

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 8 (1913)

Artikel: Barwert des Zinsüberschusses aus den mathematischen Reserven der
Lebensversicherungen

Autor: Göring, E.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-967478>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Barwert des Zinsüberschusses aus den mathematischen Reserven der Lebensversicherungen.

Von Dr. phil. E. Göring.

Ist eine Lebensversicherungsgesellschaft gehalten, die mathematischen Reserven ihres ganzen Versicherungsbestandes oder eines Teiles desselben gemäss vertraglich oder gesetzlich bestimmten besondern Vorschriften anzulegen, so wird die Gesellschaft aus diesen Reserven einen andern (im allgemeinen niedrigeren) Zinsfuss erzielen als von ihrem sonstigen Vermögen. Die angeführten Reserven werden nichtsdestoweniger gegenüber den rechnungsmässigen Grundlagen einen Zinsüberschuss erzielen (der null oder negativ werden kann). Für die Gewinn- und Verlustabschätzungen der Gesellschaft kommt unter andern auch der Barwert dieses Zinsüberschusses in Betracht.

Der rechnungsmässige Zinsfuss sei i , die mathematischen Reserven seien hingegen, wie wir annehmen wollen, dauernd zum Zinsfusse $i + \sigma$ angelegt. Für eine vorgegebene Versicherung sei nun der Barwert Z des Zinsüberschusses auf den Reserven, oder kurz ausgedrückt, der Barwert des Superzinses zu berechnen.

Die Dauer der Versicherung sei n , die Reserve nach $t - 1$ Jahren ($t \leq n$) betrage ${}_{t-1}V$. (Wenn nichts

anderes angegeben ist, sollen die internationalen Bezeichnungen der Versicherungstechnik gelten; ferner nehmen wir bei der Durchführung der Berechnungen an, dass die Todesfälle nur per Ende des Versicherungsjahres eintreffen.) Für das Versicherungsjahr t beträgt der Reservezins $(i + \sigma) \cdot {}_{t-1}V$, also ist per Ende des Versicherungsjahres neben dem rechnermässigen Zinse $i \cdot {}_{t-1}V$ der Zinsüberschuss $\sigma \cdot {}_{t-1}V$ fällig. Am Anfange des Jahres t beträgt der Barwert dieses Zinsüberschusses $v \cdot \sigma \cdot {}_{t-1}V$ und beim Beginne der Versicherung $\frac{D_{x+t-1}}{D_x} \cdot v \cdot \sigma \cdot {}_{t-1}V$. Die Summe dieser Barwerte für alle Versicherungsjahre ergibt den Gesamtbarwert des Superzinses; es ist also

$$Z = \frac{\sigma \cdot v}{D_x} \cdot (D_x \cdot {}_0V + D_{x+1} \cdot {}_1V + D_{x+2} \cdot {}_2V + \dots + D_{x+n-1} \cdot {}_{n-1}V). \quad (1)$$

Wir haben zur Diskontierung den Zinsfuss i und nicht den Zinsfuss $i + \sigma$ benützt, weil der sich jedes Jahr ergebende Zinsüberschuss aus der Reserve nicht mehr zur Reserve selber, sondern zum übrigen Vermögen der Gesellschaft gehört und wir in dieser Arbeit von der Betrachtung des Zinsenergebnisses aus dem nicht zur Reserve gehörenden Vermögen absehen wollen.

Der Ausdruck (1) steht nun in einem einfachen Zusammenhang mit dem ersten Differentialquotienten der Nettoprämie nach dem Zinsfusse. Um diese Beziehung in möglichst allgemeiner Fassung zu erhalten, nehmen wir an, es sei eine einmalige Nettoprämie ${}_0V$ (= Reserve zu Anfang der Versicherungszeit) und eine jährlich sich verändernde Jahresprämie vorgesehen,

und zwar betrage die jährliche Nettoprämie ${}_{t-1}P$ für den Beginn des Versicherungsjahres t .

