

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 42 (1942)

Artikel: Zur Praxis der Reserveberechnung nach der t-Methode

Autor: Jecklin, Heinrich

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-966910>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur Praxis der Reserveberechnung nach der t -Methode.

Von *Heinrich Jecklin*, Zürich.

Unter t -Methode verstehen wir die vom Verfasser in Vorschlag gebrachte Gruppenmethode zur Reserveberechnung in der Lebensversicherung. Das Verfahren ist, kurz dargelegt, folgendes: Die Einzelversicherungen werden zusammengefasst in Gruppen gleicher verflossener Dauer und die Gesamtreserve jeder Gruppe auf Grund des erreichten Durchschnittsalters retrospektiv bestimmt nach der Formel

$$(I) \quad \sum {}_tV = \frac{N_{\bar{z}-t} - N_{\bar{z}}}{D_{\bar{z}}} \cdot \sum P_i \cdot S_i - \frac{M_{\bar{z}-t} - M_{\bar{z}}}{D_{\bar{z}}} \cdot \sum S_i.$$

Hiebei ist S_i die Versicherungssumme der Einzelversicherung und $P_i \cdot S_i$ die entsprechende Nettoprämie. Die Versicherungsdauer der Einzelversicherung spielt bei der Gruppierung gar keine Rolle, massgebend ist einzig die ab Versicherungsbeginn verflossene Zeit t , auf ganze Jahre auf- und abgerundet¹⁾. Zulässig zur Reserveberechnung nach dieser Methode sind gemischte, Todesfall- und reine Erlebensfallversicherungen mit konstanter Prämienzahlung. (Im Falle der Erlebensfallversicherung ist S_i , nicht aber $P_i \cdot S_i$, gleich Null zu setzen.)

Bezeichnen wir das Eintrittsalter der Einzelversicherung mit x_i , so ist $\bar{z} = \overline{x + t}$, und unter Voraussetzung der Gültigkeit des Gesetzes des gleichmässigen Alterns kann man setzen $\overline{x + t} = \bar{x} + t$. Die jeweils vor der Reserveberechnung durchzuführende Bestimmung des Durchschnittsalters \bar{x} der einzelnen Gruppe erfolgt vorteilhaft auf Grund der den Eintrittsaltern der einzelnen Versicherungen zugehörigen einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten nach der Vorschrift²⁾

¹⁾ S. «Aktuárské Vědy» 1936, Heft 1: Jecklin, «Retrospektive Reserveberechnung nach Gruppen gleichen Akquisitionsjahres».

²⁾ S. «Blätter für Versicherungsmathematik», Bd. 4, Heft 6: Jecklin, «Die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit als Hilfsgrösse zur Bestimmung des technischen Durchschnittsalters von Personengruppen in der Lebensversicherung».

$$(II) \quad q_{\bar{x}} = \frac{\sum q_{x_i} \cdot S_i}{\sum S_i}.$$

Zur Gewährleistung der praktischen Durchführung der Reserveberechnung nach der *t*-Methode genügt es demnach, für jede Versicherungspolice eine Reservekarte anzulegen, auf welcher ausser Policennummer und Datum des Versicherungsbeginnes die drei Daten *S*, *P · S* und *q_x · S* vermerkt sind. (*S* = Versicherungssumme, *P* = Nettoprämienatz, *q_x* = einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit des Eintrittsalters.)

