Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1905)
Heft: 1591-1608

Artikel: Briefwechsel von Ludwig Schläfli mit Arthur Cayley
Autor: Graf, J.H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319152

J. H. Graf.

Briefwechsel von Ludwig Schläfli mit Arthur Cayley.

(Mit einem Facsimile eines Briefes von Cayley.)

Konzept eines Briefes von Schläfli an Cayley.[1]
(Anfang 1856).

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

$\begin{vmatrix} r. & s. & t \\ r'. & s'. & t' \\ r''. & s'' & t'' \end{vmatrix} = 0$ gebracht wird, wo alle Elemente der Determinante lineare *Polynome* sind. Dann wird jeder durch ein System wie $p = \alpha r + \beta s + \gamma t = o$, $p' = \alpha r' + \beta s' + \gamma t' = o$, $p'' = \alpha r'' \cdots = o$ bestimmte Punkt auf der Basis liegen und umgekehrt werden die Verhältnisse $\alpha : \beta : \gamma$ für jeden gegebenen Punkt der Basis auf einfache Weise bestimmt. Verlangt man aber, dass die drei *Polynome* dieses Systems unter sich abhängen, dass z. B. $\varkappa\ (\alpha r' \cdots) + \varkappa'\ (\alpha r' \cdots) = o$ eine identische Gleichung sei, mit anderen Worten, dass die drei Ebenen des Systems nicht in einem Punkt, sondern in einer Geraden sich schneiden, so bekömmt man die Bedingung, dass alle Determinenten einer rechteckigen Matrix mit 3 Horizontal- und 4 Vertikalzeilen, deren Elemente sämtliche lineare und homogene Polynome von α, β, γ, verschwinden. Es erhellt dann leicht, dass diese Aufgabe 6 Lösungen zählt. Nehmen wir z. B. an, es sei wirklich $\varkappa p + \varkappa' p' + \varkappa'' p'' = o$ eine identische Gleichung, so können wir der Gleichung der Basis die Form

$$\begin{vmatrix} o \cdot & \varkappa s + \varkappa' s' + \varkappa'' s'' \cdot & \varkappa t + \varkappa' t' + \varkappa'' t'' \\ p' \cdot & s' \cdot & t' \\ p'' \cdot & s'' \cdot & t'' \end{vmatrix} = o \text{ geben,}$$

[1]) Das Konzept dieses ersten Briefes ist ein Bruchstück, der Anfang konnte nicht mehr gefunden werden; der Brief ist aber deshalb wichtig, weil er von den Schlaefli'schen Doppelsechs einer Fläche dritten Grades, von den 27 Geraden und 45 Ebenen der Basis sowie von den 216 windschiefen Geradenpaaren handelt.

woraus erhellt, das jeder Geraden ($p = o$, $p' = o$, $p'' = o$) auch eine Gerade ($\Sigma \varkappa r = o$, $\Sigma \varkappa s = o$, $\Sigma \varkappa t = o$) ent- entspricht, welche jene *nicht* schneidet. Wenn aber α, β, γ einer andern Lösung der Aufgabe angehören und wir die entsprechenden Polynome mit q, q', q'' und ihre identischen Relationen mit $\lambda q + \lambda' q' + \lambda'' q''$ bezeichnen, so haben wir

$$\begin{vmatrix} \Sigma \varkappa q & \Sigma \varkappa s & \Sigma \varkappa t \\ q' & s' & t' \\ q'' & s'' & t'' \end{vmatrix} = o$$

als Gleichung der Basis, und es ist klar, dass nun die zwei Geraden ($\Sigma \varkappa q = o$, $q' = o$) und ($\Sigma \varkappa q = o$, $\Sigma \varkappa s = o$) sich schneiden werden. Jede der 6 im System ($p = o$, $p' = o$, $p'' = o$) enthaltene Gerade schneidet also alle 5 ihr nicht entsprechenden Geraden des Systems ($\Sigma \varkappa r = o$, $\Sigma \varkappa s = o$, $\Sigma \varkappa t = o$) und nur die ihr entsprechenden nicht. Ich nenne diese Gruppe von 12 Geraden der Basis *einen Doppelsechser*. Es ist auch klar, dass keine zwei Geraden desselben Sechsers sich schneiden können. Die Anzahl aller möglichen Doppelsechser ist 36. Da nämlich jede Gerade von 10 andern geschnitten wird, so bleiben noch 16 übrig, von denen sie nicht geschnitten wird. Daher gibt es $\frac{27.\ 16}{2} = 216$ Paare von Geraden, welche sich nicht schneiden. Durch die eine Gerade eines solchen Paares gehen dann noch 5 Gerade, welche die andern nicht schneiden, diese andere und die fünf sind ein Sechser, welcher den zugehörigen andern Sechser völlig bestimmt. Solche Paare zusammengehöriger Strahlen, wie das erste war, gibt es aber im Doppelsechser nur 6; folglich ist $\frac{216}{6} = 36$ die Zahl aller Doppelsechser.

Wenn wir die Gleichung $\begin{vmatrix} \cdot & u & \cdot & x \\ y & \cdot & & v \\ w & z & & \cdot \end{vmatrix} = o$ zu Grunde legen, so haben wir bereits 3 Lösungen der Aufgabe, die Polynome $\beta u + \gamma x$, $\alpha y + \gamma v$, $\alpha w + \beta z$ von einander abhängig zu machen, nämlich ($\beta = o$, $\gamma = o$), ($\alpha = o$, $\gamma = o$), ($\alpha = o$, $\beta = o$). Die drei andern ergeben sich so. Es sei $\varkappa\ (su + \gamma x) + \varkappa'\ (\alpha y + \gamma v) + \varkappa''\ (\alpha w + \beta z) = o$ die identische Relation zwischen drei gesuchten Polynomen, und $Au + Bv + Cw + Dx + Ey + Fz = o$ die allgemeine identische Relation, worin $A, \cdots$ als lineare Funktionen einer Variabeln gelten. Wir dürfen also $A = \varkappa\beta$, $B = \varkappa'\gamma$, $C = \varkappa''\alpha$, $D = \varkappa\gamma$, $E = \varkappa'\alpha$ $F = \varkappa''\beta$ setzen, woraus dann $ABC = DEF$ folgt. Diese Gleichung hat, wie wir bereits wissen, 3 Lösungen. Und wenn wir die frühere Bezeichnung gebrauchen, so sehen wir diesen Doppelsechser entstehen:

$\begin{pmatrix} \overline{uz}, & \overline{vx}, & \overline{wy}, & l, & l', & l'' \\ \overline{vy}, & \overline{wz}, & \overline{ux}, & u, & u' & u'' \end{pmatrix}$ wo keine zwei Geraden derselben Horizentalzeile und keine derselben Vertikalzeile sich schneiden, wohl aber je zwei ausgewählte.

Mittelst des Doppelsechsers bekommen wir nun, wie schon gesagt, eine leichte Übersicht der 27 Geraden und 45 Ebenen der Basis.

Es seien

$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$ ein Doppelsechser. Die 2 sich schneidenden Geraden, a_1, b_2 gehören zu einem Dreiseit, das wir mit (12) und dessen dritte Seite c_{12} bezeichnen. Diese c_{12} bildet nun auch mit a_2, b_1 ein Dreiseit, das wir mit (21) bezeichnen. Wir bekommen also 15 Gerade c, deren jede nur diejenigen 4 Geraden a und b schneidet, deren Zeiger in dem Zusammengehörigkeitssystem von c enthalten sind. Nun werden alle c, deren Zusammengehörigkeits-Zeiger einen Bestandteil gemein haben, sich nicht schneiden, wohl aber je zwei c, deren Zeiger nichts gemein haben. Wir bekommen demnach noch Dreiseite wie c_{12}, c_{34}, c_{56}, welches wir mit (12, 34, 56) bezeichnen, wo sowohl die Ziffern jedes Paares als auch die drei Paare unter sich permutirt werden dürfen. Wir haben nun 30 Dreiseite wie (12) und 15 wie (12, 34, 56), zusammen 45. Endlich gibt es 10 Triederpaardreier wie (12) (23) (31) + (13) (32) (21), (45) (56) (64) + (46) (65) (54), (14, 25, 36), (15 26, 34), (16, 24, 35) + (14, 26, 35), (16, 25, 34), (15, 24, 36) und 30 wie

(35) (46) (12, 36, 45) + (36) (45) (12, 35, 46),
(51) (62) (16, 25, 34) + (52) (61) (15, 26, 34),
(13) (24) (14, 23, 56) + (14) (23) (13, 24, 56).

Der Doppelsechser veranlasst mich zu bemerken, dass hier ein sehr elementar aussehender Satz zu Tage liegt, den man etwa so aussprechen kann: «Zieht man nach Belieben fünf Gerade a, b, c, d, e, welche eine Gerade F schneiden, so können je vier jener fünf noch durch eine Gerade (ausser F) geschnitten werden, weil überhaupt 4 Gerade nur von zwei Geraden geschnitten werden. Es mögen b, c, d, e noch von der Geraden A geschnitten werden, u. s. f. Man erhält so die fünf Geraden A, B, C, D, E. Nun sind A, B, C, D bereits von e geschnitten, es muss also noch eine zweite Gerade f geben, welche alle 4 schneidet. Diese f wird dann von selbst auch die E schneiden.» Gibt es wohl für diesen Satz einen elementarern und kürzern Beweis als den aus der Theorie der kubischen Flächen geschöpften?

Wenn die auf ein reelles Coordinatensystem bezogene Gleichung einer kubischen Fläche lauter reelle Koeffizienten hat, so ist leicht zu zeigen, dass auch die Fläche selbst reell ist. Man kann aber fragen, wie viele von den 27 Geraden und den 45 Ebenen imaginär sein können. Da die vollständige Erörterung hierüber zu lang würde, so begnüge ich mich, hier nur eine Übersicht der Gattungen zu geben, in welche der keiner besondern Beschränkung unterworfene allgemeine Begriff der kubischen Fläche zerfällt, wenn man die Realität ihrer Geraden zum Einteilungsprinzip macht. Es gibt nur folgende fünf Gattungen:[2])

Zum Schluss will ich noch bemerken, dass der Doppelsechser auch beim *Knoten* einer Fläche dritten Grades eine Rolle spielt; *Knoten* nenne ich nämlich einen solchen Punkt (w, x, y, z) irgend einer algebraischen Fläche f (w, x, y z) $=$ o, für den D f $=$ o erfüllt ist, welches auch die 4 Elemente des Differentialsymbols D sein mögen; ich nenne ihn einen *eigentlichen Knoten*, wenn der durch $D^2 f = o$ dargestellte *quadratische Kegel* (der Knotenkegel) nicht zerfällt. Hat nun eine Fläche 3ten Grades f $=$ o einen solchen eigentlichen Knoten (w, x, y, z), so sind die 6 durch denselben gehenden und durch das System ($D^2 f = o$, $D^3 f = o$) dargestellten Geraden ein Doppelsechser, worin je zwei entsprechende (sich also nicht schneidende) Geraden beider Sechser zusammengefallen sind.

