Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft in Bern

Band: 38 (1981)

Artikel: Schlussbericht über ein Extremalproblem über konvexe Körper im R3 mit besonderer Berücksichtigung der Rotationssymmetrie

Autor: Bieri, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-318471

H. Bieri *

Schlussbericht über ein Extremalproblem über konvexe Körper im R_3 mit besonderer Berücksichtigung der Rotationssymmetrie

Eine Punktmenge heisst konvex, wenn sie mit jedem Punktepaar die ganze Verbindungsstrecke enthält. Konvexe Körper sind beschränkte, abgeschlossene und konvexe Punktmengen.

Konvexen Körpern können die verschiedensten Masszahlen eindeutig zugeordnet werden, so das Volumen V, die Oberfläche F und das sogenannte Integral der mittleren Krümmung M. (Für letztere ist die Definition Breitenintegral zutreffender.) Umgekehrt ist es durchaus nicht immer möglich, 3 willkürlich gewählte reelle, positive Zahlen a, b, c als V, F, M eines konvexen Körpers zu deuten. Es entsteht das Problem, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen dies möglich ist. Die vollständige Lösung dieses Problems erfordert die Auffindung aller zwischen den genannten Masszahlen bestehenden Relationen. Es ist das Problem des vollständigen Ungleichungssystems.

Dieses Problem ist in voller Allgemeinheit nur unvollständig gelöst, indem eine Ungleichung der Form $V \geqslant f(M,F)$; $[8M^2 < 4\pi^3 F < \pi^2 M^2]$ bis heute unbekannt geblieben ist.

Jeder konvexe Körper kann in einen (M, F, V)-Raum abgebildet werden. Durch Einführung ähnlichkeitsinvarianter Koordinaten

$$x = \frac{4\pi F}{M^2}; \; y = \frac{48\pi^2 V}{M^3} \; \text{(auch } z = \frac{36\pi V^2}{F^3} \text{ wird gelegentlich benützt).}$$

wird Abbildung in eine Ebene bewerkstelligt. Die vorgenommene Normierung und die schon bekannten Ungleichungen reduzieren das Bild auf einen Teilbereich des Einheitsquadrates, wobei Kugeln die Ecke A (1,1), Strecken die Ecke B (0,0) und Kreisscheiben (als Doppelmembranen aufzufassen) den Punkt C ($8/\pi^2$, 0) besetzen. Die fehlende Ungleichung wird zu einer A und C verbindenden Kurve, und diese ist das Bild einer zwischen Kreisscheibe und Kugel interpolierenden Körperschar. (Blaschke-Diagramm)

Es besteht nun die gut begründete Vermutung, dass die gesuchten Extremalkörper *Kugelkreispolyeder* sind, Körper, die aus einer Kugel durch Abschneiden von abzählbar-unendlich vielen, sich nicht überschneidenden Kalotten entstehen.

* Dr. H. Bieri, Alpenstrasse 33, 3084 Wabern

Als "Abschneidungsprinzip" stelle ich mir vor:

a) Möglichst grosse Kalotten.
b) Möglichst viele kongruente Kalotten.
c) Keine Äquatorkanten.
d) Höchstmögliche Symmetrie.

Diesen Forderungen genügt in idealer Weise der "Kugelwürfel", wo 6 kongruente Kalotten, davon 4 um den Äquator herum, abgeschnitten wurden.

Ebensogut entsprechen den 4 Forderungen Kugelkreispolyeder, deren Schichthöhe gleichgross wie die Seite eines dem Äquator einbeschrieben regulären n-Ecks ist. Mit abnehmender Höhe nähert man sich der Kreisscheibe. Wegen der Forderung d) ist die Zahl der um den Äquator herum angeschnittenen Kalotten jedenfalls $2^{(2+i)}$; (= 1,2 . . .)

In den besprochenen Fällen verbleiben auf der Kugeloberfläche lauter sphärische Dreiecke, und man kann ad infinitum maximale Kalotten abschneiden.

Nicht mehr so günstig präsentieren sich die übrigen Fälle, und bei Annäherung an die Kugel taucht das neue, sicher sehr schwere Problem auf, eine sehr grosse Zahl von kongruenten Kalotten abzuschneiden und sodann die komplizierten Lücken maximal zu behandeln.
(Zonale Anordnung ist wahrscheinlich)

Im Spezialfall der Rotationssymmetrie können weitergehende Aussagen gemacht werden. Der Extremalcharakter der Kappenkörper der Kugel mit 1 oder 2 Kappen ist gesichert, ebenso die Minimumeigenschaft der symmetrischen Kugelschichten bezüglich des Volumens. Doch besteht auch hier eine Lücke. Die einzigen konvexen Rotationskörper mit V = 0 sind nämlich Strecken und Kreisscheiben, und es erwächst die neue Aufgabe, interpolierende Körperscharen und neue Ungleichungen aufzufinden. Dies ist nun zu einem schönen Teil gelungen, und zwar in folgenden Etappen:

1. Einführung der polygonalen Rotationskörper mit festem Äquatorradius a.
2. Ableitungsfreie Darstellung von V, F und M.
3. Herleitung von 8 Ungleichungen durch Integralkombination und Übertragung ins Blaschke-Diagramm.