Die Benennung «*t*-Methode» stammt von Börlin¹⁾, der dieses Reserveberechnungsverfahren einer eingehenden Würdigung unterzogen hat. Auf einen Vorteil der *t*-Methode sei hier jedoch mit besonderem Nachdruck hingewiesen: Bei den Gruppenmethoden werden — wie dies schon der Name besagt — die Einzelversicherungen anlässlich der Reserveberechnung nach bestimmten Gesichtspunkten in Gruppen zusammengefasst; so wird bei der Hilfszahlenmethode nach gleichem erreichtem Alter gruppiert, bei der Lidstoneschen Methode nach gleicher restlicher Versicherungsdauer usw. Alle bisher bekannten Methoden erfordern Gruppierungen, welche eine vollständige Umstellung des entsprechend der Akquisitionsfolge mit Policennummern versehenen und nach diesen geordneten Versicherungsbestandes bedingen. Nach Durchführung der Reserveberechnung hat dann wieder die Rückgruppierung zu erfolgen. Jeder Praktiker, der Reserveberechnungen nach Gruppenmethoden durchzuführen hat, weiss, dass die Gruppenbildung und die Rückordnung — auch wenn mit Lochkartenmaschinen gearbeitet wird — eine der Hauptarbeiten der betreffenden Verfahren darstellen, die als lästig empfunden wird und doch mit grosser Sorgfalt erledigt werden muss, ansonst sie eine gefährliche Fehlerquelle darstellt. Der grosse Vorteil der *t*-Methode besteht nun darin, dass sich eine Umordnung des Bestandes zwecks Gruppenbildung erübrigt; denn da nach gleicher verflrossener Dauer zu gruppieren ist, bildet einfach jedes Zugangsjahr eine Gruppe. Diese Art der Gruppierung ist nicht nur denkbar einfach, sie ist auch

¹⁾ S. «Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker», Heft 38: Börlin, «Gruppenweise Reserveberechnung bei Verwendung von Selektions- und Dekremententafeln».

natürlich und sinnvoll, da damit ermöglicht wird, die Produktion der einzelnen Akquisitionsjahre in ihrer Weiterentwicklung zu verfolgen.

Ein weiterer erwähnenswerter Vorteil der *t*-Methode, den sie mit der Methode von Lidstone gemein hat, besteht darin, dass sich eine Änderung der Reserveberechnungsgrundlagen (Sterbetafel, technischer Zinsfuß) ohne irgendwelche Schwierigkeiten bewerkstelligen lässt, während z. B. bei der Hilfszahlenmethode in einem solchen Falle umfangreiche Neuberechnungen stattfinden müssen.

Bekanntlich lassen sich die verschiedenen Gruppenrechnungsarten in zwei Kategorien scheiden, in die eigentlichen Gruppenmethoden einerseits und in die Näherungsverfahren andererseits. Ein typischer Repräsentant der ersten Art ist die Hilfszahlenmethode ¹⁾. Die *t*-Methode gehört zur zweiten Klasse; die von ihr gelieferten Resultate geben nur Näherungswerte zur Summe der Einzelreserven. Es ist nun natürlich äusserst wichtig, über die Grösse der Abweichung genauere Kenntnisse zu haben. Nur wenn diese Abweichung gegenüber der Gesamtreserve der Einzelversicherungen von zu vernachlässigender Grössenordnung ist, darf die *t*-Methode mit ihren genannten offensichtlichen Vorteilen auch praktisch zur Anwendung gelangen.

Wie steht es nun um die Genauigkeit der mittels der *t*-Methode errechneten Reservewerte? Auf Grund theoretischer Überlegungen lassen sich diesbezüglich keine sehr umfassenden Aussagen machen. Für die Begründung der Ermittlung des Durchschnittsalters können in bezug auf die *t*-Methode analoge Überlegungen statthaben wie für die Methode von Lidstone, und es sei hier auf die ausführlichen Untersuchungen des Verfassers andernorts ²⁾ verwiesen. Soweit für die Reserveberechnung Sterbetafeln Verwendung finden, die nach der Formel von Makeham ausgeglichen sind, ergibt sich bei der Lidstone'schen Methode auf Basis der einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten als Hilfsgrössen zur Bestimmung des technischen Durchschnittsalters ein etwas zu hoher Wert für dasselbe. Zusehends müssen bei Reserveberechnung nach der prospektiven Lidstonemethode etwas zu hohe Reservewerte resultieren, gemessen am Reservetotal der Einzelversicherungen. Es ist jedoch nicht möglich, das Durchschnittsalter durch eine subtraktive Konstante zu korrigieren, da der Fehler mit

¹⁾ S. «Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker», Heft 40: Jecklin und Maurer, «Vollautomatische Reserveberechnung».