Wird der Barwert der Versicherungsleistungen mit A bezeichnet, so ist, da dieser gleich dem Barwerte der Nettoprämien ist,

$$A = {}_0V + \frac{1}{D_x} (D_x \cdot {}_0P + D_{x+1} \cdot {}_1P + D_{x+2} \cdot {}_2P + \dots + \dots + D_{x+n-1} \cdot {}_{n-1}P).$$

(2)

Ist nur eine einmalige, aber keine jährliche Nettoprämie vorgesehen, so ist

$$(2^a) \quad A = {}_0V;$$

falls keine einmalige Nettoprämie und eine gleichbleibende Jahresprämie P vorgesehen ist und die Prämienzahlung nach Ablauf von m Jahren aufhört, so ist

$$(2^b) \quad A = a_{x, \overline{m}} \cdot P,$$

da in (2) dann

$${}_0V = 0, \quad {}_0P = {}_1P = {}_2P = \dots = {}_{t-1}P = P \text{ und} \\ {}_tP = {}_{t+1}P = \dots = {}_{n-1}P = 0 \text{ ist.}$$

Um den Ausdruck (1) mittelst der Differentialquotienten der Nettoprämien nach dem Zinsfusse transformieren zu können, nehmen wir für den Moment an, dass das für unsere Versicherung in Frage kommende Zinserträgnis überhaupt $i + A$ beträgt, d. h. nicht nur die Reserven, sondern auch die Jahresnettoprämien, die ja erst am Ende des Jahres zur Verwendung kommen (sei es zur Ergänzung der Reserven, sei es zur Deckung der eingetretenen Versicherungsfälle), und insbesondere die im Laufe jedes Jahres entstehenden Superzinsen auf Reserve und Jahresnettoprämie im

Beträge von $\Delta \cdot ({}_{t-1}V + {}_{t-1}P)$ sind zum Zinsfusse $i + \Delta$ anzulegen. (Δ ist eine vom eingangs erwähnten Superzinsfuss σ unabhängig gewählte Grösse.) Die Nettoprämien bleiben zum Zinsfusse i eingestellt, ebenso die Reserven ${}_{t-1}V \{t = 1, 2, 3 \dots n\}$. Der Barwert der künftigen Einnahmen wird dann nicht mehr vom Barwerte der künftigen Ausgaben genau aufgehoben, sondern es bleibt als Differenz ein Barwert B des Zinsgewinnes übrig. Dieser Barwert beträgt also einerseits

$$B = {}_0V(i) + \frac{1}{D_x(i + \Delta)} \cdot [{}_0P(i) \cdot D_x(i + \Delta) + \\ + {}_1P(i) \cdot D_{x+1}(i + \Delta) + {}_2P(i) \cdot D_{x+2}(i + \Delta) + \dots \\ (3) \dots + {}_{n-1}P(i) \cdot D_{x+n-1}(i + \Delta)] - A(i + \Delta).$$

(Für $\Delta = 0$ verschwindet nach (2) dieser Ausdruck.) Die eingeklammerten Grössen $(i + \Delta)$, resp. (i) sind keine Faktoren, sondern haben anzudeuten, dass die Versicherungsgrössen, zu denen sie gehören, zum Zinsfusse $(i + \Delta)$, resp. i zu berechnen sind.

Andererseits ist aber auch

$$B = \frac{\Delta \cdot v(i + \Delta)}{D_x(i + \Delta)} \cdot [\{{}_0P(i) + {}_0V(i)\} \cdot D_x(i + \Delta) + \\ + \{{}_1P(i) + {}_1V(i)\} \cdot D_{x+1}(i + \Delta) + \\ (4) \quad + \{{}_2P(i) + {}_2V(i)\} \cdot D_{x+2}(i + \Delta) + \dots \\ \dots + \{{}_{n-1}P(i) + {}_{n-1}V(i)\} \cdot D_{x+n-1}(i + \Delta)].$$

Nach den zur Prämien- und Reserverechnung angewandten Grundlagen liegt nämlich für die vorgegebene Versicherung während des Versicherungsjahres t das Kapital $\{{}_{t-1}V(i) + {}_{t-1}P(i)\}$ auf Zins. Vom erreichten