} H. Hadwiger

4. Enveloppenbildung und Auswertung.

Jetzt erwies sich folgende Klasseneinteilung der konvexen Rotationskörper als vorteilhaft:

a)	Halbkörper (H)	abgeschlossen
b)	Symmetrische Körper (S)	
c)	Unsymmetrische Körper (U)	offen

Es ging folgendermassen weiter:

5. Herleitung der 2 fundamentalen Ungleichungen im R_n bei festen Radien und Winkeln. (H. Hadwiger)

6. Spezialisation für den R_3 und Herleitung von 3 weiteren Ungleichungen aus der 1. Hauptungleichung.
7. Diskussion der Gleichheit und Angabe der Extremalkörper.
8. Ausschaltung der allgemeinen dreigliedrigen Extremalkörper mittelst Analyse der Funktionaldeterminante.
9. Separate Behandlung aller anfallenden Körperscharen: Gleichungen, Funktionaldeterminanten.
10. Übertragung ins Blaschke-Diagramm.
11. Berechnung aller kritischen Punkte (Ablösung einer Körperschar durch eine andere).

In unserem Problem, das als Abbildungsproblem aufgefasst wird, interessiert in erster Linie der Rand des Bildes. Randpunkte des Bildes sind entweder Bilder von Randpunkten des Originals oder dann von inneren Punkten des Originals mit verschwindender Funktionaldeterminante.

Von einem Punkte des Einheitsquadrates aus mit den Koordinaten (1/2, 0) kann man füglich einen äusseren und einen inneren Rand unterscheiden. Das Schlussresultat, nach Körperklassen aufgeteilt, lässt sich jetzt folgendermassen formulieren:

a) Allgemeine Klasse der konvexen Körper (K)

Rand:

Kappenkörper der Kugel mit beliebig vielen Kappen (inklusive Strecken und Kugeln)

Ebene konvexe Bereiche. (Doppelmembranen).

Kugelkreispolyeder (Kalottenverteilung nur in speziellen Fällen zu vermuten).

Unscharfer Rand:

Parabel durch B u. C als Übertragung der Ungleichung von Grömer. Verschärfung mit Hilfe eines Extremalproblems über Dicke, Durchmesser und Orthogonalprojektion auf eine Ebene

b) Klasse (H)

Äusserer Rand:

Kappenkörper der Halbkugel-Zylinder mit der konstanten Zylinderlänge $l = a(2-\pi/4)$.

Halbkugelzylinder. (Die Halbkugel liegt im Innern des Bildes).

Zylinder-Halbkugelschichten.

Innerer Rand:

Lange Zylinder. (Grenzlänge bekannt)

Spezielle Kegelstümpfe.

Kegel, Öffnungswinkel begrenzt.

Halblinsen mit kleinem Öffnungswinkel.

Kappenkörper einer speziellen Halblinse.

c) Klasse (S)

Äusserer Rand:

Kappenkörper der Kugel mit 2 Kappen

Symmetrische Kugelschichten.

Innerer Rand:

Doppellinsen mit beschränktem Öffnungswinkel.

Kappenkörper einer speziellen Doppellinse.

Symmetrische Doppelkegel, Öffnungswinkel begrenzt.

Lange Zylinder

d) Vereinigungsmenge (H) ∪ (S)

Äusserer Rand:

Wie bei (S)

Innerer Rand:

Symmetrische Linsen mit beschränktem Öffnungswinkel.

Kappenkörper einer speziellen Doppellinse, wobei der Kappenwinkel sich nicht bis zur Grenzlage öffnen kann. (Der zugehörige symmetrische Doppelkegel liegt im Innern des Bildes!)

Kegel, Öffnungswinkel eingeschränkt, Rest wie bei (H).

Alle Übergangspunkte sind bekannt. Bemerkenswert ist, dass der 1. Öffnungswinkel des Grenzkegels übereinstimmt mit dem Flächenwinkel des regulären Tetraeders, während der 2. transzendent ist. Die Länge des Grenzzylinders aber ist Wurzel einer kubischen Gleichung und beträgt $l \sim a \cdot 5{,}630072379$. Im Halbkörperproblem ist der äussere Rand glatt, während beim inneren Rand beim Übergang vom Kegel zum Kappenkörper in allen Klassen eine Ecke auftritt. Der Kugelpunkt sowie B und C sind immer Eckpunkte.

