die Ebene ADB in der Geraden SS″ (Fig. 1), und S, S″ seien die Punkte, wo die Gerade SS″ die Cylinderfläche schneidet, so mögen die Radien JS und JS″ des Cylinders die Kugelfläche in den Punkten s und s″ durchdringen (Fig. 2). Der Ort der Punkte s und s″ ist nun eine sphärische Kurve AsuPu″s″B. Nach einem elementaren Satze der Stereometrie ist aber der Inhalt der vom Äquator ACB und von der obigen Kurve AsuPu″s″B begrenzten Teiles der Kugelfläche gleich dem Inhalte der Projektion dieser Fläche auf den dem Kugeläquator umschriebenen Cylinder, d. h. gleich dem Teile der Cylinderfläche zwischen dem Äquator ACB und der Kurve ASDS″B (Fig. 1). Wir erhalten daher den Satz: *Der vom halben Aequator ACB und von der Ortskurve AsPs″B dər Punkte s und s″ begrenzte Teil der Kugelfläche ist quadrirbar: der Inhalt dieses sphärischen Flächenstückes ist* $= 2R^2$, *wo R der Radius der Kugel, oder gleich der Fläche des dem Meridiane APB umschriebenen Rechtecks ABGE.*

3. Auf der obigen Kugel (Fig. 2) sei Psl der durch s gehende Meridian und $\lambda = AOl$ die geographische Länge dieses Meridians; ferner sei K die Projektion des Punktes s auf die Äquatorebene und (Fig. 1) n die gemeinsame Projektion der Punkte S und l auf den Durchmesser AOB, so ist $\measuredangle\, lnS = 45^0$, also $Sl = nl = R \sin\lambda$. Anderseits $Sl = sK$. Somit $sK = R \sin\lambda$ und daher $\measuredangle\, sOK = \lambda$, d. h.: die geographische Breite des Punktes s ist gleich dessen geographischer Länge. Wir erhalten daher von der Vivianischen Ortskurve der Punkte s und s″ auch folgende Erzeugung: *Auf der kugelförmigen Erdoberfläche bewege sich ein Reisender vom Ausgangspunkte A der geographischen Längen auf dem Aequator so gegen den Pol P hin, dass seine geographische Breite stets gleich seiner geographischen Länge sei, so beschreibt derselbe den Zweig AsP der Vivianischen Kurve. Zählt man aber vom Diametralpunkt B von A aus die Längen im entgegengesetzten Sinne, so beschreibt ein Reisender, der sich in analoger Weise von B aus zum Pole P bewegt, den zu AsP symmetrischen Zweig Bs″P der Vivianischen Kurve.*

