

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 48 (1948)

Artikel: Definition und Bestimmung der Wahrscheinlichkeit durch das Kollektiv
allgemeiner Art

Autor: Göring, Emil

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-966900>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 01.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Definition und Bestimmung der Wahrscheinlichkeit durch das Kollektiv allgemeiner Art

Von *Emil Göring*, Köln

Abkürzungen:

- W.: Wahrscheinlichkeit.
Koll. spez. Art: Kollektiv spezieller Art.
Koll. allg. Art: Kollektiv allgemeiner Art.

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung.
2. Darstellung der W. in der Form $p = w(G, GP)$.
3. W. a priori.
4. Ausgleichung.
5. Anormale Risiken.
6. Verallgemeinerung des Ermittlungsverfahrens der W. a posteriori.
7. Angleichung.
8. Koll. spez. Art und Hauptdefinition I der W.
9. Fälle, für welche diese Definition versagt, aber die W.s-Sätze weiter gelten.
10. W.s-Sätze und W. a priori, Koll. allg. Art und Hauptdefinition II der W.
11. Die grundlegenden W.s-Sätze.
12. Weitere Erörterungen zur Hauptdefinition II der W.
13. Konstruktion der Hauptdefinition III der W.
14. Das fällig werdende Kapital eines Versicherungsbestandes und sein Erwartungswert. Beziehung zwischen diesen Grössen, falls ein Koll. allg. Art vorliegt.
15. Besondere Fälle des Koll.s allg. Art und Übergang zum Koll. spez. Art.
16. Vervollständigung des Koll.s allg. Art durch zusätzliche Bestimmungen.
17. Beginn der Aufstellung der Definitionen und Sätze, die ausser den grundlegenden W.s-Sätzen für unsere Zwecke notwendig sind. Ereignisse, die zueinander komplementär sind.
18. Zufällige Variable und Erwartungswerte derselben. Summen von zufälligen Variablen und Anwendung auf die Hauptdefinition III und auf das fällig werdende Kapital eines Versicherungsbestandes.
19. Ereignisse, die voneinander unabhängig sind.
20. Zufällige Variable, die voneinander unabhängig sind, und Streuung von zufälligen Variablen.

21. Bedingungen, die bei praktisch vorkommenden Versicherungsbeständen erfüllt sind. Beziehungen zwischen den Erwartungswerten und den Streuungen des fällig werdenden Kapitals solcher Bestände.
22. Der Satz von Tschebyscheff und seine Anwendung auf die genannten Versicherungsbestände.
23. Satz 13 als Ergänzung der grundlegenden W.s-Sätze und Anwendung auf die genannten Versicherungsbestände, wodurch sich Koll.e allg. Art ergeben. Die für die Koll.e allg. Art massgebenden Beziehungen stellen damit Verallgemeinerungen von Unabhängigkeitsbedingungen vor.
24. Schlussbetrachtungen.

1. In den Veröffentlichungen des für das Jahr 1940 in Luzern geplanten XII. Internationalen Kongresses der Versicherungsmathematiker habe ich einen Aufsatz veröffentlicht, betitelt: «Eine Erweiterung der Misesschen Kollektive und der entsprechende Ausbau der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung.» (Siehe die genannten Veröffentlichungen, Wahrscheinlichkeitstheorie, Seiten 329—343.)

Zur Definition und zur Bestimmung der W. (Wahrscheinlichkeit) bei der Behandlung besonderer Probleme der Versicherungsmathematik und der Statistik habe ich das Koll. allg. Art (Kollektiv allgemeiner Art) eingeführt. Im vorliegenden Aufsatz möchte ich kurz die Bedeutung dieses Kollektivs für die genannten Zwecke nachweisen und auf elementare Weise zeigen, wie das Koll. allg. Art in den praktisch wichtigsten Fällen mittelst der Anwendung der grundlegenden W.s-Sätze (Wahrscheinlichkeitssätze) und von Unabhängigkeitsbedingungen entsteht und dass es für jede Versicherungsunternehmung, die ihre wirtschaftlichen Aufgaben erfüllen soll, neben andern Erfordernissen notwendig ist, dass die versicherten Ereignisse annähernd einen genügend umfangreichen Ausschnitt eines Kollektivs allgemeiner Art bilden.