Zinse $(i + \Delta) \cdot \{ {}_{t-1}V(i) + {}_{t-1}P(i) \}$ ist, wie schon oben angedeutet, die Summe $\Delta \cdot \{ {}_{t-1}V(i) + {}_{t-1}P(i) \}$ überrechnungsmässig, d. h. ist weder zur Deckung der fällig gewordenen Verpflichtungen, noch zur Bildung der neuen Reserve notwendig. Der Barwert dieses Gewinnes an Zinsen ist nun (analog wie bei der Ableitung der Formel (1), nur dass wir diesen Barwert zum Zinsfusse $i + \Delta$ rechnen) $v(i + \Delta) \cdot \Delta \cdot \{ {}_{t-1}V(i) + {}_{t-1}P(i) \}$ beim Beginne des Rechnungsjahres t , und beim Beginne der Versicherung überhaupt: $v(i + \Delta) \cdot \frac{D_{x+t-1}(i + \Delta)}{D_x(i + \Delta)} \cdot \Delta \cdot \{ {}_{t-1}V(i) + {}_{t-1}P(i) \}$; addiert man diese Werte für alle t von $t=1$ bis $t=n$, so erhält man den Barwert des Zinsengewinnes, wie er in (4) angegeben ist.

Lässt man nun Δ gegen 0 hin abnehmen, d. h. macht man $\lim \Delta = 0$, so ergibt sich gemäss den Elementen der Differentialrechnung aus (3)

$$\begin{aligned}
 B &= {}_0V + \\
 &\quad (\lim \Delta = 0) \\
 &+ \frac{{}_0P \cdot D_x + {}_1P \cdot D_{x+1} + {}_2P \cdot D_{x+2} + \dots + {}_{n-1}P_{x+n-1}}{D_x} + \\
 &+ \Delta \left\{ {}_1P \cdot \frac{\delta}{\delta i} \frac{D_{x+1}}{D_x} + {}_2P \cdot \frac{\delta}{\delta i} \frac{D_{x+2}}{D_x} + {}_3P \cdot \frac{\delta}{\delta i} \frac{D_{x+3}}{D_x} + \right. \\
 &\quad \left. + \dots + {}_{n-1}P \cdot \frac{\delta}{\delta i} \frac{D_{x+n-1}}{D_x} \right\} - A - \Delta \cdot \frac{\delta A}{\delta i}.
 \end{aligned}$$

Hierin sind wieder alle Versicherungsgrössen (ebenso ihre Differentialquotienten) zum Zinsfusse i angenommen.

Infolge Gleichung (2) reduziert sich dieser Ausdruck zu

$$\begin{aligned}
 B &= A \cdot \left\{ {}_1P \cdot \frac{\delta}{\delta i} \frac{D_{x+1}}{D_x} + {}_2P \cdot \frac{\delta}{\delta i} \frac{D_{x+2}}{D_x} + \right. \\
 (5) \quad &+ \left. {}_3P \cdot \frac{\delta}{\delta i} \frac{D_{x+3}}{D_x} + \dots + {}_{n-1}P \cdot \frac{\delta}{\delta i} \frac{D_{x+n-1}}{D_x} - \frac{\delta A}{\delta i} \right\}
 \end{aligned}$$

Aus (4) ergibt sich direkt für $\lim \Delta = 0$:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\Delta \cdot v}{D_x} \cdot [({}_0P + {}_0V) \cdot D_x + ({}_1P + {}_1V) \cdot D_{x+1} + \\
 (6) \quad &+ ({}_2P + {}_2V) \cdot D_{x+2} + \dots + \\
 &+ ({}_{n-1}P + {}_{n-1}V) \cdot D_{x+n-1}],
 \end{aligned}$$

worin ebenfalls alle Grössen zum Zinsfusse i zu berechnen sind.