Fig. 1

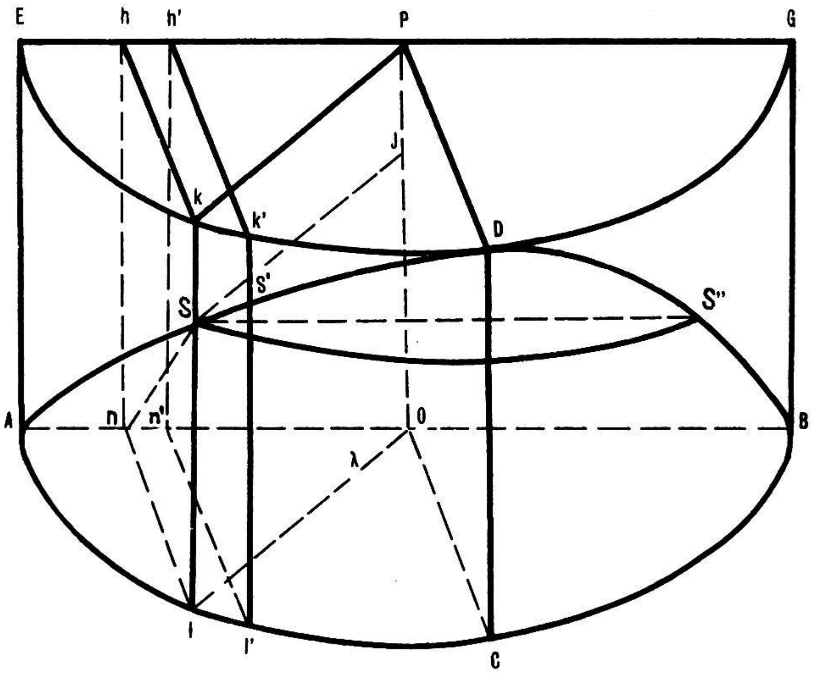
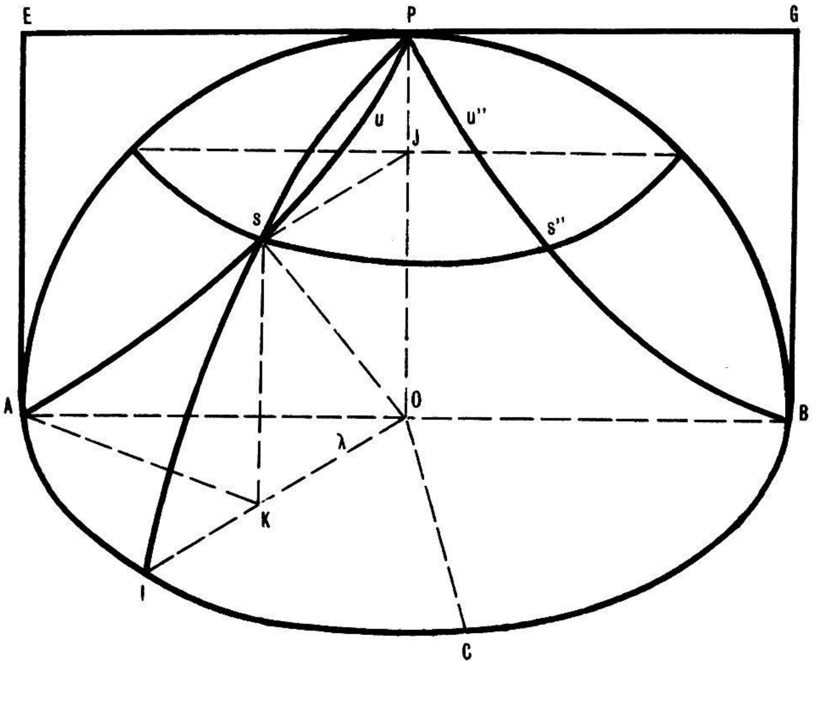


Fig. 2



4. Ziehen wir in Fig. 2 die Gerade AK, so sind die Dreiecke AOK und sOK kongruent, denn sie haben je zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel λ gleich. Daher steht AK senkrecht zu OK und der Ort des Punktes K ist der um OA als Durchmesser beschriebene Kreis. Die Projektion des Zweiges AsuP der Vivianischen Kurve auf die Ebene des Äquators ACB ist also der um AO als Durchmesser beschriebene Halbkreis. Hieraus die gewöhnliche Erzeugungsweise der Vivianischen Kurve (Fig. 3) *als Durchschnitt der Kugelfläche mit dem geraden Cylinder, dessen Basis der in der Aequatorebene der Kugel liegende um den Aequatorradius A O als Durchmesser beschriebene Kreis ist.* Bezeichnen wir mit H die Mitte der Strecke AO, so geht durch H die Axe HL dieses Cylinders, und wir wollen diesen Cylinder, im Gegensatze zu dem in § 1 betrachteten Cylinder O, den Cylinder H nennen.

