Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1905)

Heft: 1591-1608

Artikel: Sur l'hyperbole d'Apollonius

Autor: Droz-Farny, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319155

A. Droz-Farny (Porrentruy).

Sur l'hyperbole d'Apollonius.

Notes géométriques

I.

On sait que, dans les sections coniques, le problème des normales est résolu par l'intersection d'une hyperbole équilatère, l'hyperbole d'Apollonius, avec la conique donnée. Dans la question 2245 de l'Intermédiaire des Mathématiciens, (année 1901, page 309) Monsieur H. Brocard, l'éminent géomètre français propose la recherche des points importants de cette hyperbole. Ces notes géométriques ont pour but de développer la question posée par M^r Brocard. Dans ce qui suit, nous nous occuperons surtout des coniques à centre. Mais, sauf de légères corrections, les propriétés énoncées sont valables aussi pour la parabole.

Si d'un point fixe P, on abaisse des perpendiculaires, sur les tangentes d'une conique, et que l'on prenne le point d'intersection de cette droite avec le diamètre de la conique passant par le point de contact de la tangente, le lieu de ce point sera une hyperbole équilatère, *l'hyperbole d'Apollonius* (Chasles, Sections coniques, page 142).

Supposons d'abord, une conique à centre.

La perpendiculaire abaissée de P, sur une tangente t est aussi perpendiculaire sur le diamètre A qui lui est parallèle. Le diamètre A′, passant par le point de contact de t est le conjugué de A.

Or le faisceau des diamètres A′ est homographique à celui des diamètres A. Le faisceau des perpendiculaires abaissées de P étant homographique au faisceau A, le sera aussi au faisceau A′

et les points d'intersection de leurs rayons homologues sera une conique passant par P, et par le centre O, de la conique considérée.

Si le diamètre A est un des axes de la conique, A′ sera le second axe. Dans ces deux cas, le rayon du faisceau P, est parallèle à son homologue A′. Deux des points d'intersection coïncident donc avec les points infinis des axes.

La conique est une hyperbole ayant ses asymptotes *parallèles aux axes* de la conique donnée.

Soit maintenant une normale, menée de P, à la conique. Cette droite étant perpendiculaire sur la tangente, au point où elle rencontre la conique, coupe directement en ce point, le diamètre au point de contact. Donc ce point appartient à l'hyperbole, qui passe ainsi, par les quatre pieds des normales, abaissées du point fixe P, sur la courbe.

Considérée, comme appartenant à l'un des faisceaux, la droite OP aura un rayon homologue dans le second faisceau, qui sera, d'après une proposition connue, la tangente à l'hyperbole au centre du faisceau. Il en résulte:

a) *La perpendiculaire* abaissée de P, sur le diamètre *conjugué* à OP, est la tangente en P à l'hyperbole;
b) *Le diamètre* conjugué à celui qui en O, est perpendiculaire *à OP, est la* tangente en O, à notre courbe.

Si le point donné est situé sur un des axes de la conique, l'hyperbole se décompose suivant deux droites orthogonales, dont l'une coïncide avec l'axe lui même.

La seconde droite se construit aisément, au moyen d'un couple de diamètres conjugués.

Voici une démonstration élémentaire de cette dernière propriété, qui nous permettra de fixer la position de cette droite.

Soit sur le grand axe OA d'une ellipse, un point P donné; posons $OP = d$; soient en outre, α et β, les angles que forment avec OA, deux diamètres conjugués OA′ et OB′.

La perpendiculaire abaissée de P sur OA′ coupe OB′ en un point C appartenant à l'hyperbole d'Apollonius du point P. Abaissons de C, la perpendiculaire CD sur OA, on aura:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = -\,\mathrm{ctg}\,CPD = -\frac{PD}{DC}$$

$$\mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}\cdot DOC = \frac{DC}{OD}$$

Par multiplication $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta = -\frac{PD}{OD}$

Or, on sait que $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta = -\frac{b^2}{a^2}$.