²⁾ S. «Blätter für Versicherungsmathematik», Band 4, S. 263 ff.

der Dauer der zur Reserveberechnung verwendeten Leibrenten steigt. Folglich ist der relative Reservefehler bei der Lidstoneschen Methode im Verlaufe der Versicherung fallend. Vergleichende Durchrechnungen zeigen, dass die benötigte Alterskorrektur im Mittel von der Grössenordnung eines halben Jahres ist. Die hier für die Lidstonesche Methode für den Fall der Anwendung von Makehamtafeln gemachten Aussagen gewinnt man, indem man von der plausibel zu begründenden Annahme ausgeht ¹⁾, dass sich die temporären Leibrenten näherungsweise als lineare Funktion der einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeit darstellen lassen in der Form $a_{x,\overline{t}|} = a_t + b_t \cdot q_x$, wobei a_t und b_t nur von der Rentendauer, nicht aber vom Alter x abhängen. Diese Darstellung gelingt praktisch befriedigend. Nach analogen theoretischen Überlegungen müssten auch die für die t -Methode benötigten Funktionswerte

$$\frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} \quad \text{und} \quad \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}$$

in vorgenannter Form sich als ganze lineare Funktion von q_x darstellen lassen. Die erreichbaren Resultate sind hier aber gar nicht gut, und es muss wohl mit diesem Umstand zusammenhängen, dass das errechnete Durchschnittsalter \overline{x} in seinen Abweichungen von den genauen, von t abhängigen Werten einen andern Verlauf zeigt, als aus den theoretischen Voraussetzungen und in Analogie zur Lidstone-methode zu folgern wäre. Dieser Fragenkomplex ist unseres Wissens noch nicht näher untersucht worden, und wir möchten uns vorbehalten, in späteren Untersuchungen darauf und auf verwandte Fragen zurückzukommen. Immerhin dürften die Abweichungen vom Reservetotal der Einzelversicherungen bei der t -Methode, im ganzen genommen, eher weniger ponderant sein als bei der Lidstoneschen Methode, da in den ersten Versicherungsjahren, d. h. bei kleinem t , keine wesentlichen Differenzen bestehen können und in der Folge die Bezugsgrösse, d. h. die Reserve, ungleich rascher wächst als der absolute Fehler.

Es sind dies jedoch alles nur theoretische Mutmassungen, die im Verhältnis zu den Gegebenheiten eines konkreten Versicherungsbestandes unter Umständen eine sehr untergeordnete Rolle spielen. In der Tat zeigt ein Blick auf die eingangs angegebene Reserveformel;

¹⁾ S. «Blätter für Versicherungsmathematik», Band 4, S. 260/261.

dass das Durchschnittsalter, genau genommen, nicht allein mit den Versicherungssummen als Gewichten bestimmt werden dürfte, sondern dass auch die absoluten Nettoprämienbeträge mit in Betracht gezogen werden sollten. Selbstverständlich würden damit die Vorteile der Methode, insbesondere die bestehende Einfachheit der Handhabung, grossteils verloren gehen. In strenger Beurteilung könnte aber die Durchschnittsaltersbestimmung nur dann allein aus den mit den Versicherungssummen gewichteten Sterbenswahrscheinlichkeiten erfolgen, wenn bei der einzelnen Reservegruppe innerhalb der Altersverteilung das Verhältnis von Versicherungssummen zu Prämien konstant ist ¹⁾. Demnach wird klar, dass die *t*-Methode beispielsweise nicht geeignet sein kann zur Berechnung der Reserve kleiner Versicherungsbestände, in welchen die Summe und Dauer einzelner Versicherungen stark von der Durchschnittskombination abweicht. Man wird aber eo ipso Gruppenmethoden zur Reserveberechnung nur bei grösseren Portefeuilles zur Anwendung bringen, bei welchen der einzelnen Versicherung im Rahmen des Gesamtbestandes kein merklicher Einfluss zukommt. Es kann dann gewissermassen der Policenbestand als Summe einer repräsentativen Durchschnittskombination aufgefasst werden.