Die Gleichungen (5) und (6) können, trotzdem sie nur für $\lim \Delta = 0$ gelten, nur dann gleichzeitig bestehen, wenn

$$\begin{aligned}
 &\frac{v}{D_x} \cdot [({}_0P + {}_0V) \cdot D_x + ({}_1P + {}_1V) \cdot D_{x+1} + \\
 &+ ({}_2P + {}_2V) \cdot D_{x+2} + \dots + ({}_{n-1}P + {}_{n-1}V) \cdot D_{x+n-1}] = \\
 (7) \quad &= {}_1P \cdot \frac{\delta}{\delta i} \frac{D_{x+1}}{D_x} + {}_2P \cdot \frac{\delta}{\delta i} \frac{D_{x+2}}{D_x} + \dots + \\
 &+ {}_{n-1}P \cdot \frac{\delta}{\delta i} \frac{D_{x+n-1}}{D_x} - \frac{\delta A}{\delta i}.
 \end{aligned}$$

Die Grösse Δ ist hierin gänzlich herausgefallen, die Gleichung (7) hat also mit der Bedingung $\lim \Delta = 0$ nichts mehr zu tun.

Es gilt noch die Grösse $\frac{\delta A}{\delta i}$ aus Gleichung (7) herauszuschaffen. Hierzu differenziere man Gleichung (2) nach dem Zinsfusse i ; man erhält

$$(8) \quad \frac{\delta A}{\delta i} = \frac{\delta_0 V}{\delta i} +$$

$$+ \frac{\frac{\delta_0 P}{\delta i} \cdot D_x + \frac{\delta_1 P}{\delta i} \cdot D_{x+1} + \frac{\delta_2 P}{\delta i} \cdot D_{x+2} + \dots + \frac{\delta_{n-1} P}{\delta i} \cdot D_{x+n-1}}{D_x} +$$

$$+ {}_1P \cdot \frac{\delta}{\delta i} \frac{D_{x+1}}{D_x} + {}_2P \cdot \frac{\delta}{\delta i} \frac{D_{x+2}}{D_x} + \dots +$$

$$+ {}_{n-1}P \cdot \frac{\delta}{\delta i} \frac{D_{x+n-1}}{D_x}.$$

Setzt man diesen Wert für $\frac{\delta A}{\delta i}$ in (7) ein, so ergibt sich

$$\frac{v}{D_x} \cdot [({}_0P + {}_0V) \cdot D_x + ({}_1P + {}_1V) \cdot D_{x+1} + ({}_2P + {}_2V) \cdot D_{x+2} +$$

$$+ \dots + ({}_{n-1}P + {}_{n-1}V) \cdot D_{x+n-1}] = - \frac{\delta_0 V}{\delta i} +$$

$$\frac{\frac{\delta_0 P}{\delta i} \cdot D_x + \frac{\delta_1 P}{\delta i} \cdot D_{x+1} + \frac{\delta_2 P}{\delta i} \cdot D_{x+2} + \dots + \frac{\delta_{n-1} P}{\delta i} \cdot D_{x+n-1}}{D_x} \quad (9)$$

Diese Gleichung zeigt den sehr instruktiven Zusammenhang zwischen den Differentialquotienten der Netto­prämien nach dem Zinsfusse und den Reserven für irgend eine Versicherungsart auf ein Leben. (Für Versicherungen auf mehrere Leben ist diese Formel entsprechend zu erweitern.)

Ist nur eine einmalige Prämie, aber keine Jahres­prämie zahlbar, also wenn Gleichung (2^a) gilt, geht Gleichung (9) über in

$$v \cdot \frac{{}_0V \cdot D_x + {}_1V \cdot D_{x+1} + {}_2V \cdot D_{x+2} + \dots + {}_{n-1}V \cdot D_{x+n-1}}{D_x} =$$

$$(9^a) \quad = - \frac{\delta_0 V}{\delta i};$$

falls nur gleichbleibende Jahresnettoprämien P während m Jahren zahlbar sind, also wenn Gleichung (2^b) gilt, geht Gleichung (9) über in

$$v \cdot \frac{{}_0V \cdot D_x + {}_1V \cdot D_{x+1} + {}_2V \cdot D_{x+2} + \dots + {}_{n-1}V \cdot D_{x+n-1}}{D_x} =$$

$$(9^b) \quad = \left(-\frac{\delta P}{\delta i} - v \cdot P \right) \cdot a_{x, \overline{m}},$$

falls man noch das Glied mit P auf die rechte Seite der Gleichung bringt.