Der dritte Aufsatz «über die doppelt umschriebene Abwickelbare einer algebraischen Fläche überhaupt und insbesondere über

[2]) Dieser Passus fehlt im Manuskript, es sind dies die 5 Fälle, welche Schlaefli 1863 in den Philos. Trans. behandelt.

Flächen 3 ten «Grades» ist deutsch geschrieben; ich weiss nun freilich nicht, ob die deutsche Sprache kein Hindernis der Aufnahme sein wird; es fiel mir aber gewisser Ausdrücke wegen zu schwer, ihn englisch abzufassen. Die Veranlassung dazu gab mir Ihre von Herrn *Steiner*[3]) mir mündlich mitgeteilte Entdeckung der 27 Geraden auf der Fläche 3ten Grades. Ihre betreffende Abhandlung im Cambridge und Dublin Mathematical Journal[4]) konnte ich freilich bis jetzt nicht zur Hand bringen, und so wage ich es einiges von den Resultaten meiner Untersuchung vorzulegen, ohne zu wissen, in wie weit dieselben durch bereits Erschienenes überflüssig gemacht sind.

Wenn jedoch für eine algebraische Fläche der Grad der ihr doppelt umschriebenen Abwickelbaren und die Zahl der dreifach berührenden Ebene noch nicht bestimmt sind, so möchte ich diese Aufgabe Ihrer gefälligen Beachtung empfehlen. Denn wenn diese einmal gelöst sind, so ist für die Theorie der algebraischen Flächen ein wichtiger Schritt geschehen.

Ich habe der Sendung beigelegt für Sie und Herrn *Sylvester*[5]) Exemplare von meiner Abhandlung über die Resultante,[6]) über eine Funktion von 3 Variabeln[7]) und über das Produkt $1\,(1+x)\,(1+2x)\cdots(1+(n-1)x)$;[8]) diese Abhandlung ist französisch geschrieben, weil ich sie zuerst der Pariser Akademie vorgelegt hatte, wo sie nicht aufgenommen ward, und dann erst dem *Crelleschen* Journal übergab.

Ich möchte Sie noch ersuchen bei der Verlagshandlung die Fortsetzung des Quarterly-Journals zu bestellen; es könnte

[3]) *Steiner* war damals noch mit L. Schlaefli innig befreundet.

[4]) Bezieht sich auf «On the triple tangent planes of a surface of the 3 th order.»

[5]) Mit Herrn *James Joseph Sylvester* geb. 3. September 1814 und gest. 15. März 1897 in London als «Savilian», Professor der reinen Geometrie an der Universität Oxford, stand Schlaefli ebenfalls in Beziehungen.

[6]) Ueber die Resultante eines Systems mehrerer algebraischer Gleichungen, ein Beitrag zur Theorie der Elmination. Denkschriften der Wiener Akademie math.-naturw. Klasse IV, 1852. 74 S. Folio.

[7]) Über eine Funktion von drei Winkeln, deren erste Abgeleitete ebenfalls als Winkel anzusehen und durch algebraische Relationen ihres Cosinus zu denen der Unabhängigen bestimmt sind (Crelle, Journal f. reine und angew. Mathematik Bd. 48, 1854 p. 292 - 300).

[8]) Sur les coéfficients du développement du produit $1.(1+x)\,..\,(1+\overline{n-1}.x)$ suivant les puissances ascendantes de x. (Crelle 43, 1852).

durch Vermittlung der Buchhandlung *Dalp* in Bern geschehen, wo ich schon die Anzeige davon gemacht habe.

Die Sendung, von der ich hier sprach, ist am 7. März der Buchhandlung *Dalp* unter der Adresse an die Herren *Parker*. *und Sohn* übergeben worden und wird über Leipzig gehen. Wenn sie etwa gegen die Mitte des April noch nicht in London angelangt sein sollte, so bitte ich um gefällige Anzeige.

Sie werden aus meiner Abhandlung sehen oder gesehen haben, dass ich manches von Ihnen gelernt habe, wenn auch noch nicht genug. Denn ich muss es gestehen, ich bin mit den Erscheinungen im Gebiet der Mathematik nicht ganz auf dem Laufenden.

Vom Cambridge Mathematical Journal bekam ich einmal einige Bände aus Gefälligkeit geliehen und schöpfte daraus unter anderm Ihre Behandlungsweise der elliptischen Funktionen mittelst unendlicher Doppelprodukte.[9] Da es mir schien, dass von diesem Gesichtspunkt aus die Eigenschaften der elliptischen Funktion sich am ungezwungensten darstellen lassen, so sandte ich an *Grunerts* Archiv eine freie Bearbeitung Ihrer Abhandlung ein, was Sie mir hoffentlich verzeihen werden, da es mit Nennung Ihres Namens geschehen ist.[10] Was aber hinsichtlich der Theorie der Elimination im erwähnten englischen Journal erschienen ist, ist mir immer noch unbekannt.

Cayley an Schläfli.

Sir

I have to thank you for the letter you were good enough to send me — it would have given me very great pleasure to have inserted in the Quarterly Mathematical Journal the memoirs you speak of, but J am sorry to say that no arrangements are at present made for publishing the second volume and is very

---

[9]) On elliptic fonctions. (1850.)

[10]) Über die Begründung der Theorie der ellipt. Funktionen durch die Betrachtung unendlicher Doppelprodukte. Grunerts Archiv XIV, p. 393 bis 451. 1850.

uncertain whether the Journal will be continued. I should have been particularly interested in the memoir upon the circumscribed developables[11]) and in your results relating to the triple tangent planes — the memoir must I think be more closely connected with the researches of M^r *Salmon*[12]) than with anything in the paper of mine to which you refer — besides his memoirs in the Cambridge and Dublin and Quarterly Mathematical Journal, J believe there will be shortly published in the Transactions of the Royal Jrish academy an important memoir by him upon the theory of Reciprocal surfaces.

I hope soon to have the pleasure of sending you my second memoir upon Quantics — I have also written and presented to the Royal society a third memoir upon the same subject but it will be some time before that is published, it contains the system of the Covariants and Contravariants of a ternary cubic, and gives I think the materials for a complete discussion of the theory of curves of the third order. I find that besides *Steiners* curves P_0, Q_0, R_0 (Crelle t XLVII p. 4) which for a curve of the third order reduce themselves to a single curve P U of the third class, there is another curve Q U of the third class of which I have not yet discovered the geometrical representation; I hope to write something upon this for *Crelles* Journal. I shall not fail to enquire after the memoirs you have kindly send me, if I do not receive them in good time; I have however the memoir upon Resultants,[13]) which I read with the greatest interest. I was particularly delighted with the way in which you establish the degree in which a certain factor enters into the Resultant I shall be at all times most happy to hear from you upon mathematical subjects. I have the honor to be, Sir

your obedient servant
A. Cayley.

2 Stone Buildings
London, 19. Mar. 1856.

---

[11]) Diese Abhandlung scheint nie gedruckt worden zu sein.

[12]) Mit *George Salmon* ist L. Schlaefli meines Wissens nicht in direkte Beziehung getreten.

[13]) Über die Resultante eines Systems mehrerer algebraischer Gleichungen, ein Beitrag z. Theorie der Elimination. (IV. Band der Denkschriften der math.-naturwiss. Klasse der Wiener Akademie 1852.) 74 S. in Folio.

Konzept eines Briefes von Schläfli an Cayley. (Mitte 1856).

Ich danke Ihnen für das wertvolle Geschenk, das Sie mir mit Ihrer Abhandlung upon Quantics[14]) und mit dem ersten Hefte des Q. J. gemacht haben. Auf den Schluss des Vorworts zu diesem J. hin habe ich es gewagt, Beiträge zu demselben zu liefern, wenn man sie für geeignet halten wird, darin aufgenommen zu werden. Da ich nicht wusste, ob deutsche Artikel zugelassen werden, so habe ich zwei Aufsätze in englischer Sprache zu schreiben versucht (das Französische ist mir nämlich auch nicht geläufig). Ich hoffe, darin wohl soviel erreicht zu haben, dass der Inhalt verstanden werden kann. Wenn es möglich wäre, so wünschte ich, dass jemand die Güte hätte, die nötigsten Korrekturen daran auszuführen. Die englisch geschriebenen Aufsätze sind folgende: *1. Ueber die von Laplace gegebene Verallgemeinerung des Lagrange'schen Satzes.*[15])

Im März 1848 teilte ich der hiesigen Naturforschenden Gesellschaft[16]) die Bestimmung von $\frac{\delta^{m+n+p} F(x,y,z)}{\delta^m \alpha\, \delta^n \beta\, \delta^p \gamma}$ mit, wenn $x = t + \alpha \varphi(x, y, z)$, $y = u + \beta \chi$, $z = v + \gamma \psi$, die gegebenen Functionen, F, φ, χ, ψ explicite nur x, y, z enthalten und t, u, v, α, β, γ, als die unabhängigen Variabeln betrachtet werden. Ich hielt damals den Beweis des Lagrange'schen Satzes für eine beliebige Zahl von Gleichungen, wenn α, β, γ *nicht* verschwinden, noch für sehr schwierig und habe nun erst vor Kurzem erkannt, dass dieses keineswegs der Fall ist. Nun ist der Gegenstand freilich als ein sehr besonderer Fall in dem umfassendsten Lehrsatz enthalten, den Hr. *Sylvester* in seiner Abhandlung «On the change of systems of independent variables» mitgeteilt hat. Aber bei einem allgemeinen Satze von grosser comb. Verwicklung mag es bisweilen noch leichter sein, einen

---

[14]) Proceedings of the Royal Society VII 1856.

[15]) On a generalisation given by *Laplace* of *Lagrange's* Theorem. By Dr. Schlaefli. Bern Januar 1856.

Quarterly Journal of pure and applied mathematics. Vol. II, p. 24—31.

[16]) Ueber eine Verallgemeinerung des Lagrange'schen Lehrsatzes für die noch der Beweis gefordert wird (4. März 1848). Mitt. der bern. Naturf. Gesellschaft 1848, S. 97—109.

darin begriffenen besonderen Fall direct zu beweisen, als die einfachste spezielle Form aus jenem allgem. Satz herzuleiten. Aus diesem Grunde mag mein Aufsatz immer noch einiges Interesse darbieten. 2. *Ueber das Integral*[17]) $\int^n dx\, dy \cdots (x^2 + y^2 + \cdots < 1, p_1 > o, \cdots p_n > o$, wo $p = a x + by + \cdots$) Der Inhalt dieses Aufsatzes ohne Beweise ist schon im «Liouville Journal» XX. pag.[18]) 359 erschienen. Ich erfuhr dieses aber erst, als ich bereits nicht mehr an die Aufnahme des Artikels geglaubt hatte, da ich nach jahrelangem Warten von Hrn. *Liouville* nie eine Antwort, die mir nur den Empfang meines Papiers angezeigt hätte, erhielt, und als ich daher schon weit in der Bearbeitung desselben Gegenstandes für das «Quarterly Journal», dem ich den Artikel zu schicken mich aus dem angeführten Grunde entschlossen hatte, vorgerückt war. Ich mochte dann die Arbeit nicht unvollendet beiseite legen, sondern beharrte bei meinem Entschluss, sie dem Q. J. zur Aufnahme anzubieten. In dieser Ueberarbeitung sind nun auch die Beweise mitgeteilt, soweit dieses ohne zu grosse Weitläufigkeit geschehen konnte, sodass man jetzt, wie ich hoffe, den Aufsatz von Anfang bis zu Ende ohne Anstoss fortlesen kann. Da er ziemlich lang ist (im Mscr. 66 S.), so muss er wohl in Abteilungen erscheinen. Ich wünsche nun, dass wenigstens die 5 ersten §§ zusammen möchten abgedruckt werden, damit der Leser schon im ersten Teil den Hauptsatz in § 5, von dem alles Folgende nur weitere Entwicklungen sind, vor Augen bekäme. Bei der Reduktion der periodischen Orthoschema kommen kombinitorische Betrachtungen vor, die vielleicht unverständlich sind, weil mir die rechten englischen Ausdrücke nicht zu Gebote standen. Das

---

[17]) On the Multiple Integral $\int^n dx\, dy \ldots$, whose limits are $p_1 = a_1 x + b_1 y + \ldots + h_1 z > o$, $p_2 > o \ldots p_n > o$ and $x^2 + y^2 + \ldots < 1$. By Dr. Schlaefli. Quarterl. Journal, Vol. II pag. 269—301, Vol. III pag. 54—68 and pag. 97—108.