Gesetzt nun der praktische Fall, es solle die Reserveberechnung eines Bestandes nach der *t*-Methode erfolgen. Es sei vorausgesetzt, dass hinsichtlich des Portefeuilles die Daten, welche Summenverteilung, Sterblichkeit und Stornohäufigkeit betreffen, empirisch feststehen oder feststellbar sind. Zu Zeiten normaler Bestandesentwicklung darf dann wohl supponiert werden, dass die normierte Summenverteilung nach Eintrittsaltern sich in den verschiedenen Akquisitionsjahren ungefähr gleich bleibt. Bezeichnen wir im Neuzugang eines bestimmten Jahres das Versicherungssummentotal der Gruppe aller Policen des Eintrittsalters *x* mit ${}_0F_{(x)}$, so ist uns die vorgenannte normierte Verteilung durch die Funktionswerte

$${}_0f_{(x)} = \frac{{}_0F_{(x)}}{\sum_x {}_0F_{(x)}}.$$

gegeben, die vorderhand einzeln empirisch festgestellt seien. Das Durchschnittsalter in ursprünglicher Definition ergibt sich offenbar

¹⁾ S. «Blätter für Versicherungsmathematik», Band 4, S. 272.

aus $q_x = \sum_0 f_{(x)} \cdot q_x$. Sei nun ${}_t p_x$ die t -jährige Verbleibswahrscheinlichkeit der Einzelpolice mit Eintrittsalter x unter Berücksichtigung von effektiver Sterblichkeit und Stornosatz, so ist uns die normierte Verteilungsfunktion der Summen eines Zugangsjahres nach t Jahren gegeben durch

$$(III) \quad {}_t f_{(x)} = \frac{{}_t p_x \cdot {}_0 f_{(x)}}{\sum {}_t p_x \cdot {}_0 f_{(x)}}.$$

In diesem Zusammenhang verweisen wir auf die interessante Abhandlung von Elderton «Law of Survivorship and Frequency Curves in Actuarial Statistics»¹⁾, wo er die mathematische Darstellung solcher Summenverteilungen behandelt, allerdings unter alleiniger Berücksichtigung der Sterblichkeit als Ausscheideursache. Elderton hat verschiedentlich erwähnt, dass die Frequenzkurven seines Erachtens zukünftig in der Reserveberechnung eine wichtige Rolle zu spielen berufen seien²⁾. Numerische Rechnungen unter Zugrundelegung verschiedener Sterbetafeln und Stornoannahmen zeigen übrigens, dass die zu fortschreitendem t zugehörigen normierten Summenverteilungen gegenüber der Ausgangsverteilung keine ausgesprochene Deformation aufweisen. Das heisst, es wäre diesfalls statthaft ${}_t f_{(x)} \sim {}_0 f_{(x)}$ zu setzen, und es könnte ${}_0 f_{(x)}$ als für das Portefeuille charakteristische Summenverteilung der Akquisitionsguppen angesprochen werden. Verfasser würde es darum für interessant und wertvoll erachten, wenn die in der Praxis tätigen Aktuare bezügliche Untersuchungen anstellen wollten.

Wir möchten betonen, dass es sich im Vorstehenden um einige Bemerkungen des Verfassers handelt, die in mancher Hinsicht ausbaufähig und verbesserbar scheinen. Um jedoch den Nutzen der dargelegten Gedanken für die Praxis zu erweisen, haben wir umfangreiche vergleichende Berechnungen an einem Jahreszugang eines bestimmten Versicherungsportefeuilles vorgenommen und möchten im folgenden noch die wichtigsten Resultate mitteilen.

Es handelt sich um eine Jahresproduktion von 763 Policen gemischter Versicherungen und lebenslänglicher Todesfallversicherungen mit ganz verschiedener Versicherungs- und Prämienzahlungsdauer;

¹⁾ S. «Journal of the Institute of Actuaries», Vol. LXV, Part I, 1934.