Um nun die Gleichung (9) zur Transformierung des Ausdruckes für den Barwert des Zinsüberschusses in Gleichung (1) benützen zu können, bringt man in (9) die Glieder mit ${}_0P, {}_1P, \dots, {}_{n-1}P$ auf die rechte Seite und multipliziert beide Seiten mit dem Superzinsfuß σ ; man erhält dann durch Einsetzen in die Gleichung (1)

$$(10) \quad Z = \sigma \left\{ -\frac{\delta_0 V}{\delta i} - \frac{1}{D_x} \left[\left(\frac{\delta_0 P}{\delta i} + v \cdot {}_0P \right) \cdot D_x + \right. \right.$$

$$+ \left(\frac{\delta_1 P}{\delta i} + v \cdot {}_1P \right) \cdot D_{x+1} + \left(\frac{\delta_2 P}{\delta i} + v \cdot {}_2P \right) \cdot D_{x+2} + \dots$$

$$\left. \left. \dots + \left(\frac{\delta_{n-1} P}{\delta i} + v \cdot {}_{n-1}P \right) \cdot D_{x+n-1} \right] \right\}$$

Diese für alle Versicherungskombinationen geltende Formel (für Versicherungen auf mehrere Leben ist sie entsprechend zu erweitern) lässt sich etwa auf folgende Weise in Worten ausdrücken:

„Zur Bestimmung des Barwertes des aus einer vorgelegten Versicherung zu erzielenden Superzinses bilde man die ersten Differentialquotienten der Netto-

prämien nach dem Zinsfusse, addiere die mit dem Abzinsungsfaktor (v) multiplizierten Jahresnettoprämien zu den zuvor berechneten Differentialquotienten derselben, bestimme die Barwerte der so erhaltenen Grössen $\left(\frac{\delta_{t-1}P}{\delta i} + v \cdot {}_{t-1}P\right)$ (indem man sie als Erlebensfallkapitale betrachtet, welche zur Zeit der entsprechenden Prämienzahlung fällig sind), addiere diese Barwerte, sowie den Differentialquotienten der neben den Jahresprämien noch zahlbaren einmaligen Nettoprämie zusammen, und multipliziere diese Summe mit umgekehrten Vorzeichen mit dem Superzinsfusse (σ).“

Ist nur eine einmalige Nettoprämie $A = {}_0V$ vorgesehen, geht Formel (9) einfach über in

$$(10^a) \quad Z = -\sigma \cdot \frac{\delta_0 V}{\delta i},$$

und ist nur eine während m Jahren zahlbare, gleichbleibende Jahresnettoprämie P vorgesehen, so geht Formel (10) über in

$$(10^b) \quad Z = \sigma \left\{ -\frac{\delta P}{\delta i} - v \cdot P \right\} \cdot a_{x, \bar{m}}.$$

Durch die Formeln (10^a) und (10^b) werden die meisten praktisch vorkommenden Fälle erschöpft.

Besitzt man die Rechnungsgrundlagen nicht nur zum Zinsfusse i , sondern auch zu einem benachbarten Zinsfusse $i + \varepsilon$, wo ε nicht gleich σ sein muss, so ist näherungsweise

$$(11) \quad \frac{\delta P}{\delta i} = \frac{P(i + \varepsilon) - P(i)}{\varepsilon}.$$