[18]) Réduction d'une intégrale multiple qui comprend l'arc de circle et l'arc du triangle sphérique comme des cas particuliers.

Journal de Mathématiques pures et appliquées par *J. Liouville*. Tome XX, p. 359—394. 35 S. 4°.

Wort *index* habe ich so gebraucht, wie wir es im Deutschen auch gebrauchen oder durch *Zeiger* ersetzen.

Erst seither habe ich gemerkt, dass die Engländer damit den *Exponent* einer Potenz bezeichnen und für index *suffix* sagen; nur weiss ich dann nicht, wie man sagen muss, wenn der Zeiger *über* dem Buchstaben angebracht wird. Um auf den Gegenstand selbst zurückzukommen, so bin ich überzeugt, dass gar manches, was damit verwandt ist, bereits geleistet ist; doch vermag ich nicht, das hieher Gehörige zu übersehen. Ich erinnere mich nur, dass *Catalan*[19]) ähnliche Integrale behandelt hat. Wenn es möglich wäre, so wünschte ich, dass jemand diesen Mangel an Citaten ergänzte.

Schläfli an J. W. Parker & Son, West Strand.

Sie erhalten hier drei Aufsätze, die Sie ins Quarterly Journal einrücken mögen, wenn Sie sie dazu passend finden. Da ich nicht wusste, ob auch deutschen Artikeln die Aufnahme in Ihr Journal gestattet sei, so habe ich zwei derselben versucht in englischer Sprache niederzuschreiben. Ich hoffe darin wenigstens soviel erreicht zu haben, dass der Inhalt verstanden werden kann. Vielleicht hat jemand die Güte die nötigsten Correctionen daran auszuführen. Einen habe ich deutsch geschrieben, um zu versuchen, ob Sie ihn auch so aufnehmen können.[20]) Es betrifft

---

[19]) *Catalan, Eugène Charles*, geb. 30. V. 1814 in Brügge, Belgien. 1833 Schüler der « Ecole Polyt.» in Paris, 1835 Prof. der Mathematik am Collège in Chalons s./M., 1838 Repétiteur Ecole Polyt. in Paris, 1846 Prof. der höh. Mathematik am « Collège Charlemagne », 1849 am «Lycée St. Louis», 1852 abgesetzt wegen Eidesverweigerung, 1865 Prof. d. Analyse an der Universität Lüttich, gest. 14. Febr. 1894 in Lüttich.

Die von Schlaefli gemeinten Abhandlungen sind:
«Théorie sur la réduction d'une intégrale multiple.»
Journal de Liouville VI, 1841 und
«Sur une formule relative aux intégrales multiples» idem VIII. 1843.

[20]) Es betrifft die Abhandlung, welche Cayley ins Englische übertragen hat:

vorzüglich die Flächen, worüber, nach dem was mir Prof. *Steiner* mitgeteilt hat im Cambridge and Dublin M. J. eine Abhandlung von Hrn. *Cayley*[21]) erschienen ist, in der namentlich die Existenz der 27 Geraden bewiesen wird und die ich bis jetzt mir nicht verschaffen konnte. Diese überraschende Nachricht bewog mich, an dem Gegenstand zu arbeiten, und so wage ich einiges von meinen Resultaten hier vorzulegen, ohne zu wissen, ob vielleicht mein Aufsatz durch das, was bereits über denselben Gegenstand erschienen ist, ganz überflüssig gemacht wird.

Was den Aufsatz über die Verallgemeinerung des Lagrange'schen Satzes betrifft, so muss zwar das hier Gesagte als ein sehr besonderer Fall in dem umfassendsten Lehrsatz enthalten sein, den *H. Sylvester* in seiner Abhandlung « On the change of systems of independent variables » mitgeteilt hat. Aber bei einem allgemeinen Satze von grosser combinatorischer Verwicklung mag es bisweilen noch leichter sein, einen darin begriffenen besondern Fall direct zu beweisen, als seine einfachste spezielle Form aus jenem allgem. Satze herzuleiten. Aus diesem Grunde mag mein Aufsatz, dessen Grundzüge schon lange da waren, bevor ich von der Behandlung Hrn. *Sylvesters* Kenntnis nehmen konnte, immer noch einiges Interresse darbieten. Was den dritten Aufsatz über das sphärische Intregal von n Dimensionen betrifft, so ist der Inhalt desselben ohne Beweise schon im Liouv. J. XX. p. 359 erschienen. Da ich aber nach jahrelangem Warten von Herrn *Liouville* nie eine Antwort, die mir nur den Empfang meines Papiers angezeigt hätte, erhielt und ich daher nicht mehr an eine Aufnahme des Artikels glaubte, so entschloss ich mich zu einer solchen Ueberarbeitung desselben, wo die Beweise überall mitgeteilt sind, so weit dieses ohne zu grosse Weitläufigkeit geschehen konnte, so dass man jetzt, wie ich hoffe, den Aufsatz von Anfang bis zu Ende ohne Anstoss fortlesen kann. Als mir nun das Novemberheft 1855 des Liouv. J., worin der Anfang meines Aufsatzes

---

An Attempt to determin the Twenty-seven Lines upon a surface of the Third Order and divide such surfaces into species in reference to the Reality of the Lines upon the Surfaces. By Dr. Schlaefli. Translated by A. Cayley. Quarterly Journal Vol. II, p. 55—65 and p. 110—120.

[21]) On the triple tangent planes of a surface of the third order Cambridge and Dublin Mathematical Journal Vol. IV 1849.

stand, zu Gesicht kam, mochte ich die schon weit vorgerückte Arbeit nicht unvollendet auf die Seite legen, sondern beharrte bei meinem Entschluss, sie Ihnen zur Aufnahme in Ihr Journal anzubieten. Da sie ziemlich lang ist (im Mscr. 66 Seiten), so muss sie wahrscheinlich in Abteilungen erscheinen; ich wünsche nun, dass Sie wenigstens die 5 ersten §§ zusammen möchten abdrucken lassen, damit der Leser schon im ersten Teil den Hauptsatz in § 5, von dem alles Folgende nur weitere Entwicklungen sind, vor Augen bekäme.

Ich danke Ihnen vielmal für das wertvolle Geschenk, das Sie mir mit dem ersten Hefte des Quarterly Journals und mit der Abhandlung «upon Quantics» von Hrn. *Cayley* gemacht haben und indem ich die Fortsetzung des Quarterly Journals bestelle, bitte ich Sie mir dieselben entweder durch die Buchhandlung *Dalp* in Bern, oder, wenn die Transportkosten ungefähr gleich oder geringer sind, direkt zukommen zu lassen und im letzten Falle die Art und den Betrag der Bezahlung anzuzeigen.

Cayley an Schläfli.

Sir,

I ought to have written some time ago to thank you for the printed memoirs and the three memoirs on spherical integral, on Laplaces theorem, and on the 27 lines on a surface of the 3^d order which you were good enough to send for the Mathematical Journal. It is still uncertain whether the Journal will ultimately be continued, but there is to be at any rate another number and we are proposing to print in it the second or third of the three memoirs. It is the memoir on the 27 lines & not that on Laplaces theorem which is in german; we have printed one or two short notes in that language but should hardly like to do so with a memoir of some length, and I hope I have your permission to make a translation of the paper for the Journal. The remaining papers I shall be glad if you will allow me to keep for the present until something further is arranged. The last number published is No. IV — there is no subcription and I believe the Journal is only to be procured on the Continent like other English books, through a bookseller, but if you have any difficulty in doing this at Bern, I dare say that I could manage to have the numbers sent to you through my own booksellers here Mess[rs] *Williams & Norgate.* I have been studying with renewed interest your memoir on elimination: permit me to express the pleasure it gave me to see the enormuos extension you have made in the method of symmetric functions. The theorem in your memoir that if $U = o$, $V = o$ &e are any equations and $\varphi = o$ their resultant then that δU, δV &c are respectively proportional to $\delta\varphi$ was in some measure new to me, I had always imagined (what your proof shews was an unnecessary restriction) that the theorem was only true when U, V &c were absolutely general functions. It is however assumed in your form of the theorem that the Coefficients of each of the functions U, V · · are independent of the Coefficients of the other functions; the most general form of the theorem seems to be as follows, viz. R, r &c being quantities which may be assumed at pleasure (but no generality would be lost by giving them any particular values) then

$$\begin{vmatrix} R, & r & \cdots & \\ \frac{dU}{dx} & \frac{dU}{dy} & \cdots & \delta U \\ \frac{dV}{dx} & \frac{dV}{dy} & \cdots & \delta V \end{vmatrix}$$

which of course represents a function of the form

$L\delta U + M\delta V +$ &c will be identically equal to $K\delta\varphi$ — a theorem in which any relations whatever may exist between the coefficients of the functions U, V &c a very slight alteration of your proof will shew the truth of the theorem. I hope soon have the pleasure of sending you a continuation of my memoir on Quantics. I have the honor to be, Sir, your obedient servant

A. Cayley.

2 Stone Buildings
Lincolns Inn London
22. sep. 1856.

Konzept Schläfli an Cayley.

Ich habe soeben einige Zeit gefunden, meine in Ihrem Journal erschienenen Aufsätze durchzusehen und möchte folgende Druckfehler anzeigen.

pag. 26, l. 6 statt «are not be permuted» lies «are not to be permuted».

pag. 55, l. 28 statt «which pass through an arbitrary point» lies «which pass through an arbitrary line».

pag. 111, l. 6 von unten; statt $\begin{vmatrix} Du, & nDp \\ \triangle x, & x\triangle p \end{vmatrix}$ lies $\begin{vmatrix} DU, & uDp \\ \triangle X, & x\triangle p \end{vmatrix}$

pag. 114 letzte Zeile ist zu lesen:

$$p = \alpha r + \beta s + \gamma t = 0,\ p' = \alpha r' + \beta s + \gamma t' = 0$$
$$p'' = \alpha r'' + \beta s'' + \gamma t'' = 0$$

pag. 115, l. 8 statt «and three vertical lines» lies «and four vertical lines.»