2. Wenn bei einer Anwendung der W.s-Rechnung ein Ereignis in Betracht gezogen wird, wobei eine Reihe von Tatbeständen gegeben sind, welche aber nicht genügen, um festzustellen, ob das Ereignis eintritt oder nicht, so kann unter Umständen auf Grund der genannten Tatbestände ein Mass angenommen werden, das W. genannt wird. Die Reihe der gegebenen Tatbestände wird ebenfalls als Ereignis angesehen, das aber als eingetreten betrachtet wird und «Grundereignis» genannt wird.

Falls das Ereignis P eingetroffen ist, so ist auch das Ereignis GP eingetreten, d. h. das Ereignis, das dann als eingetroffen gilt, wenn

zugleich das Ereignis P wie auch das Grundereignis G eingetroffen ist. Deshalb schreiben wir die W. p des Ereignisses P in bezug auf das Grundereignis G in der Form

$$(1) \quad p = w(G, GP)$$

und betrachten diese W. auch als die W. des Ereignisses GP in bezug auf das Grundereignis G .

3. Im Versicherungswesen und in der Statistik wird die W. üblicherweise als «W. a posteriori» wie folgt bestimmt: Bei einer statistischen Untersuchung wird bei einer behandelten Gruppe von Fällen mit dem Grundereignis G , für welche das Eintreten eines Ereignisses P und damit des «zusammengesetzten» Ereignisses GP in Betracht zu ziehen war, festgestellt, dass N die Gesamtzahl der Fälle dieser Gruppe und M die Zahl der Fälle ist, bei denen das Ereignis P eingetreten ist. Ist dann N genügend gross und wird vorausgesetzt, dass die W. p für alle N Fälle dieselbe war und die Fälle ausreichend voneinander unabhängig waren, so ist näherungsweise

$$(2) \quad p = \frac{M}{N}.$$

Dieser Näherungswert ist auch für zukünftig zu untersuchende Fälle brauchbar, wenn vorausgesetzt wird, dass bei denselben das Ereignis P in bezug auf das Grundereignis G dieselbe W. p besitzt wie bei den jetzt untersuchten Fällen.

4. Die auf diese Weise a posteriori festgestellten W.en (Wahrscheinlichkeiten) werden aber in der Regel nicht unmittelbar verwendet, sondern zunächst «ausgeglichen». Gewöhnlich werden nämlich die W.en gleichzeitig für verschiedene Voraussetzungen ermittelt, z. B. die einjährigen Sterbens-W.en für eine Reihe aufeinanderfolgender Lebensalter. Man erhält so eine ganze Reihe von W.en, z. B. für jedes Lebensalter eine andere einjährige Sterbens-W. Werden dieselben nach dem zugrunde gelegten Argument (Lebensalter) geordnet, so erhält man eine unregelmässig verlaufende Reihe von «unausgeglichenen» Zahlenwerten. Diese Reihe wird nun ausgeglichen, d. h. nach irgendeinem Verfahren durch eine regelmässig verlaufende Zahlenreihe ersetzt, welche sich der gegebenen unausgeglichenen Zahlenreihe möglichst anschmiegt. Dadurch erhält man die ausgeglichenen Werte der

W.en. Jede der ausgeglichenen W.en ist dadurch nicht nur abhängig von der Gruppe der Fälle, die der Voraussetzung (dem Lebensalter) der Fälle der ermittelten W. entspricht, sondern auch von den Gruppen der Fälle, die den Voraussetzungen (den Lebensaltern) der übrigen gleichzeitig ermittelten W.en entsprechen.