Einen genaueren Wert erhält man, wenn uns drei einander benachbarte Zinsfüsse zur Verfügung stehen (d. h. die Rechnungsgrundlagen zu diesen Zinsfüssen); z. B. die Zinsfüsse i , $i + \delta$, $i + \varepsilon$. Es ist dann

$$P(i + \delta) = P(i) + \delta \cdot \frac{\delta P(i)}{\delta i} + \frac{\delta^2}{2} \cdot \frac{\delta^2 P(i)}{\delta i^2} + \dots$$

und

$$P(i + \varepsilon) = P(i) + \varepsilon \cdot \frac{\delta P(i)}{\delta i} + \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{\delta^2 P}{\delta i^2} + \dots$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, bis auf Glieder mit δ^2 und ε^2 genau,

$$(12) \quad \frac{\delta P(i)}{\delta i} = \frac{\frac{\varepsilon}{\delta} \cdot P(i + \delta) - \frac{\delta}{\varepsilon} \cdot P(i + \varepsilon) - \left(\frac{\varepsilon}{\delta} - \frac{\delta}{\varepsilon}\right) \cdot P(i)}{\varepsilon - \delta}$$

Die Ausdrücke (11) und (12) gelten auch entsprechend für ${}_tP$ und ${}_oV$.

Setzen wir den Ausdruck (11) in (10^b) ein, so erhält man als Näherungsformel

$$(13) \quad Z = \sigma \left\{ \frac{P(i) - P(i + \varepsilon)}{\varepsilon} - v \cdot P \right\} \cdot a_{x, \bar{m}}.$$

Für einmalige und für veränderliche Prämien erhält man die entsprechenden Näherungsformeln.

Unter Berücksichtigung von (2^b) lässt sich (13) noch schreiben:

$$(14) \quad Z = \sigma \left\{ \frac{A - a_{x, \bar{m}} \cdot P(i + \varepsilon)}{\varepsilon} - v \cdot A \right\}.$$

Um die Gleichungen (10), (10^a) und (10^b) direkt anwenden zu können, müssen die Differentialquotienten der Versicherungsgrössen in bezug auf den Zinsfuss aufgestellt sein.

Die wichtigsten dieser Differentialquotienten seien, da sie nicht allgemein bekannt sind, hier gegeben:

$$\text{Für } v = \frac{1}{1+i} \text{ ist} \quad (15) \quad \frac{\delta v}{\delta i} = -v^2$$

$$\text{Für } d = 1 - v = \frac{i}{1+i} \text{ ist} \quad (16) \quad \frac{\delta d}{\delta i} = +v^2$$

Weiter ist

$$(17) \quad \frac{\delta v^n}{\delta i} = -n \cdot v^{n+1}$$

$$(18) \quad \frac{\delta D_x}{\delta i} = -x \cdot v \cdot D_x$$

$$(19) \quad \frac{\delta N_x}{\delta i} = -v(xD_x + (x+1)D_{x+1} + (x+2)D_{x+2} + \dots) = -v(xN_x + S_{x+1}).$$

Zu beachten ist, dass hier $N_x = \sum D_x$ und $S_x = \sum N_x$ gesetzt ist.

$$(20) \quad \frac{\delta C_x}{\delta i} = -v \cdot (x+1) C_x$$

$$(21) \quad \frac{\delta M_x}{\delta i} = -v(xM_x + R_x)$$

$$(22) \quad \frac{\delta a_{x, \bar{n}|}}{\delta i} = -v \cdot \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - nN_{x+n}}{D_x} = -v \left\{ \frac{S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n}}{D_x} - a_{x, \bar{n}|} \right\}$$

$$(23) \quad \frac{\delta \frac{1}{a_{x, \bar{n}|}}}{\delta i} = \frac{v}{a_{x, \bar{n}|}} \cdot \left\{ \frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} - 1 \right\}.$$

Für die wichtigsten *einmaligen* und *jährlichen* *Nettoprämien* leitet man ab:

Für $E_{x, \overline{n}|} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$ (Einmalprämie der Erlebensfallversicherung) ist

$$(24) \quad \frac{\delta E_{x, \overline{n}|}}{\delta i} = -n \cdot v \cdot E_{x, \overline{n}|}.$$