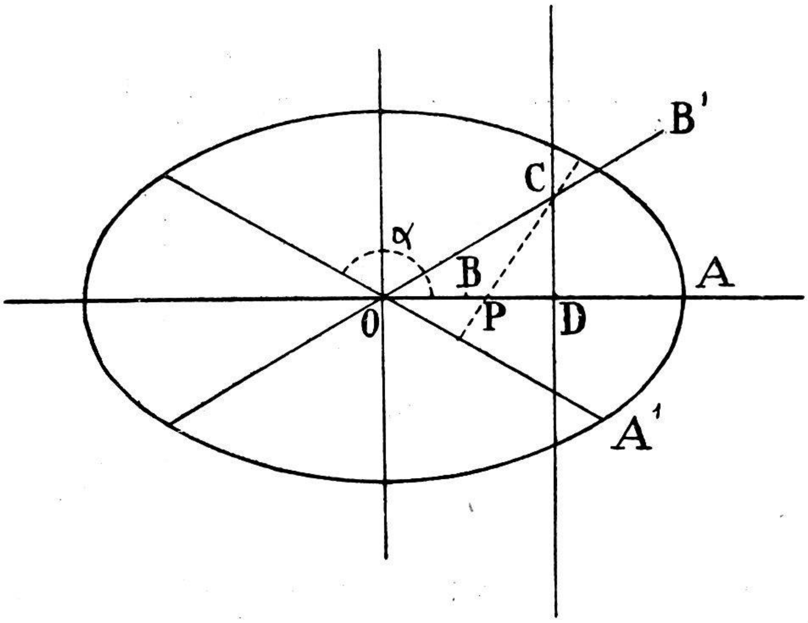

Fig. 1.

Donc $\frac{PD}{OD} = \frac{b^2}{a^2}$ et en posant: $OD = \chi$

$$\chi = \frac{a^2 d}{b^2}.$$

Le point D est fixe et l'hyperbole en question se compose bien du grand axe et de la droite DC, qu'il serait facile de construire, au moyen de la relation précédente. Démonstrations analogues, si le point P est situé sur le petit axe de l'ellipse ou sur un des axes d'une hyperbole. Comme application, demandons nous, d'abaisser d'un point P, situé sur le grand axe d'une ellipse, donnée par ses axes, AA′ et BB′, les normales à la courbe.

On sait, que les diagonales du rectangle construit sur les axes, sont les diamètres conjugués égaux de la courbe. La perpendiculaire abaissée de P sur AB coupe en C la parallèle menée par O à B′A. La perpendiculaire CD abaissée de C sur le grand axe coupera l'ellipse aux pieds des normales cherchées.

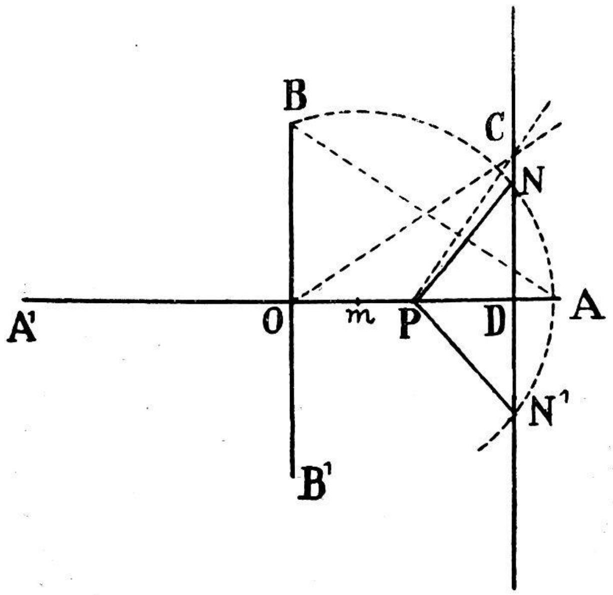

Fig. 2.

Pour déterminer ces deux points, on peut utiliser un théorème dû à Laguerre.