Um Raum zu sparen wollte ich vermeiden, die 36 Coefficienten der 9 Polynome r, etc. wirklich zu schreiben. Die rechteckige Matrix stellt die Bedingungen dafür dar, dass eines der Polynome p, p', p'', von den zwei übrigen abhange.

p. 116 l. 11 statt α'' lies x''.

p. 119 l. 10 von unten. Ich habe einigen Zweifel an der Richtig keit der Conjunction «the more so that»; man erwartet eine causale Conjunction.

Ein Beispiel möge zeigen, was ich unter den aquivalenten Formen von Triederpaaren verstehe. Ich will mir eine Fläche 3. Grades denken, wo die Zahl der reellen Geraden ein Minimum ist. Da die Anzahl aller Geraden ungerade ist, so muss es wenigstens eine reelle Gerade geben; diese sei nach meiner Bezeichnung $\overline{u\ x}$, wenn $uvw + xyz = 0$ die Gleichung der Fläche ist. Von den fünf durch $\overline{u\ x}$ gehenden Dreiecksebenen ist wenigstens eine reell; die übrigen mögen paarweise conjugiert sein, und $\overline{u,\ x}$ sei ein solches Paar; dann darf ich auch die Polynome u, x geradezu als conjugiert annehmen. Die Erörterung dieses Falls führt zu dem notwendigen Schlusse, dass die Gleichung der Fläche die Form

$(p+q)(t+p')(t+q')+(p'+q')(t-p)(t-q)=o$ haben müsse, wo t ein reelles Polynom, und p, p'; q, q' Paare von conjugierten Polynomen bedeuten. Setzt man nun $u = p+q$, $v = -t-p'$, $w = -t-q'$, $x = p'+q'$, $y = t-p$, $z = t-q$, so besteht schon eine identische Relation

$$u+v+w+x+y+z=o,$$

welche der Bedingung $abc = def$ genügt, weil $a = 1, b = 1$, etc. (Die Auffindung der zwei andern indentischen Relationen hängt daher nur noch von einer quadratischen Gleichung ab, deren Beschaffenheit über die Species der Fläche entscheiden wird). Aus dieser Relation fliesst nun unter anderm die Transformation $(u+z)v(w+z)+(v+x)(v+y)z=$ $(q+q')(t+p)(t+p')+(p+p')(t+q)(t+q')$ durch, wir haben nun ein Triederpaar, wo u, x reell und v, w; y, z zwei Paare conjugierter Polynome sind; mit andern Worten die Triederpaarform 8^0 ist mit 4^0 äquivalent; daher umfassen beide Formen dieselben Arten der Flächen 3. Grades. Es ist auch klar, dass ausser den anfänglichen reellen Graden $(u=o, x=o)$ auch noch die Geraden $(w+z=o, v+y=o, u+x=o)$ $(u+x=o, v+z=o, w+p=o)$ reell sind.

Wenn hingegen durch die anfängliche reelle Grade $\overline{u\ x}$ drei oder fünf reelle Ebenen gehen, so dürfen wir u, x als reell annehmen. Dann sind entweder v, w, y, z alle reell, oder es sind v, w reell, y, z conjugiert; oder es sind $v\ w$ conjugiert, und y, z auch; oder endlich, wenn diese drei Fälle nicht stattfinden, so muss die Gleichung $uvw+xyz=o$ notwendig eine der drei folgenden Formen haben:

$$u(r^2-(t+ix)^2)+x(s^2-(t-is)^2)=o,$$
$$u(r^2-(x+it)^2)+x(s^2-(t-is)^2)=o,$$
$$u(r^2-(x+it)^2)+x(s^2-(u-it)^2)=o,$$ wo $i^2 = -1$, und r, s, t reelle lineare Polynome bedeuten. Diesen 6 Fällen entsprechen die Triederpaarformen

$1^0, 3^0, 4^0, 5^0, 6^0, 7^0$. Setzt man in der letzten Form 7^0:

$$v=-\frac{1}{2}(r+x+it),\ w=\frac{1}{2}(r-x-it);$$

$y=-\frac{1}{2}(s+u-it)$, $z=\frac{1}{2}(s-u+it)$, so folgt als erste identische Relation, welche der Bedingung $abc = def$ genügt, $u + v + w + x + y + z = o$. Die Transformation

$$u(v + y)(w + y) + (u + x)\,y\,(u + z) = o$$

gibt die Triederpaarform 3^0:

$$u\,(r^2 - (s + u + x)^2) + (u + x)\,((s + u)^2 + t^2) = o;$$

also in der Ebene $u + x = o$ ein reelles Dreiseit. Aus dieser Erörterung folgt, dass die allgemeine reelle Fläche 3ten Grades mindestens drei reelle Grade hat; ein Satz, der wahrscheinlich auch durch rein geometrische Betrachtungen zu finden ist und den ich hier beiläufig zu beweisen suchte, weil mir beim Durchgehen der Fehler ein momentaner Zweifel an der Vollständigkeit der gegebenen Aufzählung der Arten der allgem. Flächen 3ten Grades aufstieg.

Mit den zwei ausgeführten Beispielen denke ich deutlich genug gemacht zu haben, was ich unter äquivalenten Triederpaarformen verstehe, und dass z. B. die vollständige Erörterung der Form 3^0 diejenige der Form 7^0 überflüssig macht.

Wenn Sie es für passend halten, den Nachweis, dass es nur fünf Arten der allgem. Fläche 3ten Grades gibt (im gleichen Sinne, wie man etwa sagen könnte, dass es nur zwei Arten der allgemeinen Fläche 2ten Grades gebe) in Ihr Journal aufzunehmen so will ich diese Erörterung so bündig als möglich auszuführen suchen, in englischer Sprache, wenn Sie das, was ich bisher darin geschrieben habe, erträglich genug finden, worüber ich Ihr unverholenes Urteil zu hören wünsche.

Haben Sie wohl meinen letzten Brief vom Nov. oder Dez. 1857 erhalten? Ich klagte Ihnen darin, dass durch eine hiesige Buchhandlung mich das Quarterly Journal um 40 proc. teurer als die 5 Schilling per Heft, was wohl $6^1/_4$ Franken betrüge, zu stehen kömmt, und ersuchte Sie, mir das Journal vom 7ten Heft an inklusive unter Kreuzband direkt durch die Post allenfalls mit Nachnahme zusenden zu lassen. 6. Jan. 1858.

Schläfli an Cayley.

Ihr wertes Schreiben vom 16. April hat mich sehr beschämt. Ich will versuchen, mich zu entschuldigen. Der deutsche Buchhandel ist so eingerichtet, dass die hiesigen Buchhändler ungefähr zum Ladenpreis verkaufen können, indem sie den preussischen Taler in 4 Franken verwandeln. Der Einkaufspreis steht viel niedriger. Der Gewinn, den sie machen, entspricht billigerweise der Mühe, die sie über sich nehmen, indem sie ihren Kunden Bücher, die ihnen aus Deutschland zu allfälligem Absatz zugesandt werden, zur Einsicht ins Haus liefern, und endlich die Waren, die sie nicht abgesetzt haben, die sogenannten *Krebse*, den betreffenden Verlegern zurücksenden. Ich glaube, diese Zirkulation der Ware existiere nur in Deutschland und der Schweiz. Soll der hiesige Buchhändler ein einzelnes englisches Buch kommen lassen, so geschieht es vielleicht nicht direkt, kurz, er kann es nur zum Ladenpreis einkaufen, den der Käufer schon aus der Ankündigung kennt, und schlägt ihm nun die Hälfte oder mehr darauf, um seinen gewöhnlichen Gewinn zu haben. Deshalb hielt ich es für vorteilhafter, englische Bücher direkt aus England zu beziehen, hatte aber den Wahn, ein englischer Buchhändler würde mir keinen Kredit geben, überhaupt eine Bestellung gar nicht beantworten. Das war der Grund, warum ich mich wegen einer solchen Geschäftssache an Sie gewendet habe, statt an einen englischen Buchhändler.

Hrn. *Salmons* Werk habe ich erhalten, leider ohne Rechnung und von ihm selbst überschrieben. Es bleibt mir also wohl nichts anderes übrig, als Sie zu ersuchen, ihm bei Gelegenheit meinen Dank für die wertvolle Gabe auszusprechen und mir dadurch die Wiederholung peinlicher Entschuldigungen zu ersparen. Wer einen Zweig der Mathematik so umfassend bearbeitet, wie Dr. *Salmon*,[22]) hat sich wirklich ein grosses Verdienst um die Leser erworben. Wir leiden Mangel an Büchern, die mit der rechten Präzision einen auf den gegenwärtigen Stand der Wissenschaft stellen. Was soll ich nun gar noch dazu sagen, dass auch Sie mir *Hamiltons*[23]) Werk über Quaternionen (das ich während des Schreibens gestern erhalten habe) als freundliches Erinnerungszeichen schenken. Sie haben mich ja

---

[22]) Treatise of conic sections 1847.

[23]) *Hamilton* Sir William Rowan geb. 1805, 4. VIII in Dublin, gestorben 2. Sept. 1865 in Dunsink, «Andrews» Professor der Astronomie an der Universität Dublin. «Lectures ou quaternions», 728 p. 8°, Dublin 1853.

ohnehin sehr stark verbunden. Ich sage Ihnen meinen herzlichen Dank dafür, weiss aber nicht, wie ich es Ihnen vergelten soll. Es wird mich freuen, Ihre Abhandlung über Rotation eines festen Körpers[24]) zu lesen; es kommt mir ganz unerwartet, dass man das Argument der elliptischen Funktionen hier der sinnlichen Anschauung nahe bringen kann. Das Wort *free* wird äussere Kräfte negieren, sonst würden Sie es nicht *elementary Mathematic* nennen. Rührend ist es bei *Euler* zu lesen, welche vergeblichen Anstrengungen er gemacht hat, in dieser Aufgabe die Variabeln zu trennen; er klagt z. B. über die Schwäche seiner Augen, die ihm nicht gestatte, weitläufige Rechnungen zu machen.

Ich habe in letzter Zeit *Aronholds*[25]) Abhandlung über *Invariantentheorie* in die Hände genommen, und ich muss gestehen, es ist mir nicht möglich, ihr Fundament zu begreifen. Es sei $F = (a, \cdots)(t, t, \cdots)^p$ mit n Variabeln, und geht durch die Subst $\begin{pmatrix} \lambda \cdot \mu, \cdots \\ \lambda' \cdot \mu' \cdots\cdots \end{pmatrix}$ in $F' = (a', \cdots)(x, y, \cdots)$ über. Aus den $\binom{n+p-1}{p}$ Relationen, welche $a', \cdots$ als homogene lineare Funktionen sämtlicher a darstellen, wähle man nach Belieben $n^2 + 1$ heraus und eliminiere die Substitutionselemente. Der Resultant kann nicht mit Null identisch sein, sondern existiert in der Form $V = AA' + BB' + \cdots$, und es ist möglich zu bewirken, dass $A, B, \cdots$ durch keine linearen Relationen verbunden sind ($A, B, \cdots$ enthalten nur $a, \cdots$; $A', B', \cdots$ nur $a^1 \cdots$); aber dann folgt noch nicht, dass nicht $A', B', \cdots$ in gegenseitiger Abhängigkeit sind. Nun ist es rein *unmöglich*, dass $A', B', \cdots$ Invarianten seien, weil sie nicht alle, sondern nur $n^2 + 1$ Elemente von F' enthalten. Auch geht bei *Aronhold* im Beweise eine Täuschung vor. Es seien $D_{1,1} = \lambda \dfrac{\delta}{\delta \lambda} + \lambda' \dfrac{\delta}{\delta' \lambda} + \cdots,$

[24]) On the rotation of a solid body round a fixed point. Cambridge and Dublin Mathematical Journal I. 1846. Rotation of a solid Body. Astr. Soc. Mem. 35 S. t 29. 1861.