²⁾ S. z. B. «The Review», Novemberheft 1932.

deren Eintrittsalter zwischen 15 und 61 Jahren variieren. Die gesamte versicherte Summe beträgt Fr. 5 821 652. Die Verteilung der Versicherungssumme nach Eintrittsaltern kann formelmässig durch

$$(IV) \quad {}_0F_{(x)} = h \cdot \left(1 - \frac{(x-38)^2}{\alpha^2} \right)^m$$

d. h. den Typ II der Pearsonverteilungen befriedigend wiedergegeben werden, wobei x das Eintrittsalter bedeutet und $h = 298,15$, $\alpha^2 = 576$, $m = 4$ gesetzt sind.

Als erstes wurden mit Hilfe der Verbleibswahrscheinlichkeiten ${}_tP_{(x)}$ für $t = 1, 5, 10$ und 15 aus den Werten ${}_0f_{(x)}$, die Funktionswerte $f_{(x)}$ gemäss Formel III bestimmt. Hierbei stützten wir uns auf die Abelsche Selektionsabsterbeordnung und die Ostersche Stornotafel¹⁾. Wir sind uns darüber klar, dass die gewählten Grundlagen gegenwärtig als wirklichkeitsfremd anzusprechen sind. Es muss jedem Praktiker überlassen bleiben, für seinen konkreten Fall empirische Werte oder die geeignetsten Grundlagen 2. Ordnung zu wählen. Hier handelt es sich nur darum, an einem zahlenmässigen Beispiel zu zeigen, wie nach einmal getroffenen Annahmen die Ergebnisse der t -Methode mit jenen der Einzelreserveberechnung in sehr nahe Übereinstimmung gebracht werden können.

Sodann wurden bei genanntem Portefeuille für jede Einzelversicherung die 1., 5., 10. und 15. Reserve auf Basis der Tafel M & W. I $3\frac{1}{2}\%$ bestimmt, mit den bezüglichen vorgenannten Verbleibswahrscheinlichkeiten multipliziert und durch Addition die Gesamtreserve per Ende des 1., 5., 10. und 15. Versicherungsjahres festgestellt. Wenn wir die Tafel M & W. I wählten, so waren wir von der Absicht geleitet zu zeigen, dass die t -Methode auch für nicht nach Makeham ausgeglichene Tafeln durchaus verwendbar ist; bei der Tafel M & W. I sind die q_x bekanntlich erst vom Alter 30 weg monoton steigend. Die erhaltenen Resultate sind in nachfolgendem zahlenmässigen Vergleich zu finden.

Schliesslich wurde mit Hilfe der Verbleibswahrscheinlichkeiten das Summen- und Prämientotal per Ende des 1., 5., 10. und 15. Jahres ab Beginn ermittelt und auf dieser Basis die Gesamtreserve entsprechend Formel I berechnet, ebenfalls nach M & W. I $3\frac{1}{2}\%$.

¹⁾ S. «Blätter für Versicherungsmathematik», Band 1, Heft 2.

Das Durchschnittsalter \bar{x} wurde auf Grund der anfänglichen Summenverteilung des Portefeuilles zu 40,35 bestimmt. Die ziffernmässigen Ergebnisse unserer Rechnungen sind:

Für $t =$	1	5	10	15
Summe der individuellen Reserven	164 366,6	723 834,3	1 416 313,9	2 043 831,1
Reserve nach t -Methode	164 425,2	725 021,8	1 420 877,4	2 032 061,8
Differenz absolut	58,6	1 187,5	4 563,5	11 769,3
Differenz bezogen a. indiv. Reserven	+ 0,4 ‰	+ 1,6 ‰	+ 3,2 ‰	— 5,8 ‰

