

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 48 (1948)

Artikel: Eine Bemerkung zu einer Arbeit von H. Hadwiger

Autor: Rohrbach, Hans

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-966891>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 01.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Eine Bemerkung zu einer Arbeit von H. Hadwiger

Von *Hans Rohrbach* in Mainz

Herr H. Hadwiger hat hier Formeln für die Anzahl A_n^r der Permutationen von n Elementen abgeleitet ¹⁾, die r konsekutive Paare der Elemente enthalten. Seine Formeln lauten insbesondere:

$$A_n^r = \binom{n-1}{r} A_{n-r}^0 \quad (1)$$

und

$$A_n^0 = (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + (n+1)(n-1)! \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda \frac{1}{\lambda!}. \quad (2)$$

Zum Beweise von (2) zieht Herr Hadwiger eine Rekursionsformel für A_n^0 sowie eine erzeugende Funktion von A_n^0 heran, die als Lösung einer elementaren Differentialgleichung bestimmt wird.

In einer gemeinsam von Herrn P. Armsen und mir veröffentlichten Arbeit ²⁾ haben wir die gleiche Aufgabe behandelt, wobei wir statt (2) die Formel

$$A_n^0 = \sum_{\lambda=0}^{n-1} (-1)^\lambda \binom{n-1}{\lambda} (n-\lambda)! \quad (n \geq 2), \quad A_1^0 = 1, \quad (3)$$

erhalten haben. Da mir Formel (3) für die praktische Berechnung von A_n^0 etwas einfacher zu sein scheint als (2), sei es gestattet, unseren Beweis für (3), der nur kombinatorische Hilfsmittel benutzt, hier mitzuteilen.

¹⁾ *H. Hadwiger*, « Eine Bemerkung über zufällige Anordnungen der natürlichen Zahlen », Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker 46 (1946), 105—109.

²⁾ *P. Armsen* und *H. Rohrbach*, « Sequenzen in Permutationen » (Auszug), Bericht über die Mathematikertagung in Tübingen 1946, S. 36/37.

Teilt man die Permutationen von $n + 1$ Elementen in Klassen ein nach der Anzahl der in ihnen vorhandenen konsekutiven Paare, so folgt

$$(n + 1)! = \sum_{\nu=0}^n A_{n+1}^{\nu}$$

und hieraus nach (1)

$$(n + 1)! = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} A_{n+1-\nu}^0 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} A_{i+1}^0. \quad (4)$$

Die Formel (3), die für $n = 2$ richtig ist — dann haben beide Seiten den Wert 1 —, nehme man als bereits erwiesen an. Aus (4) folgt, indem man rechts den Summanden für $i = n$ abspaltet und (3) benutzt,

$$A_{n+1}^0 = (n + 1)! - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} (i + 1 - j)!. \quad (5)$$

Denkt man sich (3) für $n + 1$ statt n geschrieben, so zeigt ein Vergleich mit (5), dass es für den Beweis von (3) durch den Schluss von n auf $n + 1$ genügt, folgende Beziehung nachzuweisen:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} (i + 1 - j)! = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (n + 1 - i)!. \quad (6)$$

Man bezeichne zur Abkürzung die linke Seite von (6) mit $L(n)$, die rechte mit $R(n)$ und setze $i = r - 1$, $j = r - s$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} L(n) &= \sum_{r=1}^n \binom{n}{r-1} \sum_{s=1}^r (-1)^{r-s} \binom{r-1}{s-1} s! \\ &= \sum_{s=1}^n (-1)^s s! \sum_{r=1}^n (-1)^r \binom{r-1}{s-1} \binom{n}{r-1}. \end{aligned}$$

Denn hier verschwinden für $r < s$ die Summanden der inneren Summe der ersten Reihe, so dass man die Summation über s beliebig weit (etwa bis n) erstrecken und dann die Reihenfolge der Summationen vertauschen kann. Ferner folgt für $n + 1 - i = s$

$$R(n) = \sum_{s=1}^n (-1)^{n-s} \binom{n}{s-1} s!,$$

also

$$R(n) - L(n) = \sum_{s=1}^n (-1)^s s! \sum_{r=1}^{n+1} (-1)^{r+1} \binom{r-1}{s-1} \binom{n}{r-1}.$$

Bezeichnet man hier die innere Summe mit $M(s)$, so ist nur noch zu zeigen, dass $M(s)$ für $s = 1, 2, \dots, n$ verschwindet. Dazu setze man $s-1 = i$ und $r-1 = j$ in $M(s)$. Dann folgt

$$M(s) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{j}{i} \binom{n}{j} = \frac{1}{i!} \sum_{j=i}^n (-1)^j \binom{n}{j} j(j-1) \dots (j-i+1) = \frac{1}{i!} \left[\frac{d^i (1-x)^n}{dx^i} \right]_{x=1} = 0.$$

Dies gilt für $i = 0, 1, \dots, n-1$, also für $s = 1, 2, \dots, n$. Damit ist (3) induktiv bewiesen.

Zum Schluss sei noch die Umrechnung von (2) und (3) ineinander mitgeteilt. Aus (3) folgt

$$\begin{aligned} A_n^0 &= \sum_{\lambda=0}^{n-1} (-1)^\lambda \frac{1}{\lambda!} [(n-1)! (n-\lambda)] \\ &= n! \sum_{\lambda=0}^{n-1} (-1)^\lambda \frac{1}{\lambda!} + (n-1)! \sum_{\mu=0}^{n-2} (-1)^\mu \frac{1}{\mu!} \\ &= n! \sum_{\lambda=0}^{n-1} (-1)^\lambda \frac{1}{\lambda!} + (n-1)! \left[\sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^\mu \frac{1}{\mu!} - (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \right] \\ &= (n+1)(n-1)! \sum_{\lambda=0}^{n-1} (-1)^\lambda \frac{1}{\lambda!} + (-1)^n \\ &= (n+1)(n-1)! \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda \frac{1}{\lambda!} + (-1)^n \left[1 - (n+1) \frac{1}{n} \right] \\ &= (n+1)(n-1)! \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda \frac{1}{\lambda!} + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