[25]) *Aronhold*, Siegfried Heinrich, geb. 16. Juli 1849 in Angerburg, Ostpreussen, gestorben 13. März 1864 in Berlin, Ehrendoktor der Königsberger Universität, Professor der Mathematik an der Gewerbeakademie (jetzt techn. Hochschule) in Berlin. «Fundamentale Begründung der Invariantentheorie, 64 p. Crelle 1862.»

$D_{1,2} = n\frac{\delta}{\delta\lambda} + n'\frac{\delta}{\delta\lambda'} + \cdots$, wenn es nötig ist, ausgedrückt durch $\alpha', \cdots$ die bekannten Symbole. Dann ist zwar

$D_{1,1}\left(\frac{V}{A'}\right) = 0$ identisch richtig in Bezug auf $\alpha', \cdots$, weil das Objekt eine homogene Funktion nullten Grades ist;

aber $D_{1,2}\left(\frac{V}{V'}\right) = 0$ wird nur wahr, wenn man $\alpha', \cdots$ in Funktionen der Substitutionselemente einsetzt. Sonst ist es ganz sicher, dass wenigstens nicht alle mit zwei verschiedenen Zeigern identisch richtig sein können, weil die Operation neue Elemente a' hineinbringt, die vorher nicht da waren. Wenn sie aber nicht identisch richtig sind, so kann man keine partiellen Differentialgleichungen daraus machen.

Ich habe wirklich schon gedacht, ich sollte es suchen, möglich zu machen, einmal nach England zu kommen; es ist für mich aber schwierig, ich mag daher nichts versprechen. Wir haben soeben Integralerneuerung der Volksrepräsentation gehabt; sie ist dubios ausgefallen. Im Juni kommt sie zusammen, um die Regierung zu wählen. Ob ein Personenwechsel eintritt, und ob er mir Gehaltsverbesserung bringt, ist den Göttern bekannt. Da gewöhnlich niemand Regierungsrat sein will, ist man froh, diejenigen zu behalten, die schon da sind und die Fähigkeiten zu einem lukrativeren Berufe nicht haben.

Es reut mich, dass ich früher die falsche Vorstellung hatte, ich bekäme bei einem englischen Buchhändler keinen Kredit und mich deswegen in Geschäftssachen an Freunde gewandt habe, deren Leben der Wissenschaft geweiht ist. Als ich nun hier von jemand, dem die englischen Verhältnisse bekannt sind, vernahm, dass wegen nicht grösserer Beträge ein englischer Buchhändler sich nicht scheuen würde, einem etwas zuzusenden, glaubte ich jüngst wirklich einen begangenen Fehler zu verbessern, wenn ich direkt bei *Parker* auf das Journal abonnierte. Das 28ste Heft habe ich vor Ihrem Briefe erhalten, wie Sie richtig voraussetzen. Da ich kein englisches Geld schicken kann, so habe ich einen Bankier gefragt, ob ich einen Wechsel schicken könnte, und bekam zur Antwort, dass er für einen so kleinen

Betrag mir keinen Wechsel geben könne, dass die Sache viel leichter sei, wenn ein Wechsel auf mich bezogen werde. Ich habe indes eine andere weit bequemere Gelegenheit, die Schuld auszugleichen. Herr Dr. *Sprenger*, Prof. der orient. Sprachen an hiesiger Universität, bezieht halbjährlich eine englische Pension von *Norgate & Cie.*; ich kann ihm nächsten Herbst die 44 sh. für das verflossene und laufende Jahr bezahlen, und *Norgate* zieht es von der Pension ab. Der Frühlingstermin war schon vorbei, als ich diese Gelegenheit von Hrn. *Sprenger* erfuhr; aber in Zukunft will ich regelmässig an ihn bezahlen. Ich sage Ihnen meinen herzlichen Dank für die fünf wertvollen Abhandlungen, die ich vor kurzem von Ihnen erhalten habe. Die «on the sextactic points»[26]) ist ein staunenswertes Meisterstück von analytischer Kunst.

Ihre Mitteilung über die Korrespondenz von Punkten einer algebraischen Kurve vermag ich nicht ganz zu verstehen, da ich den *Chasles*schen Satz über Korrespondenz von Punkten einer Geraden nicht kenne. Den Ausdruck «unicursal curve» zwar verstehe ich, da ich diesen Frühling endlich einmal *Riemanns* Arbeiten in Crelle 54 gelesen habe, und nun völlig begreife, dass

$$\tfrac{1}{2}(m-1)(m-2)$$

das Maximum von Doppelpunkten ist, das eine Kurve mten Grades haben kann ohne zu zerfallen. Früher wusste ich nur, dass, wenn sie in zwei Kurven zerfällt, deren jede dieses fragliche Maximum von Doppelpunkten hat, sie dann just einen Doppelpunkt mehr hat als ihr fragliches Maximum beträgt. Es bleibt nur noch rätselhaft, wie die drei ganzen Funktionen mten Grades einer Hilfsvariabeln, welche die Koordinaten darstellen, sich gestalten, wenn die Kurve nahe daran ist zu zerfallen; meine Versuche führten mich nur auf den Fall, wo einer der schon vorhandenen Doppelpunkte zum Rückkehrpunkt wird. — Bei *Riemann* machte mir seine «analysis situs» am meisten zu schaffen. Er spricht über die Arten des Zusammenhangs einer geschlossenen Fläche so ganz im allgemeinen, dass man immer besorgt ist, eine zu spezielle Vorstellung von der Sache zu haben. Was er zur Darstellung der Lösungen der Gleichung

$$(x,\ 1)^m\ (y,\ 1)^n = o \text{ (mit r Doppelpunkten)}$$

[26]) Sextactic points of a plane curve London, Phil. Transactions, 33 S., t. 155, 1865.

braucht, (um die Werte von x zu placieren) ist eine n fach umlaufende Kugelfläche, wo die Blätter ein wenig getrennt sind; eine solche ist ohne Verzweigungspunkte und Uebergangslinien, die diese paarweise verbinden, nicht möglich, — ein überschlagenes Ikosaeder ist ein Beispiel einer 7blättrigen geschlossenen Fläche, wo je zwei aufeinanderfolgende Blätter durch zwei Verzweigungspunkte verknüpft sind, (daher nur 2) mit einfachem Zusammenhang. — Durch passende Ziehung je der letzten Uebergangslinie kann man die Sache so einrichten, dass das erste Blatt nur mit dem zweiten durch 2 λ_1 Verzweigungspunkten verknüpft ist, das zweite nur mit dem dritten durch 2 λ_2 Punkte, $\cdots$ das vorletzte nur mit dem letzten durch 2 λ_{n-1} Punkte. Durch Deformation des ersten und zweiten Blattes kann man beide wie ein Blatt gestalten, an welchem keine Durchdringung mehr stattfindet, dafür aber $\lambda_1 - 1$ aufgesetzte röhrenartige Henkel sich befinden, mit diesen deformierten und dem dritten Blatt ebenso, und so fort, und hat endlich die geschlossene sich nirgends durchdringende Oberfläche eines Körpers, der von $p = \Sigma (\lambda - 1)$ Löchern durchbohrt ist.[27]) Ich glaube nun, es gebe keine allgemeinere Vorstellung von verschiedenen Arten des Zusammenhangs einer geschlossenen Fläche als die, welche ein physischer mehrfach durchbohrter Körper bietet. Jetzt ist es für die sinnliche Anschauung ganz leicht einzusehen, dass 2p Schnitte nötig sind, um die übrigen Zusammenhangsarten ausser der natürlichen zu zerstören. — Diese *Riemann*'schen Vorstellungen sind nach meinem Dafürhalten echte *Geometrie der Lage*, oder eigentlich der Kontinuität; manche nennen die perspectivische Geometrie so und unterscheiden sie von der quantitativen Geometrie, die ich eher orthogonale Geometrie nennen möchte; denn Gerade und Ebene sind doch sicher quantitativ bedingt.

---

[27]) Man vergleiche J. H. Graf, Beiträge zur Theorie der Riemann'schen Fläche. Diss. Bern 1878.

Konzept eines Briefes von Schläfli an Cayley.[28]) (zwischen 1857—62).

Sie werden sich noch erinnern, dass Sie das letzte Mal, da ich Sie gesehen habe, mich zwar einluden, Ihnen über mathematische Gegenstände zu schreiben, aber zugleich bemerkten, dass Sie nicht eben fleissig in der Korrespondenz seien. Das Gleiche muss ich von mir auch sagen; denn es ist jetzt sehr lange, dass wir kein einziges Wort miteinander gewechselt haben. Und doch schmerzt es mich, in einer solchen Trennung zu leben, und hoffe, Sie werden diese Zeilen nicht ungünstig aufnehmen und mich mit einer baldigen Erwiderung erfreuen.