Die Übereinstimmung ist, wie ersichtlich, erfreulich. Es wäre jedoch denkbar, dieselbe noch weiter zu fördern durch Aufstellung einer Korrekturtabelle, aus welcher die Variation des Durchschnittsalters nach t zu ersehen wäre. Bezeichnen wir das erreichte Durchschnittsalter mit $\bar{z} = \bar{x} + t + k_t$, so ist \bar{x} das aus den Sterbenswahrscheinlichkeiten der Eintrittsalter ermittelte anfängliche Durchschnittsalter, t die abgelaufene Zeit seit Versicherungsbeginn und k_t die von t abhängige Korrektur. Zur Bestimmung dieser k_t könnte man wie folgt vorgehen:

Man wählt die nach Versicherungsart und Versicherungsdauer am häufigsten vertretene Versicherungskombination. Es sei dies beispielsweise die gemischte Versicherung mit 20jähriger Dauer. In der Annahme, man habe ein Portefeuille, bestehend nur aus Versicherungen dieser Art, ist es nun eine auf einer Rechenmaschine einfach zu bewältigende numerische Rechnung, die Reservetotale

$${}_tV_{\bar{x}, 20|} = \sum^x {}_t f_{(x)} \cdot {}_tV_{x, 20|}$$

für die verschiedenen t von 1 bis 19 zu bestimmen, wobei ${}_tV_{x, 20|}$ die bezüglichen Sätze der Einzelreserven sind. Sodann stellt man fest, welches Durchschnittsalter man für die verschiedenen t verwenden muss, um nach der Formel:

$$(V) \quad \frac{N_x - N_z}{D_z} \cdot \sum^x {}_t f_{(x)} \cdot P_{x, 20|} - \frac{M_x - M_z}{D_z} = {}_tV_{\bar{x}, 20|}$$

Resultate zu erhalten, die mit den vorherigen möglichst gut übereinstimmen. Vergleichen wir nun die hieraus für die verschiedenen t resultierenden Durchschnittsalter $\bar{x} = \bar{z} - t$ mit jenem \bar{x} , das ursprünglich durch die Bedingung $q_{\bar{x}} = \sum_{0f(x)} \cdot q_x$ gegeben war, so ist damit die gesuchte Korrekturtabelle für \bar{x} nach t gegeben.

Es würde also diese auf Grund einer bekannten und für die Zukunft supponierten Summenverteilung nach x konstruierte Korrekturtabelle bei Reserveberechnung mit Makehamtafeln die von der Dauer t der Versicherungswerte abhängige Variation des Durchschnittsalters zu berücksichtigen gestatten, bei Benützung anders ausgeglichener Tafeln zugleich auch die Abweichung vom Gesetz des gleichmässigen Alterns. Bei einigermaßen umfangreichen Versicherungsbeständen mit stabilen Stornoverhältnissen werden sich die normierten Summenverteilungen zeitlich unbedeutend ändern, so dass die einmal erstellte Korrekturtabelle für längere Zeit beibehalten und gelegentlich überprüft werden könnte. — Der durch den Umstand bedingte Fehler, dass das Durchschnittsalter nur mit den Summen als Gewichten, unter Ausserachtlassung der Prämien, bestimmt ist, wird durch eine solche Korrekturtabelle natürlich nicht erfasst. Es dürfte aber, wie schon erwähnt, diese Abweichung meist nur äusserst gering sein. Man könnte versuchen, auch eine bezügliche Korrektur zu bestimmen, indem man untersucht, um welchen Betrag l das laut voriger Korrekturtabelle für die 1. Reserve gültige Durchschnittsalter $\bar{x} + 1 + k_1$ noch abzuändern ist, um das genaue Total der erstjährigen individuellen Reserve zu erhalten. Um diesen konstanten Differenzbetrag l wäre die ganze Korrekturtabelle noch zu ergänzen, so dass $\bar{z} = \bar{x} + t + k_t + l$ wäre.

Eine Weiterführung dieser Anregungen, insbesondere im Sinne der Durchrechnung numerischer Beispiele, wird nach Meinung des Verfassers für die Praxis der Reserveberechnung förderliche Resultate zeitigen.