5. Die Kurve ADB auf der Cylinderfläche O (Fig. 1) ist die Hälfte einer *Ellipse*, deren halben Axen respektive $R\sqrt{2}$ und R sind. Der Brennpunkt dieser Ellipse liegt auf der dem Cylinder eingeschriebenen Kugelfläche in Fig. 2 und ist die Mitte des Quadranten PC. Nun ist Sl = nl (Fig. 1); wird daher die Cylinderfläche abgewickelt, so geht die Kurve ADB in eine *Sinusoïde* über. Für die Fläche des betrachteten Cylinderhufes ADB erhalten wir somit

$$\int_0^\pi R \sin\lambda \,.\, R \,.\, d\lambda = R^2 . \Big(-\cos\lambda\Big)_0^\pi = 2R^2, \text{ wie oben in § 1.}$$

6. Nehmen wir A zum Ursprung rechtwinkliger Koordinaten, die Äquatorebene ACB zur x, y Ebene und legen die positive x Axe durch O (Fig. 3), so ist die Gleichung der Kugelfläche $x^2 - 2Rx + y^2 + z^2 = 0$, und die Gleichung des in § 4 genannten Cylinders H $x^2 - Rx + y^2 = 0$. Durch die Vivianische Kurve geht daher das Büschel von Rotationsflächen zweiten Grades

$$(1+k)x^2 - (2+k)Rx + (1+k)y^2 + z^2 = 0,$$

wo k eine willkürliche Konstante. Die Äquatorkreise dieser Flächen liegen in der x, y Ebene und berühren einander im Punkte A, die Mittelpunkte erfüllen die x Axe und die Rotationsaxen sind der z Axe parallel. Da alle Büschelflächen durch die Vivianische Kurve gehen, so gehen die in die z, x Ebene fallenden Meridiane dieser Flächen durch die Pole P und P′ der gegebenen Kugel und berühren einander im Punkte A.

Wenn k positiv, so ist die betreffende Büschelfläche ein verlängertes Rotationsellipsoïd und sämtliche Meridiane der Fläche haben dann anf der Rotationsaxe ein gemeinsames Paar reeller Brennpunkte. Die Abscisse des Mittelpunktes M des Ellipsoïdes und zugleich der Radius AM des Äquators ist $\alpha = \frac{2+k}{1+k} \cdot \frac{R}{2} = \frac{R}{2} + \frac{1}{1+k} \cdot \frac{R}{2}$, und die halbe Rotationsaxe ist $\gamma = \frac{2+k}{\sqrt{1+k}} \cdot \frac{R}{2}$. Wenn k von o an ins positiv Unendliche wächst, so nimmt α von R bis $\frac{R}{2}$ ab. Die Äquatorkreise dieser verlängerten Rotationsellipsoïde bestehen also in dem von den Äquatorkreisen ACB und AKO der Kugel und des Cylinders H erzeugten Büschel sich in A berührender Kreise aus denjenigen Kreisen, die den Raum zwischen jenen zwei Grundkreisen erfüllen, oder deren Mittelpunkte die Strecke OH erfüllen. Während die halbe kleine Axe α der Meridianellipsen von R bis $\frac{R}{2}$ abnimmt, wächst die halbe grosse Axe γ von R bis ∞. Die Distanz der Brennpunkte von der Äquatorebene nimmt also von 0 bis ∞ zu und es wird somit ein Ellipsoïd geben, wo die Brennpunkte auf der Kugelfläche liegen. Bestimmen wir dieses Ellipsoïd:

Wenn F ein Brennpunkt dieses speziellen Ellipsoïdes, so ist $AM = \alpha$, $AF = \gamma$ und das rechtwinklige Dreieck AFB giebt $\gamma^2 = 2R\alpha$, d. h. $\frac{(2+k)^2}{1+k} \cdot \frac{R^2}{4} = \frac{2+k}{1+k} R^2$, woraus $2+k=4$ oder $k=2$. Das betreffende Ellipsoïd ist also $3x^2 - 4Rx + 3y^2 + z^2 = 0$, und hier ist $\alpha = \frac{2R}{3}$, $\gamma = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Wenn also M der Mittelpunkt dieses Ellipsoïdes, so ist $AM = \frac{2}{3} AO = \frac{1}{3} AB$, und die Brennpunkte F und F′ desselben sind die Punkte, wo die in M in der Ebene APB zu AB errichtete Senkrechte den Kugelmeridian APB trifft. Ein beliebiger Meridian dieses speziellen Rotationsellipsoïdes treffe die Kugelfläche O und somit die Vivianische Kurve im Punkte s, so besteht für die Sehnen Fs und F′s die Relation $Fs + F's = 2AF$ oder $Fs + F's = \frac{4R}{\sqrt{3}}$.