Les normales en deux points d'une conique et la perpendiculaire élevée sur la sécante qui joint ces deux points, en son point milieu, coupent un des axes de la conique suivant trois points α, β, γ tels que $\alpha\gamma = \beta\gamma$.

Il suffit de considérer ici, la normale cherchée PN avec la normale BO. Soit m le point milieu de OP. La circonférence de centre m et de rayon mB coupe CD aux pieds N et N′ des normales cherchées.

Dans le cas de la parabole, le faisceau des perpendiculaires abaissées de P sur les tangentes est comme on le démontre aisément homographique au faisceau des diamètres des points de contact.

Le lieu des points d'intersection des rayons homologues est encore une hyperbole équilatère, passant par P et dont une des asymptotes est parallèle à l'axe de la parabole. Outre le point à l'infini de l'axe, les deux courbes se coupent encore en trois points; il en résulte que d'un point P on peut mener trois normales à la parabole.

Remarque: Voir pour le centre de l'hyperbole d'Apollonius, l'article intéressant de B. Niewenglowsky dans le journal de mathématiques spéciales de G. de Longchamps, année 1884, page 78.

II.

Du point P comme centre, décrivons une circonférence de rayon quelconque, qui coupe la conique aux points A, B, C, D.

Considérons la corde AB et soit J son point milieu. Le diamètre OJ de la conique est le conjugué du diamètre parallèle à AB et comme PJ est perpendiculaire à AB, il en résulte que le point J appartient à l'hyperbole d'Apollonius du point P.

Soient E, F, G les points de coupe des diagonales et des paires de côtés opposés du quadrilatère ABCD. EFG est le triangle conjugué à l'ellipse et au cercle. L'une de ces courbes étant un cercle, le triangle EFG a le centre P comme orthocentre.

E étant le pôle de FG par rapport à la conique, le diamètre OE est conjugué à la direction FG et comme PE est perpendiculaire à FG, E est de nouveau un point de notre hyperbole. On a donc le théorème suivant:

Si d'un point P comme centre et avec un rayon quelconque, on décrit une circonférence, qui coupe une conique à centre, en 4 points, les 6 points milieux des cordes d'intersection et les 3 sommets du triangle polaire commun aux deux courbes sont 9 points de l'hyperbole du point P.

Les trois droites qui joignent les points milieux des paires de côtés opposés du quadrilatère ABCD se croisent au centre de l'hyperbole.

Pour chaque valeur nouvelle du rayon, on obtient ainsi 9 points nouveaux de la courbe.

Des développements précédents, on peut déduire une propriété intéressante des triangles EFG.

Les 4 points EFGP constituent un quadruple orthocentrique inscrit dans l'hyperbole; donc la circonférence EFG passe par le point fixe P′ diamétralement opposé à P sur l'hyperbole. Le triangle EFG étant conjugué à la conique, d'après un théorème connu de Faure, sa circonférence circonscrite coupe orthogonalement la circonférence de Monge de la conique. Le cercle EFG passera donc par un deuxième point fixe Π, le conjugué harmonique de P′ par rapport aux extrémités du diamètre P′O du cercle orthotomique considéré. Les côtés du triangle EFG sont donc les cordes d'intersection d'une hyperbole fixe avec les cercles d'un faisceau ayant un de ses centres sur l'hyperbole.

Ils enveloppent par conséquent une conique qui doit être une parabole car le cercle singulier du faisceau est constitué par la droite $P'\Pi$ et la droite infinie.

Or cette dernière étant une corde commune à l'hyperbole et au cercle, est une tangente à la conique qui est donc bien une parabole.

III.

Dans le journal de mathématiques spéciales de Mr G. de Longchamps, année 1892, Monsieur Ch. Michel a proposé, sous le numére 352, l'intéressante question suivante:

On donne une ellipse, un point P qu'on joint aux foyers. Démontrez que les centres des sécantes communes au système des 2 droites ainsi obtenues et à l'ellipse sont sur l'hyperbole d'Apollonius du point P.