Die Betrachtung des Integrals $S = \int^n dx_1, dx_2 \cdots dx_n$, begrenzt durch $x^2_1 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1, p_1 > o, p_2 > o, \cdots p_n > o$, wo $p_1, p_2, \cdots p_n$ unter sich unabhängige lineare und homogene Funktionen der Variabeln bezeichnen, hat mich unter andern folgende bestimmte Integralformeln kennen gelehrt:

Wenn für alle Integrationen derselbe Anfangswert von x gilt, und der Kürze wegen $\cos x_m = \frac{\cos x}{1-2m\cos x}$ gesetzt wird, so ist

$$\int_{\cos x = \frac{1}{2n-1}}^{x = \frac{2\pi}{3}} dx \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_{n-1} = \frac{2^{2n}\pi^n}{(2n+1)!}$$

$$\int_{\cos x = \frac{1}{2n}}^{x = \frac{2\pi}{3}} dx \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_{n-1} = \frac{2^{2n+1}\pi^n}{(2n+2)!}$$

$$\int_{\cos x = \frac{1}{2n-1}}^{x = \frac{\pi}{2}} dx \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_{n-1} = \frac{\pi^n}{(2n)!}$$

$$\int_{\cos x = \frac{1}{2n}}^{x = \frac{\pi}{2}} dx \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_{n-1} = \frac{\pi^n}{(2n+1)!}$$

---

[28]) Aus verschiedenen Stellen ist es fraglich, ob dieser Brief an Cayley gerichtet ist; immerhin ist er sehr wertvoll.

$$\int_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{2\pi}{3}} dx \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_{n-2} \cdot \arccos(1+2\cos x_{n+1})$$

$$= \frac{\pi^n}{(2n)!}$$

$$\int_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{2\pi}{3}} dx \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_{n-1} = \frac{\pi^n}{(2n+1)!}$$

Wenn man für $n = 2$ und $n = 3$ diese Formeln so reduziert, dass nur im ersten Quadranten befindliche Bogen zurückbleiben, so erhält man nur folgende bestimmte Integrale:

$$\int_{\cos x = 1/3}^{x=\frac{\pi}{2}} x_1 dx = \frac{\pi^2}{24}, \quad \int_{\cos x = 1/4}^{x=\frac{\pi}{2}} \left(x_1 - \frac{\pi}{3}\right) dx = \frac{\pi^2}{120}$$

$$\int_{x=\frac{\pi}{3}}^{x=\frac{\pi}{2}} dx \cdot \arccos \frac{1}{1+2\cos x} = \frac{\pi^2}{24}$$

$$\int_{\cos x = 1/5}^{x=\frac{\pi}{2}} x x_2 dx_1 = \frac{7}{360}\pi^3, \quad \int_{\cos x = 1/6}^{x=\frac{\pi}{2}} \left(x_2 - \frac{\pi}{3}\right) dx_1 = \frac{\pi^3}{252}$$

$$\int_{\cos x = 1/4}^{x=\frac{\pi}{2}} \left(x_1 - \frac{\pi}{3}\right) \arccos \frac{1}{1+2\cos x} \cdot dx = \frac{\pi^3}{720}$$

Die drei ersten Integrale, obgleich unter sich nicht reduzierbar, sind spezielle Fälle einer allgemeinen Formel von rätselhaften Eigenschaften.

Es sei

$$\cos y = \frac{\cos\alpha \sin x,}{\sqrt{\sin^2 x - \cos^2\beta}} \text{ also } \sin y = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha \sin^2 x - \cos^2\beta}}{\sqrt{\sin^2 x - \cos^2\beta}}$$

$\dfrac{\partial y}{\partial \alpha} = -\dfrac{\sin\alpha \sin x}{\sqrt{\sin^2\alpha \sin^2 x - \cos^2\beta}}$, eine in Beziehung auf α und x symmetrische Formel. Daher ist, wenn nur $\cos c = \frac{\cos\alpha\sin\gamma}{\sqrt{\sin^2\gamma - \cos^2\beta}}$, $\cos a = \frac{\sin\alpha\cos\gamma}{\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}}$ gesetzt wird, $\frac{\partial c}{\partial\alpha} = \frac{\partial a}{\partial\gamma}$ und $a\,d\alpha + c\,d\gamma$ ein vollständiges Differential, wobei zu bemerken, dass a und c gleichzeitig verschwinden, wenn nämlich $\sin^2\alpha\sin^2\gamma - \cos^2\beta = o$ ist. Hieraus erhellt, dass die Funktion $S = \int_{y=o}^{x=\gamma} y\,dx$, als deren Argumente wir α, β, γ betrachten wollen, durch Vertauschung von α und γ nicht verändert wird. Sind nun m, n, p ganze positive Zahlen, und setzt man $\alpha = \frac{\pi}{m}$, $\beta = \frac{\pi}{n}$, $\gamma = \frac{\pi}{p}$, so soll $S = \frac{\pi^2}{f(m, n, p)}$ sein, wo die neue Funktion f durch Vertauschung von m und p nicht geändert wird. Nun habe ich für die vier einzigen Fälle, wo f einen realen endlichen Wert hat gefunden:

$$f(3, 3, 3) = 30,\ f(3, 3, 4) = 96,\ f(3, 3, 5) = 3600,$$
$$f(3, 4, 3) = 288.$$

Es scheint somit eine finite Formel zu existieren, vielleicht zahlentheoretischer Natur, welche nur diese vier reellen Fälle enthält. Ich weiss aber gegenwärtig noch kein Mittel zu diesem allgemeinen Gesetz zu gelangen. Es ist noch zu bemerken, dass $f(4, 3, 4) = \infty$ und $f(3, 3, 6)$ rein imaginär, aber endlich sein muss. — Zu jenen vier rationalen Werten bin ich durch Betrachtung des im Eingang erwähnten Integrals für $n = 4$ gelangt, indem ich alle Fälle untersuchte, in denen eine symmetrische Begrenzung des Integrals $\int\int\int\int d\,w\,dx\,dy\,dz$ einzig durch lineare Polynome möglich ist, und hiebei fand, dass dieses durch 5, 16, 600, 24, 8, 120 Polynome geschehen kann, wo die Art der Begrenzung durch die Typen (3, 3, 3), (3, 3, 4), (3, 3, 5), (3, 4, 3), (4, 3, 3), (5, 3, 3) zu bezeichnen ist.

Von dem, was in Beziehung auf Integrale von der Form $\int y\,dx$, wo x, y Bogen sind, deren trigonometrische Funktionen durch eine algebraische Relation voneinander abhängen, bis jetzt ist geleistet worden, ist mir gar nichts bekannt. Ich sehe wohl ein, dass sie sich auf Doppelintegrale von algebraischer Form zurückführen lassen und diese mannigfaltiger Verwandlungen fähig sind, von denen aus man wieder auf einfache Integrale zurückkommen kann; aber ich fürchte, diese werden wieder die angegebene Form haben. Setzt man z. B.

$$4\,S = \int_{x=\frac{\pi}{3}}^{x=\frac{\pi}{2}} \arccos \frac{1}{1+2\cos x} \cdot dx,$$

so hat man auch

$$S = \iint \frac{dx\,dy}{x\,y\,\sqrt{(4x^2-1)(2y^2-1)}} \left\{ \begin{matrix} x^2 + y^2 < 1 \\ x > \sqrt{\frac{1}{3}},\ y > \sqrt{\frac{1}{2}} \end{matrix} \right\}$$

und durch fernere Verwandlung

$$S = \int_{\sin x = \sqrt{\frac{2}{5}}}^{x=\frac{\pi}{4}} \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{5\sin^2 x - 2}}{\sin x} \cdot dx +$$

$$\int_{x=\frac{\pi}{6}}^{\sin x = \frac{3}{10}} \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{\frac{3}{2} - 5\sin^2 x}}{\sin x \operatorname{tang} x}\, dx = \frac{\pi^2}{96}$$

Eine auch hier einschlagende, aber leicht zu verifizierende Formel ist

$$\int_{x=0}^{\sin x = ab} \arcsin \frac{\cos x \sqrt{a^2 b^2 - \sin^2 x}}{\sqrt{(a^2-\sin^2 x)(b^2-\sin^2 x)}} \cdot dx$$

$$= \arcsin a \cdot \arcsin b.$$

Man erhält sie, wenn man in jener allgemeinen Funktion S mit den Argumenten α, β, γ das mittlere Argument $\beta = \frac{\pi}{2}$ setzt, und dann der Funktion die Form $\int_{\cos\beta = \sin\alpha\sin\gamma}^{\beta = \frac{\pi}{2}} \frac{\partial S}{\delta \beta}\, d\beta$ gibt.

Sie werden begreifen, dass es mir daran liegt, zu erfahren, ob jene bestimmten Integralformeln schon bekannt sind, und Sie würden mich sehr verpflichten, wenn Sie mir hierüber gefälligst antworten wollten.

In der Hoffnung, Sie werden mir auch Gelegenheit bieten, Ihnen einen Dienst zu erweisen, und die Perioden der Intermittenz unsers schriftlichen Verkehrs werden fortan etwas kürzer sein, habe ich die Ehre zu sein, Ihr ergebenster

---

Cayley an Schläfli.

Dear sir,

I have to thank you very much for the two papers and to apologise for having been so long in writing to acknowledge the receipt of them. The one on Bernoullis numbers[29]) will be very acceptable for the Q. M. Journal, the other one is as you observe rather long, and as I should be very unwilling to adopt the course you suggest of merely printing the first section of it. I should be glad to know whether you will instead, allow me to present it for you to the Royal Society, with a view to its publication in the Phil. Transactions;[30]) will you allow me to make such alterations as seem necessary in the phraseology of some of the sentences. I would have further studied the paper and have send you any remarks which occurred to me upon it but I did not wish any longer to delay writing; you do not I think notice a special form of the ruled surface mentioned in Mr. *Salmons* book, for which the two directrices

---

[29]) On Staudt's Proposition to the Bernoullian Numbers. By Professor Schlaefli. Quarterly Journal, Vol. VI, p. 75—75. (See Crelle's Journal Vol. XXI, p. 372.)

[30]) On the distribution of surfaces of the third order into species in reference to the absence or presence of singular points and the reality of their lines. Communicated by Arthur Cayley, F. R. S. 48 S., 4°.
Philosophical Transactions of the Royal Society of London 1863.

are coincident. I have great difficulty in reading the german handwriting, and if not troublesome to you I would ask you to employ ours. Hoping to hear form yon again soon I remain, dear Sir

yours very sincerely
A. Cayley.

2 Stone Buildings
London W. C.
20. Okt. 1862.

Cayley an Schläfli.

Dear Sir,

I ought to have written some time ago to tell you that the memoir on Cubic surfaces has been accepted for publication by the Council of the Royal Society — I cannot exactly say how soon it will be printed, but it will certainly be so before long — and also to acknowledge the receipt of your letter informing me of the death of Prof. *Steiner*. We had in fact abready heard of it here that we were just to late in our election of him as a foreign member of the Royal Society.[31]) It is indead a great loss to mathematical science. I had not the advantage of a personal acquaintance with hin.

I will let you know when I receive the proof sheets of your memoir and in the meantime remain, dear Sir, yours very sincerely

A. Cayley.

London 2 Stone Buildings W. C.
4. May 1863.

---

[31]) Hieraus geht hervor, dass *Jakob Steiner* bei seinem Tode (1. April 1863) just auf dem Punkte war, auswärtiges Mitglied der Royal Society zu werden.

Cayley an Schläfli.

Dear Sir,

The meeting of the British Association takes place this year at Bath from the 14 to the 21st September: the Local Committee are desirous of offering board and lodging to a number of distinguished foreigners who may attend the meeting and I ame authorised by them to invite you to come to it, assuring of a cordial welcome on their part and that they will do everything in their power to render your stay agreable to you. In the hope of a favorable answer, and of the great pleasure I should have in making personal acquaintance with you, I remain, dear Sir, yours very sincerely

A. Cayley.

Grasmere Westmoreland
1. Augt 1864.

Cayley an Schläfli.

Dear Sir

I have the pleasure of sending you herewith the last of my papers in the Phil.Transactions a second memoir on skew surfaces[32]) otherwise scrolls — I am not sure if I sent you the first part of the memoir — if not I shall be happy to do so — I have always forgotten to ask you to repay me the subcription for the Quarterly Mathematical Journal — it will be to No 24 twelve Nos at 5/6 a No (including postage) L 3, 6 or 82 francs. I trust you have been receiving the Journal regularly, it has been posted to you direct from Mr. *Metcalfe* the printer.

I remain dear Sir, yours very sincerely

A. Cayley.

Cambridge 26t June 1865.

---

[32]) On Skew surfaces 65 S.
Philos. Trans. London 153, 154, 159 (1863–69).