Der Strahl AF treffe die Gerade OP in f und der Strahl BF treffe die in A an den Kreis APB gelegte Tangente in q (Fig. 3), so

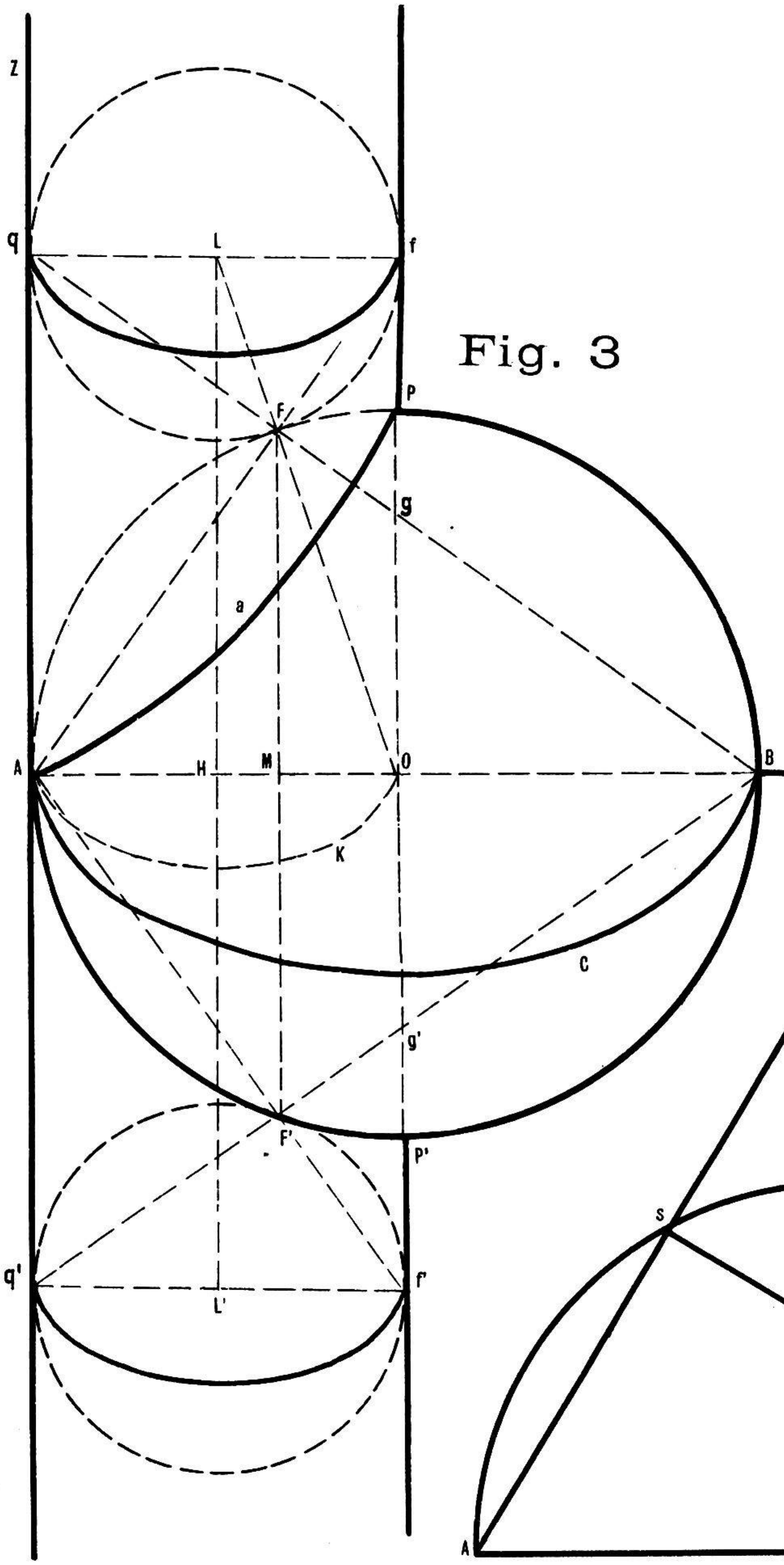


Fig. 3

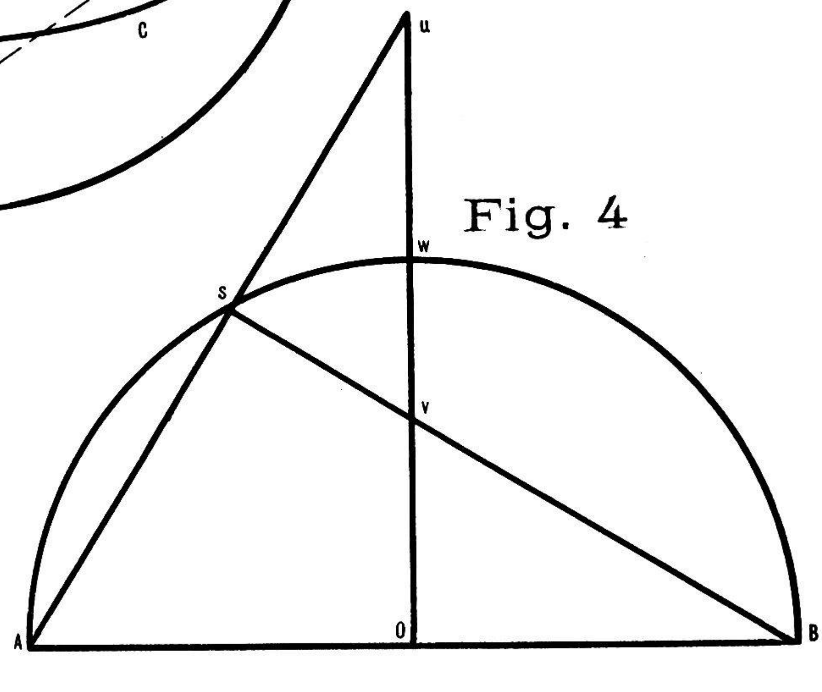


Fig. 4

hat man $\frac{Of}{MF} = \frac{AO}{AM} = \frac{3}{2}$ und $\frac{Aq}{MF} = \frac{AB}{MB} = \frac{3}{2}$. Somit $Of = Aq$, und zwar $Of = Aq = \frac{3}{2} MF = \frac{3}{2} \sqrt{AM \,.\, MB} =$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2R}{3} \cdot \frac{4R}{3}} = R\sqrt{2}, \text{ oder } Of = Aq = AP.$$

Bestimmt man also auf dem Meridian APB der Kugelfläche O die beiden Punkte F und F′ derart, dass man durch den Punkt M auf AB, wo $AF = \frac{1}{3} AB$, *zu AB eine Senkrechte zieht, welche jenen Meridian in F und F′ trifft, oder dass man auf OP die Strecken* $\left.\begin{matrix} Of \\ Of' \end{matrix}\right\} = AP$ *macht und die Strahlen Af und Af′ zieht, welche den Kreis APB in F und F′ wieder treffen, oder dass man auf der in A an den Meridian APB gelegten Tangente die Strecken* $\left.\begin{matrix} Aq \\ Aq' \end{matrix}\right\} = AP$ *macht und die Strahlen Bq und Bq′ zieht, welche den Kreis APB wieder in F und F′ treffen, so wird, wenn man in F und F′ die Enden eines undehnbaren Fadens befestigt, dessen Länge gleich der gebrochenen Linie FAF′ ist, ein Stift s, der diesen Faden stets zu einer gebrochenen Geraden* $Fs + F's$ *spannt, auf der Kugelfläche O die Vivianische Kurve beschreiben.*

Wir können daher *F und F′ die Brennpunkte der Vivianischen Kurve* nennen.