Für $P_{x, \overline{n}|} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$ (Jahresprämie der Erlebensfallversicherung) ist

$$(25) \quad \frac{\delta P_{x, \overline{n}|}}{\delta i} = -v \cdot P_{x, \overline{n}|} \cdot \left(\frac{nN_x - S_x + S_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} + 1 \right).$$

Für die Einmalprämie der gemischten Versicherung ist

$$(26) \quad \frac{\delta A_{x, \overline{n}|}}{\delta i} = -v \cdot \left[a_{x, \overline{n}|} - d \cdot \frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{D_x} \right]$$

und für die Jahresprämie der gemischten Versicherung ist

$$(27) \quad \frac{\delta P_{x, \overline{n}|}}{\delta i} = -v \left[1 + P_{x, \overline{n}|} - \frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{D_x} \right].$$

Wird die Jahresprämie für die gemischte Versicherung nur während m Jahren bezahlt, so erhält man

$$(28) \quad \frac{\delta m P_{x, \overline{n}|}}{\delta i} = -\frac{v}{a_{x, \overline{m}|}} \left[1 + v \cdot a_{x, \overline{n}|} + \frac{d[S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}]}{D_x} - A_{x, \overline{n}|} \frac{S_x - S_{x+m} - mN_{x+m}}{N_x - N_{x+m}} \right].$$

Als *Barwerte des Superzinses* erhält man demnach gemäss Formeln (10^a) und (10^b):

a) Für Versicherungen mit *einmaliger Prämienzahlung*:

Gemischte Versicherung mit einmaliger Prämienzahlung: Der Barwert des Superzinses ist nach (26)

$$(29) \quad Z(A_{x, \bar{n}|}) = \\ = \sigma \cdot v \cdot \left[\mathfrak{a}_{x, \bar{n}|} - d \frac{S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n}}{D_x} \right].$$

Für die temporäre Leibrente gegen Einmaleinlage ist bei analoger Bezeichnung nach (22)

$$(30) \quad Z(\mathfrak{a}_{x, \bar{n}|}) = Z(a_{x, \overline{n-1}|}) \\ = \sigma \cdot v \cdot \left[\frac{S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n}}{D_x} - \mathfrak{a}_{x, \bar{n}|} \right].$$

b) Für Versicherungen mit *jährlicher Prämienzahlung*:

Für die gemischte Versicherung, für die während der ganzen Versicherungsdauer eine gleichbleibende Jahresprämie gezahlt wird, ist der Barwert des Superzinses gemäss (27)

$$(31) \quad Z(P_{x, \bar{n}|}) = \sigma \cdot v \left[\mathfrak{a}_{x, \bar{n}|} - \frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \right].$$

Wird die Prämie nur während m ($< n$) Jahren bezahlt, so ist nach (28)

$$(32) \quad Z(mP_{x, \bar{n}|}) = \sigma \cdot v \cdot \left[\mathfrak{a}_{x, \bar{m}|} - \frac{d(S_x - S_{x+n} - nN_{x+n})}{D_x} + \right. \\ \left. - A_{x, \bar{n}|} \cdot \frac{S_x - S_{x+m} - mN_{x+m}}{N_x - N_{x+m}} \right].$$

Als Spezialfälle von (31) und (32) erhält man für $n = \omega$ für die lebenslängliche Versicherung mit lebenslänglicher Prämienzahlung:

$$(33) \quad Z(P_x) = \sigma \cdot v \cdot \left[a_x - \frac{S_x}{N_x} \right]$$

und für die lebenslängliche Versicherung mit abgekürzter Prämienzahlung:

$$(34) \quad Z(mP_x) = \sigma \cdot v \cdot \left[a_x + \right. \\ \left. - d \cdot \frac{S_x}{D_x} - A_x \cdot \frac{S_x - S_{x+m} - mN_{x+m}}{N_x - N_{x+m}} \right]$$