Konzept eines Briefes von Schläfli an Cayley.

Empfangen Sie meinen herzlichen Dank für die jüngst zugesandten zwei wertvollen Abhandlungen; ich fühle mich Ihnen sehr verpflichtet für Ihre Grossmut, dass Sie mir in einem Gebiete, wo Sie bahngebrochen haben, so viele Anerkennung zu Teil werden lassen. Was den Empfang des Quart. math. journal betrifft, so habe ich im achten Bande eine Lücke; die zwei mittlern Nummern 30 und 31 habe ich nicht bekommen. Beim Empfang der Nr. 32 schrieb ich Ihnen, dass mir die zwei vorangehenden Hefte fehlen, und machte Ihnen den Vorschlag, Sie möchten, um sich die Mühe zu sparen, die Rechnung mit mir auf den Verleger, *Longmans and Co.*, übertragen; ich wollte dann je beim Empfange eines Bandes bezahlen. Damals wäre es freilich nötig gewesen, von England aus einen Wechsel auf mich zu stellen, weil hier der Banquier sich weigerte, einen so geringen Betrag nach England zu besorgen. Aber jetzt, wie ich mich soeben erkundigt habe, ist die Schwierigkeit weggefallen; man kann mit einem Postmandat nach England bezahlen. Ich habe im ganzen zwei Male bezahlt: 82 fr. im Juli 1865 durch Hrn. *Schläfli*, Lehrer der engl. Sprache, vielleicht für die Bände II bis IV, da ich wahrscheinlich den ersten Band hier durch den Buchhändler bezog; für die zweite Zahlung, die durch die Herren *Williams* und *Norgate* geschah, habe ich von Ihnen eine Empfangsanzeige vom 4. Dez. 1866, aber Sie nennen in Ihrem Briefe den Betrag nicht, und ich habe ihn vergessen, so dass ich nicht weiss, bis zu welchem Bande er reicht. Da das erste Heft (Nr. 29) des achten Bandes das Datum Juni 1866 trägt, so sollte ich glauben, die zweite Zahlung hätte die Bände V, VI, VII umfasst. Von da an habe ich nur Nr. 29 und 32 des VIII Bandes, den ganzen IX. Band, und Nr. 37 und 38 den X. Bandes empfangen. — Wenn mir zwei Hefte (Nr. 30 und 31) nicht zugekommen sind, so kann es von einer falschen Adresse oder von einer mangelhaften Verpackung herrühren. Ein Mal gelangte ein Heft an Herrn *Schaffter*, Prof. der franz. Literatur, der dann erriet, dass es mir gehöre; ein anderes Mal war der etwas dünne Umschlag fast abgerissen. Es tut mir leid, dass ich Ihnen deswegen Mühe mache, aber ich möchte Sie doch bitten nachzuforschen, bis wohin die zweite Zahlung reicht, und mir die fehlenden Hefte (Nr. 30 und 31) noch liefern zu lassen. Wollen Sie so gut sein und mir die Adressen der Herren *Kirkmann* und *Hirst* angeben?

Konzept eines Briefes Schläfli's an Cayley.

Teurer Freund!

Vom General Post Office zu London kommt mir die Anzeige zu, dass dort ein Buchpaket Nr. 958 liege und mit 6^d zu frankieren sei, um versandt werden zu können. Ich vermute, dass es das vierte Heft von Bd. VII des Quarterly Journal's sei; die Anzeige hat dieselbe unrichtige Adresse Schafli, unter der mir die Hefte des Journals in der letzten Zeit immer zugekommen sind. Da ich nun keinen Korrespondenten in London habe, und da Sie mich letzthin gefragt haben, ob ich das Journal regelmässig bekomme, so bin ich so frei mich wegen dieser Sache an Sie zu wenden und Sie zu bitten, dieses Paket Nr. 958 frankieren zu lassen. Da ich ohnehin mit Ihnen in Rechnung stehe, so halte ich es nicht für nötig, die 60 Centimes beizulegen. Ich bin hier bei der englischen Gesandtschaft gewesen, in der Hoffnung eine Briefmarke bekommen zu können, um sie an das Post Office senden zu können, erhielt aber die Antwort, dass die Frankatur nur durch einen Korrespondenten in London geschehen könne, und dass die Gesandtschaft keine Briefmarke habe. Die Anzeige lautet also:

The Secretary of the Post Office . . . has to inform Prof. *Schafli* that there is a Book Paket, No. 958, directed to him which cannot be forwarded until the Postage of 6^d (in British Postage Stamps or Monay) be paid; if, therefore, he will desire one of his correspondents to call at the returned Letter Branch of the Circulation Department, between the hours of ten and four o'clock (on Saturdays between ten and one), and pay the above postage, the Book Paket will bi immediately sent according to the address; or if he will return this notice distinctly stating to whom he wishes the Book Paket to be delivered, such request shall be complied with. — In any application for the Paket, it is necessary that it should be enquired for by its *number*. (24. Febr. 1866.)

Es wäre mir erwünscht, für das Journal eine regelmässige Bezahlung einzurichten, etwa für jeden Band, was, wie ich glaube, 27 Fr. 50 Cts. betrüge. Wenn die Zusendung durch Vorausbezahlung erleichtert werden kann, so bin ich dazu bereit. Die 80 Franken, die ich durch Hrn. *Schäfli* an Prof. *Sylvester* auszahlen liess, werden Sie mir berechnet haben. Es wäre mir lieb, wenn ich die Rechnung wieder ein Mal berichtigen könnte und möchte ich Sie bitten, mir darüber zu schreiben.

Ich habe im vergangenen Jahre Prof. *Sylvester* gebeten mir Hamiltons Werk über die Quaternionen und *Salmons* Geometry of 3 dimensions (2^{te} Ausg.) zu verschaffen, aber noch keine Antwort erhalten. Dürfte ich Sie um die Gefälligkeit bitten, Prof. *Sylvester* zu fragen, ob er diese Bücher schon für mich gekauft hat, und, wenn nicht, dafür zu sorgen, dass ich sie bekomme, und sie mir mit dem Uebrigen auf die Rechnung zu setzen, die ich von Ihnen erwarte.

Genehmigen Sie die Versicherung meiner aufrichtigen Hochachtung und Freundschaft

Bern, den 1. März 1866

Ihr *L. Schläfli.*

Kopie eines Briefes von Cayley an Schläfli. (29. III. 1866).

I trust that long before this yon will have received the missing N$^{\underline{o}}$ of the Quarterly Journal. I happened to be going to London just after I received your letter, and went to the general Postoffice to set the matter right. I spoke also to Prof. *Sylvester* who expressed his intention of sending you the books as to which you had given him a commission. The last payement you made me was I think up to N^{o} 24 of the Journal, that just sent you was N^{o} 28, making a volume, the price for which with the postage is 22 sh. or say 27 francs. Pr. S. gave me a paper of your on the theory of rotation in space of n dim. , which has been just in the printers hands, and which will I hope appear in the next number of the Journal. I was much obliged to you also for the paper in Crelle on the same subject which you kindly sent me, and which I received a few days ago.

The last thing I have been working at is a theory of the correspondance of points on a plane curve. Since in a unicursal curve or curve with the maximum number $\frac{1}{2}$ (m — 1) (m — 2) of double points, the coordinates are expressible rationally in terms of a parameter Q, — it is clear that *Chasles'* theorem for the correspondance of points on a line applies to any unicursal curve whatever — and we have thence a theorem appling to *any* curve, viz. if the correspondance of the two points is such that to any point of the first system there correspond a′ points of the second system, and to any point of the second system a points of the first system, then the number of self corresponding points is a + a′ + 2 k D, if D be the *deficiency* of the given curve. I have obtained a theorem which enables me to find, if not always, at least in most cases, the value of the coefficient k.

29 March 66.

Dr. *Salmon* has given orders at my request to a Dublin bookseller to transmit to you a copy of his *new* edition of his treatise on surfaces and I have given instructions through a friend in London to forward to you the New Edition of *Hamiltons* Treatise of Quaternions which I beg of you to accept as a friendly memento from me and as an infinitesimal compensation for the delay occasioned by my unhappy and deeply bewailed habit of procrastination amounting to a kind of mental paralysis of a peculiar and distressing form.

I have just sent to the Royal Society a short paper on the rotation of a free rigid body about a fixed point and if published in the Transactions will do myself the pleasure of sending you a copy of it. I show how *Poinsot's* ellipsoid by a slight addition may be made to express the *time* to the senses and how the motion of any rigid body may by reduced to depend in the most simple manner upon that of an indefinitely flattened *disc.*

I also prove that Poinsot's ellipsoid rolling on a *rough* plane moves precisely in *time* with the free body of which it is the Kinematical Exponent. This is very elementary Mathematic; but I think the results are somewhat interesting and our great and bearned mutual friend Mr. C. considers them original.

I hope your health is good and that yon will pay your promised visit to England and become my guest here in Woolwich.

With assurances most sincere of unfailing attachment and high esteem I remain, my dear Sir, yours very sincerely.

Cayley an Schläfli.

Dear Sir

I must not any longer delay writing to thank you for your two letters of nov. 10th & 26th, which I have now at last found leisure to study — the simplification of the second letter, in effect substituting for $D^{n-1}\left(\frac{e^{R} + e^{-R}}{R}\right)$ its expansion as a hypergeometric Series is most satisfactory; and the final result a very beautiful one.[33]) I am afraid we must defer it until the number next after the forthcoming one of the mathematical Journal, for which it is a most acceptable contribution. Prof. *Sylvester* is quite well — occupied just now with a theory of symbols of operation such as $(x, y \cdots)^{a} (\delta_x, \delta_y \cdots)^{\alpha}$ viz. functions of

---

[33]) Solution of a Partial Differential Equation. By Professor Schlaefli, Quarterly Journal, Vol. VIII, p. 252—256.

the degree α in (δ_x, δ_y · · ·) with Coefficiants which are functions of the degree $\underline{a}$ in the variables (x, y · ·). Among varions special results he has been led to some on the expansion of the factorial $x\,\overline{x+1}\;\overline{x+2}\cdots\overline{x+r-1}$ connected with those in your paper Crelle t. 43. The second Edition has appeared of Dr. *Salmons* lessons on the Modern higher Algebra expanded to a thickish volume of 300 pages — there are two great peaces of calculation in it, that of the discriminant of the general sextic function (a, b, c, d, e, f, g) $(x, y)^6$, and of the skew invariant of the 15th degree of the same sextic function: and in connexion with this an interesting speculation as to the form of the invariantive criteria for the reality of the roots of a sextic equation. Have you seen in the Comptes Rendu the very interesting papers by *De Jonguieres*[34]) on the number of curves C^r which satisfy given conditions of contact with a given curve U^m? — A more complete paper with the demonstrations is already printed and will I suppose shortly appear in *Crelle.*[35]) I have to thank you for the remittance which I received some weeks ago thro' Messrs *Williams & Norgate.* I remain, dear Sir, yours very sincerely

A. Cayley.

Cambridge 4th Dec. 1866.

---

[34]) *Jonguières, Fauque de,* Jean Philippe, Ernest, geb. 3. Juli 1820 in Carpentras, Vice-Admiral.