7. Da $Of = Aq$, so ist die Gerade qf parallel zu AB und das Dreieck qFf ist zu BFA ähnlich und liegt zu diesem perspektivisch mit dem perspektivischen Zentrum F und da $qf = \frac{1}{2} BA$, so ist das Ähnlichkeitsverhältnis $\frac{1}{2}$. Der Strahl OF geht daher durch die Mitte von qf, d. h. durch den Punkt L, wo qf die Axe HL des Cylinders H schneidet, und es ist $LF = \frac{1}{2} FO$, d. h. $LF = \frac{1}{2} R$. Beschreiben wir daher um L als Mittelpunkt eine Kugel mit dem Radius $\frac{R}{2}$, so berührt diese Kugel die gegebene Kugel O im Punkte F und ist zugleich dem Cylinder H eingeschrieben.

Wir erhalten so den Satz von d'Arrest: *Ist eine Kugel O gegeben, und beschreiben wir einen geraden Cylinder, dessen Basis in der Aequatorebene A C B der Kugel der um den Radius A O dieses Aequators als Durchmesser beschriebene Kreis A K O ist und konstruieren endlich die beiden Kugeln, die dem Cylinder eingeschrieben sind und die zugleich die gegebene Kugel O von aussen berühren, so sind die Berührungspunkte F und F′ jener beiden Kugeln mit der Kugel O die Brennpunkte der Vivianischen Kurve, die durch die Schnittlinie des Cylinders mit der Kugelfläche O gebildet wird.*

Für die Mittelpunkte L und L′ jener beiden Kugeln hat man $\left.\begin{matrix} HL \\ HL' \end{matrix}\right\} = R\sqrt{2} = AP$. Die Punkte L und L′ sind auch bestimmt als Schnittpunkte der Cylinderaxe mit dem zum Kreise APB konzentrischen Kreise vom Radius $\frac{3R}{2}$. Wenn f und q die Berührungspunkte der Kugel L mit den in der Ebene APB liegenden Erzeugenden OP und Aq des Cylinders, so liegen die Punkte A, F, f und B, F, q je in einer Geraden.

8. Für $k = -2$ geht die Büschelfläche des § 4 in den rechtwinkligen Rotationskegel $x^2 + y^2 = z^2$ über, dessen Spitze A und dessen Axe die z Axe ist. *Die Vivianische Kurve ist daher auch die Schnittlinie einer Kugelfläche mit einem rechtwinkligen Rotationskegel, dessen Spitze ein Punkt A der Kugel und dessen Axe eine Tangente der Kugelfläche im Punkte A ist.*

Für $x = R$ erhalten wir aus der Gleichung dieses Kegels die *stereographische Projektion der Vivianischen Kurve für den Pol A* $z^2 - y^2 = R^2$. Diese Projektion ist also in der Meridianebene PCP′ der Kugel *die rechtwinklige Hyperbel, die zu Scheiteln die Punkte P und P′ hat.* Seien f und f′ die Brennpunkte dieser Hyperbel, so ist $Of = R\sqrt{2}$. Anderseits $\overline{MF^2} = AM \,.\, MB = \frac{2R}{3} \cdot \frac{4R}{3}$, also $MF = \frac{2}{3} R\sqrt{2}$. Somit $MF = \frac{2}{3} \cdot Of$. Der Strahl AF trifft also OP im Brennpunkt f der Hyperbel. *Nimmt man also vom Punkte A der Kugel aus die stereographische Projektion der Vivianischen Kurve, so gehen die Brennpunkte F und F′ dieser Kurve in die Brennpunkte f und f′ der gleichseitigen Hyperbel über, welche jene stereographische Projektion bildet.*