Soient P_1 et P_2 les centres des paires de sécantes communes. Ces 2 points appartiennent à la polaire de P par rapport à la conique. Le faisceau P ($F_1P_1F_2P_2$) est donc harmonique. Si PT_1, et PT_2 sont les deux tangentes menées de P à la conique, il en est de même du faisceau P ($T_1P_1T_2P_2$).

Les rayons PP_1 et PP_2 sont donc les rayons doubles du faisceau en involution PT_1, PF_1, PT_2, PF_2. Or d'après un théorème connu de Poncelet, ce faisceau est isogonal, donc les droites PP_1, et PP_2, sont orthogonales en P.

La perpendiculaire abaissée de P_1 sur sa polaire PP_2 passe par P, donc P_1 et de même P_2 appartiennent à l'hyperbole d'Apollonius de P.

Dans le volume de 1894, du même journal, Mr Ch. Michel a indiqué la belle généralisation de son théorème:

On mène d'un point P, les faisceaux de tangentes à une famille de coniques homofocales. Les centres des sécantes communes à ces faisceaux de tangentes et à une conique fixe C du système sont sur l'hyperbole d'Apollonius de P relativement à la conique C.

IV.

Il y a une dizaine d'années environ, j'ai communiqué à plusieurs collégues et amis une proposition valable pour toutes les coniques et qui depuis a été reproduite dans quelques revues.

Elle n'est qu'un cas particulier d'une proposition très générale que j'énoncerai dans l'article 5.

Soit F, un *foyer d'une conique* quelconque et Δ sa directrice *correspondante.* La droite PF rencontre Δ en un point A, *qui appartient* à l'hyperbole d'Apollonius *du point P.*

Supposons par exemple une ellipse. La polaire de A est a perpendiculaire élevée en F sur PA, et qui rencontre Δ en Π. Or le diamètre conjugué de OA est parallèle à $F\Pi$ donc perpendiculaire aussi sur PA d'où le théorème. Le théorème précédent fournit la solution immédiate de l'exercice 11 énoncé par Monsieur Duporcq dans son si intéressant ouvrage: Premiers principes de géométrie moderne.

La droite qui joint un point de l'axe non focal d'une conique à un foyer coupe la directrice correspondante au même point que la droite qui joint les pieds des normales menées du point considéré à la conique.

V.

Grâce aux deux foyers, d'une conique à centre, le théorème du numéro IV fournit deux nouveaux points de l'hyperbole situés sur les directrices de la conique donnée. Depuis quelque temps, je suis parvenu à l'intéressante généralisation suivante, qui augmente à l'infini le nombre des points connus:

Soit sur l'axe focal, le point A, d'abscisse $x = \pm \frac{a^n}{c^{n-1}}$; *la droite PA* rencontre la droite fixe $x = \pm \frac{a^{n+2}}{c^{n+1}}$ en un point *de l'hyperbole* d'Apollonius. Les foyers, les extrémités *de l'axe* focal, les pieds des directrices sont des points A *pour* les valeurs,

$$n = o, = 1, = 2$$

ainsi que me l'a fait remarquer M. H. Brocard, il existe une propriété analogue pour les points de l'axe des y.

Soit sur cet axe, le point A, d'ordonnée $y = \pm \frac{b^n}{c^{n-1}}$; PA rencontre la droite fixe $y = \pm \frac{b^{n+2}}{c^{n+1}}$ en un point de l'hyperbole d'Apollonius.

La démonstration, soit géométrique, soit analytique de ce théorème ne présente aucune difficulté.

Pour la démonstration géométrique, il suffit de constater que le faisceau des rayons PA est homographique à celui des droites fixes; le lieu des points d'intersection des rayons homologues est une hyperbole équilatère qui a, avec l'hyperbole d'Apollonius de P, cinq points en commun; P, les points à l'infini et les deux points sur PF et PF′ de l'article précédent et coïncide donc avec elle.