«Nombre de courbes d'un même système qui coupent des courbes données sous des angles donnés.»

Pariser Compte-Rendus, 2 p., 58.

Paris, Mémoires savants étrangers:

«Généralisation des courbes géometriques et en particulier celles du 4e ordre.» 65 p. 1862.

[35]) *A. Caylay*: «Surface du 4e ordre avec 16 points singuliers.» 7 p. Crelle (65 und 73. 1866 und 71).

Konzept Schläfli an Cayley.

1870 Aug. 20. An Cayley. Ich sage Ihnen meinen herzlichen Dank für die Zusendung Ihrer Abhandlung on abstract geometry.[36]) Erlauben Sie mir ein Wort über den am Schlusse des Art. 36 ausgesprochenen Satz, dessen Beweis ich schon seit vielen Jahren nicht habe finden können. Ist die einfache Relation $\Omega = o$ in $P = o$ impliziert (und sind Ω, P ganze Funktionen), so steht für die Verifikation des Satzes der Divisionprozess zu Gebot. Wäre $\Omega = AP + Q$ und Q an Grad in Bezug auf eine erste Koordinate niedriger als P, so wäre auch $Q = o$ in $P = o$ impliziert, was durch Hinzunahme linearer Gleichungen, wie $m - 1$ der übrigen Koordinaten, jede null, oder auch durch Fortsetzung des Divisionsprozesses widerlegt werden kann. Wenn aber die einfache Relation $\Omega = o$ in der zweifachen ($P = o$, $Q = o$) impliziert ist; ihr System sei asyzygetisch so weiss ich keinen Process, um $\Omega = A\,P + B\,Q + R$ zu bekommen und aus dem Impliziertsein der Relation $R = o$ in ($P = o$, $Q = o$) auf das identische Verschwinden des Polynoms R zu schliessen. Der Satz ist unentbehrlich. In einfachen Anwendungen für $m = 2$, 3 weiss man sich gewöhnlich zu helfen; aber für $m = 3$, wenn eine zweifache Relation zu ihrer Darstellung mehr als zwei Gleichungen fordert, habe ich bis jetzt die Schwierigkeit des Beweises nicht zu überwinden vermocht. Gestern habe ich hier auf der Post die Fr. 82 für das Quarterly Journal bezahlt; ich habe damit viel zu lange gewartet und bitte daher um Verzeihung. Statt Nr. 30, 31, 39, 40 zu bekommen, bekam ich nur Nr. 40 (unterm 3. Aug. 1870); ich glaubte nun, das Ende des Krieges abwarten zu müssen, da ich von vielen Seiten von den Stockungen des Verkehres und von verloren gehen der Sendungen hörte, und endlich hat mich meine Saumseligkeit dahin geführt, dass ich Ihnen erst jetzt, wo ich im Begriffe bin, für einige Tage über die Berge zu gehen und Verbindlichkeiten vorher in Ordnung bringen will, antworte. Ich gebe nun das Journal auf. In frühern Jahren, wo ich empfänglicher als jetzt,

---

[36]) «On abstract geometry» 13 p.
London Phil. Trans. t. 160, 1870.

und die Lehre von der linearen Transformationen, den ganzen Funktionen und ihren Invarianten, die mit neuem Aufschwung, wie ich glaube, zuerst in den Dubliner und Londoner Journalen erschienen, regte mich mächtig an; jetzt haben meine Kräfte abgenommen, und ich glaube an den Journalen von Berlin und Mailand genug zu haben.

Das Mailänderjournal z. B. wird mir direkt vom Drucker *Bernardoni* zugesandt, und wenn ich vier Hefte bekommen habe, so bezahle ich sie auf der Post; vergesse ich dieses, so bekomme ich eine Mahnung. Die Verhältnisse müssen in England ganz anders sein; der Drucker oder Verleger, obschon er jetzt den Betrag für eine Zusendung durch Postnachnahme erheben könnte, scheint einem einzelnen Abnehmer nicht Kredit zu geben, oder die Mühe ist ihm für ein Exemplar zu gross. Geht die Sache durch Vermittlung hiesiger Buchhändler, so tritt demnach, was ich von andern höre, auch Unregelmässigkeit ein.

Ich trage Bedenken gegen die Zulässigkeit des *Dirichlet*schen Beweises für den Satz, den die einfache *Fourier*sche Summenreihe ausdrückt. Wenn die Reihe für die Anwendung einen Wert haben soll, so muss er doch darin liegen, dass die trig. Summenreihe die Form einer analytischen Funktion hat, dann, dünkt mich, sei man berechtigt, sie wenigstens innerhalb eines endlichen Intervalls, auf ihre Eigenschaft, *Function* eines *variabeln* Arguments zu sein, zu prüfen. Die Summe der Glieder bis zur nten Ordnung wird in den Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi}\int f(\varphi)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\varphi-\Theta)}{\sin\frac{\varphi-\Theta}{2}}\,d\Theta$$

zusammen gezogen, und angenommen f (φ) sei null für $o < \varphi < \Theta$ erhebe sich durch einen Sprung zu einem endl. pos. Wert und durchlaufe nun stetig pos. Werte, ohne je zu wachsen, im Intervall $\Theta < \varphi < \eta$ und springe endlich auf o zurück und sei stets null im Intervall $\eta < \varphi < 2\,\pi$. Sinkt $\eta - \Theta$ nicht unter einen festen positiven, aber immerhin endlichen Wert, so wird wirklich gezeigt, dass der Ausdruck die Hälfte des positiven Wertes f (Θ) mit dem die Funktion das mittlere Intervall $\Theta < \varphi < \eta$ beginnt, zur Grenze hat, dass, wenn man verlangt, dass der Fehler absolut kleiner als δ sei, eine entsprechende hinreichend grosse endliche Zahl N existirt, so dass die Forderung für $n \overline{\overline{>}} N$ erfüllt ist. Will man aber δ und N festhalten, so kann man nicht mehr $\eta - \Theta$ beliebig klein werden lassen. Die endliche Summenreihe, aus der jener Ausdruck zusammen gezogen ist, nähert sich immer mehr der Form $o + o + \ldots . + o$ (nter Rang), und der volle Betrag flüchtet sich in den unendlichen Rest der Reihe, in dem an der Grenze $\eta - \Theta = o$ selbst die unendliche Summenreihe in ein Integral übergeht. Man kann also die Veränderung nicht untersuchen, die der Ausdruck erleidet, wenn das mittlere Intervall auf $\Theta + \omega < \varphi < \eta$ verengert wird, wo ω beliebig klein werden soll. Die Unsicherheit wird nun freilich dadurch wider gut gemacht, dass unterhalb Θ noch ein Intervall $\zeta < \varphi < \Theta$ angesetzt wird, so dass nun f (φ) im ganzen Intervall $\zeta < \varphi < \eta$ stetig positive Werte durchläuft, ohne je zu wachsen, aber im Intervall

$$\eta < \varphi < 2\pi + \zeta$$

beständig null ist; aber es geschieht doch nur, indem zwei entgegengesetzte Fehler einander aufheben und dadurch den richtigen Werth f (Θ) hervorbringen. Man ist wenigstens bei dieser Beweisart nicht im Stande Θ zu variiren. Dass im frühern Zustande der Wert der unendlichen Summenreihe wirklich $\frac{1}{2}$ f (Θ) sei, bezweifle ich; vielmehr, wenn die Koeffizienten a, b der ersten Voraussetzung gemäss (Sprünge bei $\varphi = o$ und bei $\varphi = \eta$) berechnet sind, so wird die Konvergenz der Reihe $a_o + 2\,\Sigma\, a_n \cos n\varphi + 2\,\Sigma b_n \sin n\varphi$ desto geringer, je kleiner $\varphi - \Theta$ wird, und zwar ohne Ende, und hört nach meiner Ansicht bei $\varphi = \Theta$ wirklich auf, wenn man wenigstens die Summenreihe als Ausdruck einer *wahrhaften Funktion* ansieht. Ich meine damit nicht etwa nur, dass der Ausdruck hier keinen ersten Differentialcoefficient hat, sondern dass man, wenn man sich auf den Realitätsstandpunkt beschränkt, auch über die Art der Unstetigkeit im Dunkeln ist. Es interessierte mich sehr, Ihren Entscheid in dieser Sache zu hören.

Ich gedenke vor Ende Sept. wieder in Bern zu sein. Ich hoffe, Sie seien in voller Gesundheit, und empfehle mich Ihrem teuren Andenken.

Genehmigen Sie die Versicherung ausgezeichneter Hochschätzung

Dear Sir,

The Meeting of the British Association takes place this year at Bath from the 14 to the 21st September: the Local Committee are desirous of offering board and lodging to a number of distinguished foreigners who may attend the Meeting, and I am authorised by them to invite you to come to us, assuring of a cordial welcome on their part and that they will do everything in their power to render your stay agreeable to you. In the hope of a favorable answer, and of the great pleasure I should have in making personal acquaintance with you, I remain dear Sir, yours very sincerely

A. Cayley

Grasmere Westmoreland
1 Aug. 1864

Cayley an Schläfli.

Dear Sir

I have to thank you very much for your letter of the 20th Aug^{t}, with the accompanying postoffice order for 82 Frs. & the several memoirs which you kindly sent me. I am very sorry the dispatch of the Journal has been so unfortunate. I send herewith the missing N^{os} 30, 31 & 39. I would have written before, but I was away from Cambridge, among our small-scale but very injoyable mountains in Westmoreland & Cumberland, & you mentioned that you were also away from Bern. I trust that you have had an equally pleasant summer excursion.

As tho the equation $\Omega = AP + BQ$, admitting that it exist, the determination of the functions A, B could be effected by indeterminate Coefficients: viz. if deg. $\Omega <$ deg. P + deg. Q, then A & B will be completely determinate functions so that the coefficients will be completely determined by the method in question: but if deg. $\Omega \gtreqless$ deg. P + deg. Q, then any particular values being A', B', the general values will be $A' + KQ$, $B' - KP$, K being au arbitrary (integral) function of the degree = deg. $\Omega -$ deg. P — deg. Q. But I understand your difficulty is that we have no proof of the existence of the equation $\Omega = AP + BQ$. I am not able to give one — and I can only say that the existence of this equation with integral or fractional values of A, B appears to meel axiomalic — Suppose A & B originally fractional, then the form really is $C\Omega = AP + BQ$ — but then $P = o$, $Q = o$ does not of necessity imply $\Omega = o$, but only $\Omega = o$ or else $C = o$; and the system ($P = o$, $Q = o$) breaks up into the two systems ($P = o$, $Q = o$, $\Omega = o$) ($P = o$, $Q = o$, $C = o$) contrary to the original supposition that $P = o$, $Q = o$ is an indecomposable system. A difficulty is that we might have $C = \Omega$, viz. $\Omega^2 = AP + BQ$, without $\Omega = AP + BQ$ — all this for what it may be worth & I should be very glad if you can add anything to the analytical proof.

I have studied the *Fourier*-series question so little that I do not venture any remarks upon the latter part of your letter. I remain, dear Sir, your very sincerely *A. Cayley.*

Cambridge, 11. Sept. 1871.