Endlich ist noch für die Terme-fixe-Versicherung mit jährlicher Prämienzahlung:

$$(35) \quad Z(P_x[A_{\bar{n}}]) = \sigma \cdot v^{n+1} \cdot \left[n - \frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \right]$$

und gemäss (25) für die Erlebensfallversicherung mit jährlicher Prämienzahlung:

$$(36) \quad Z(P_{x,\bar{n}}^1) = \sigma \cdot v \cdot E_{x,\bar{n}} \cdot \left[n - \frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \right].$$

Im folgenden seien einige konkrete Zahlenbeispiele gegeben, und zwar suchen wir den Barwert von $0,1\%$ Superzins. Für einen andern Superzins kann der Barwert nach unsern Formeln proportional gerechnet werden.

a) Beispiele mit *einmaliger Prämienzahlung*:

Nach der Tafel R. F. (rentiers français) $3\frac{1}{2}\%$ ist für eine lebenslänglich jährlich postnumerando zahlbare Leibrente für die Beitrittsalter 50 und 70 der Barwert des Superzinses [gemäss (30), wo noch $n = \omega$ zu setzen ist]

$Z(a_{50}) = 152,52$ in ‰ der Rente oder $10,137$ in ‰ der Einmaleinlage.

$Z(a_{70}) = 42,89$ in ‰ der Rente oder $5,272$ in ‰ der Einmaleinlage.

Für eine gemischte Versicherung mit einmaliger Prämie ist beim Beitrittsalter 40 und der Dauer 25 nach der Tafel der 17 Englischen Gesellschaften $3\frac{1}{2}\%$ der Barwert des Superzinses

$Z(A_{40, \overline{25}|}) = 9,270$ in ‰ der Versicherungssumme

und nach denselben Grundlagen ist für eine lebenslängliche Versicherung mit Einmalprämie [in (29) ist $n = \omega$ zu setzen] bei den Beitrittsaltern 30 und 50:

$Z(A_{30}) = 8,881$ ‰ der Summe.

$Z(A_{50}) = 8,622$ ‰ „ „

Für die Terme-fixe-Versicherung mit einmaliger Prämie (einfache Spareinlage) erhält man für die Dauer 25 und den Zinsfuß $3\frac{1}{2}\%$ gemäss (15) und (10^a)

$Z(v^{25}) = 10,221$ ‰ der Summe.

(NB.: Wenn das Resultat in ‰ der Summe ausgedrückt werden soll und der Superzinsfuß $0,1\%$ ist, erhält man direkt die gesuchten Werte, wenn $\sigma = 1$ gesetzt wird.)

b) Beispiele mit *jährlicher Prämienzahlung*:

Barwert von $0,1\%$ Superzins in ‰ der Summe nach der Tafel der 17 Englischen Gesellschaften $3\frac{1}{2}\%$ und nach der Tafel der 23 deutschen Gesellschaften M & W^I $3\frac{1}{2}\%$:

	Alter	17 E. G.	M & W ¹	
Lebenslängl. mit lebenslängl. Prämienzahlung	30	3,687	3,633	
" " " "	40	3,637	3,475	
" " 30-jähriger "	30	4,824	4,714	
" " 25 " "	40	4,837	4,602	
" " 20 " "	50	4,353	4,073	
" " 20 " "	30	5,853	5,765	
Gemischt	Dauer 30	30	4,559	4,458
" "	" 25	40	4,259	4,083
" "	" 20	50	3,595	3,412
" "	" 20	30	4,410	4,354
Terme-fixe	" 30	30	6,161	6,200
" "	" 25	40	5,986	6,039
" "	" 20	50	5,607	5,670
" "	" 20	30	5,324	5,344
Temporäre Versicherung	" 30	30	0,563	0,674
" "	" 20	50	0,704	0,752

(NB.: Es ist $Z(P_{x,\overline{n}|}^1) = Z(P_{x,\overline{n}|}) - Z(P_{x,\overline{n}|}^1)$, d. h. man erhält unsern Barwert für eine temporäre Versicherung, indem man vom Werte der gemischten Versicherung den entsprechenden für die Erlebensfallversicherung subtrahiert.)