Sei AwB (Fig. 4) ein beliebiger durch den Durchmesser AB gehender Hauptkreis der gegebenen Kugel, s ein auf demselben liegender Punkt der Vivianischen Kurve, und seien u und v die stereogr. Projektionen von s respektive von den Punkten A und B aus, so ist $\frac{Ou}{OA} = \frac{Bs}{As}$ und $\frac{Ov}{OB} = \frac{As}{Bs}$, also $Ou \, . \, Ov = R^2$. Wenn also (u) die stereographische Projektion irgend einer sphärischen Kurve (s) von einem Punkte A der Kugel aus und wir transformieren (u) mittelst reciproker Radien in Bezug auf den Grosskreis der Kugel, dessen sphärisches Centrum A ist, als Grundkreis, so erhalten wir die stereographische Projektion (v) von (s) vom Diametralpunkte B von A aus. Nun ist die Gleichung der Hyperbel $z^2 - y^2 = R^2$ in Polarkoordinaten $r^2 (\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2) = R^2$. Die in Bezug auf den konzentrischen Grundkreis von Radius R transformierte Gleichung ist $r^2 = R^4 . \frac{\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2}{R^2}$ oder wieder in rechtwinkligen Koordinaten $z^2 + y^2 = \frac{R^2 (z^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$, d. h. $(z^2 + y^2)^2 = R^2 (z^2 - y^2)$. *Die stereographische Projektion der Vivianischen Kurve vom Diametralpunkte B von A aus ist also die Lemniskate, deren Scheitel P und P' sind.* Seien g und g' zwei Punkte der z Axe in der Distanz $\pm$ c vom Mittelpunkt O, so hat man für die Radien Vektoren ϱ und ϱ', die von diesen Punkten nach einem Punkte (z, y) der Kurve gehen, $\varrho^2 = y^2 + (z - c)^2$, $\varrho'^2 = y^2 + (z + c)^2$, also $\varrho^2 \varrho'^2 = (z^2 + y^2)^2 - 2c^2 (z^2 - y^2) + c^4$, d. h. zufolge der Kurvengleichung. $\varrho^2 \varrho'^2 = (R^2 - 2c^2)(z^2 - y^2) + c^4$. Wenn also $c = \frac{R}{\sqrt{2}}$, so kommt $\varrho \varrho' = c^2$. Diese zwei festen Punkte g und g' auf der Hauptaxe $PP' = 2R$ der Kurve, wo die von diesen Punkten nach einem variabeln Punkte der Kurve gehenden Radien Vektoren ϱ und ϱ' ein konstantes Produkt bilden, sind *die Brennpunkte der Lemniskate.* Die Distanz dieser Punkte vom Zentrum O der Kurve ist also $Og = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Nun war $Of = R\sqrt{2}$, also $Of \, . \, Og = R^2$. Die beiden Punkte f und g sind also einander in Bezug auf den Kreis vom Durchmesser PP' harmonisch zugeordnet und somit sind g und f die stereographischen Projektionen von den Diametralpunkten B und A aus eines nämlichen Punktes F der Kugelfläche. Oder da

$Og = \frac{R}{\sqrt{2}}$, so ist (Fig. 3) $Og = \frac{1}{2} Aq$; der Strahl Bq, d. h. der Strahl BF schneidet also OP im Brennpunkt g der Lemniskate, w. z. z.

Nimmt man also von den Endpunkten A und B des Kugeldurchmessers A B aus die stereographischen Projektionen der Vivianischen Kurve, so sind dieselben respektive eine rechtwinklige Hyperbel mit den Scheiteln P und P' und eine Lemniskate mit den Scheiteln P und P'. Die Brennpunkte dieser beiden Kurven sind die stereographisehen Projektionen eines nämlichen Punktenpaares F, F' der Kugelfläche und F, F' sind hinwieder die Brennpunkte der Vivianischen Kurve.