Legt man nun Parallelen zu den Koordinatenachsen, so kann man die Extremaleigenschaften der Randkörper ablesen.

In einem Intervall $^8/\pi^3 < x < x^*$ schneiden Parallelen zur y-Achse den Bildbereich 4 x, im übrigen Intervall nur 2 x. Ebenso liefern Parallelen zur x-Achse im Intervall $0 < y < y^*$ 4 Schnittpunkte, im Restintervall nur 2. Es treten also, was a priori kaum vorauszusehen war, *relative Extrema* auf, wobei die relativen Maxima kleiner sind als die relativen Minima. Man kann den interessanten Tatbestand auch so ausdrücken: Im Punkte $(8/\pi^2, 0)$ ist das absolute Minimum von y unstetig, indem es von 0 auf einen endlichen (bekannten) Wert springt und hernach mit x monoton auf Null abnimmt.

Dasselbe gilt auch für V bei festem M und F.

Was nun die offene Teilklasse (U) betrifft, kann ich nur Teilresultate angeben[1].

a) Körper dieser Klasse zerschneide ich längs des Äquators mit Radius a und schiebe eine symmetrische Kugelschicht mit Deckradius a ein, wobei die eine Körperhälfte glatt anschliessen soll. Heissen V^*, F^*, M^* die Masszahlen des Gesamtkörpers, so gilt in der 2. Minkowskischen Ungleichung $F^* - 3M^*V^* \geqslant 0$ das Gleichheitszeichen genau dann, wenn der Gesamtkörper eine Kugel oder deren Kappenkörper, wobei

die Kappen verschiedene sein dürfen. Nun lassen sich aber 2 ungleiche Kappen durch 2 kongruente ersetzen, ohne dass die Masszahlen ändern.
Die günstigen Körper sind also Kappenkörper der symmetrischen Linsen. Extremal können sie nur dann sein, wenn man den Öffnungswinkel der Linse einschränkt, wie dies in der Klasse (S) dargelegt wurde. Ist dieser Öffnungswinkel kleiner als der Grenzwinkel, so sind die zugehörigen Doppellinsen extremal.

b) Eliminiert man in der Parameterdarstellung der Zylinderkurve den Parameter $\lambda = {}^{4\pi a}/M$, so erhält man das Zylinderfunktional $\emptyset$ (x,y). In dieses setzt man die Koordinaten des unsymmetrischen Zylinder-Doppelkegelstumpfs ein, der in der 2. fundamentalen modifizierten Ungleichung von H. Hadwiger das Gleichheitszeichen beansprucht. Resultiert nun $\emptyset\,(x,y) > 0$ und ist zugleich $x \leqslant 0{,}689356983\ldots$, so liegt der Bildpunkt des Körpers oberhalb der Zylinderkurve, also im Inneren des Bildbereichs, und der Körper ist sicher nicht extremal.
c) Kenntnis der Extremaleigenschaften der Kegel bei 2 Masszahlen erlaubt den Schluss, dass die Klasse (U) in diesem speziellen Bereich unschädlich ist.
d) Es verbleibt nur noch die Frage, ob die Kurve der speziellen Kegelstümpfe aus (H) unterboten werden kann. Ich vermute, dass dies nicht der Fall ist; doch ist ein Beweis schwierig zu erbringen, sind doch die Vergleichskörper 5-parametrig!

Es ist sehr interessant, zu konstatieren, welch entscheidenden Einfluss die Bedeutung der Rotationssymmetrie auf ein Problem ausüben kann.

Und nun das allgemeine Problem? Eine vollständige Lösung erscheint höchst problematisch, ist doch ein unendlicher Prozess im Spiel. Man wird sich wahrscheinlich noch lange, ja immer mit den Teillösungen von H. Hadwiger begnügen müssen.

(H. Hadwiger: Altes und Neues über konvexe Körper, 4. Kapitel § 29. Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkt aus. Birkhäuserverlag, Basel und Stuttgart.)

1 Nachträglich kann ich folgende ergänzende Resultate angeben:
a) Es wurden mehrere hundert einparametrige Scharen von Doppelkegelstümpfen getestet, und immer fiel mit $\emptyset\,(x, y) = 0$ $x > x^{**}$ aus, wobei x^{**} durch den Zylinder mit der kritischen Länge $l = a \cdot 5{,}630072379$ induziert wird
b) Für *Zylinder-Doppelkegelstümpfe* mit der Zylinderlänge l scheint ziemlich sicher, dass für $l \geqslant \pi\text{-}2$ $\emptyset\,(x, y)$ keine nichttriviale Nullstelle besitzt, während für $l < \pi\text{-}2$ diese Nullstelle wie unter a) unschädlich ist. Diese Resultate wurden unter Mitwirkung von Prof. Dr. M. Schürer erreicht.