5. Bei den Versicherungen anormaler Risiken, wie sie bei der Lebensversicherung und Lebensrückversicherung vorkommen, liegt aber überhaupt keine Statistik vor, der man im Sinne von Abschnitt 3 ohne weiteres eine W. a posteriori entnehmen könnte. Hier muss jedes Risiko besonders begutachtet werden. Dabei kommen allerdings reichhaltige statistische Erfahrungen zur Verwendung, welche sich aber keineswegs auf Fälle beziehen, bei welchen das in Betracht zu ziehende Ereignis dieselbe W. besitzt. Um so etwas wie eine a posteriori ermittelte W. zu erhalten, müssen viele mit demselben ärztlichen Begutachtungsergebnis beobachtete Fälle zu einer Gruppe zusammengefasst werden, doch sind den einzelnen Fällen verschiedene W.en zuzuordnen, die aber vorher in eine bestimmte Beziehung zueinander gebracht sind. Wenn man z.B. annimmt, dass die einjährigen Sterbens-W.en anormaler Risiken, die derselben Gruppe angehören, aber ungleiche Lebensalter besitzen, proportional sind zu den Sterbens-W.en normaler Risiken für diese Lebensalter, dann kann die Sterblichkeit für das anormale Risiko wie folgt bestimmt werden: Eine Gruppe von Fällen mit bestimmtem ärztlichem Begutachtungsergebnis, bei denen durch statistische Beobachtung ermittelt wurde, in welchen dieser Fälle die Versicherten im Laufe eines beobachteten Jahres gestorben resp. nicht gestorben sind, bestehe aus N Personen, die aber nicht gleichaltrig sind, sondern die Alter $y_1, y_2, \dots, y_r, \dots, y_N$ am Anfange des der Beobachtung unterworfenen Jahres aufweisen. Von diesen Personen sind nun im Laufe des beobachteten Jahres M Personen gestorben. Bedeutet nun nach der für normale Risiken angenommenen Sterbetafel q_{y_r} die einjährige Sterbens-W. für das Lebensalter y_r , so bilde man den Ausdruck

$$(3) \quad u = \frac{M}{q_{y_1} + q_{y_2} + \dots + q_{y_r} + \dots + q_{y_N}},$$

welchen Ausdruck wir als Sterblichkeitsfaktor der untersuchten Gruppe anormaler Risiken bezeichnen. Weist nun ein als anormales

Risiko aufzunehmender Versicherungskandidat dasselbe Ergebnis der ärztlichen Begutachtung auf wie die beobachtete Gruppe, so wird demselben der gleiche Sterblichkeitsfaktor u zugeordnet. Das bedeutet, dass sich für dieses anormale Risiko die einjährige Sterbens-W. für irgendein Lebensalter y auf $u \cdot q_y$ stellt.

6. Die im vorhergehenden Abschnitt erläuterte Bestimmung der Sterblichkeit anormaler Risiken gründet sich auf folgender Verallgemeinerung des Ermittlungsverfahrens der W. a posteriori. Bei einer statistischen Untersuchung ist eine Gruppe von N Fällen mit den Grundereignissen $G_1, G_2, \dots, G_r, \dots, G_N$ vorhanden, für welche jeweils das Eintreten eines bestimmten Ereignisses P und damit der zusammengesetzten Ereignisse $G_r P$ ($r = 1, 2, \dots, N$) in Betracht zu ziehen waren. Es sei nun

$$(4) \quad p_r = w(G_r, G_r P), \text{ wo die } p_r \text{ für } r = 1, 2, \dots, N$$

zu ermitteln sind. Ist nun M die Zahl der Fälle, in denen das Ereignis P tatsächlich eingetreten ist, ist die Gesamtzahl N der Fälle genügend gross, und waren dieselben hinreichend voneinander unabhängig, so ist näherungsweise

$$(5) \quad M = p_1 + p_2 + \dots + p_r + \dots + p_N.$$

Aus dieser einen Gleichung können die N W.en p_r dann ermittelt werden, wenn p_r eine gegebene Funktion des Parameters r und einer Variablen u ist, wenn also

$$(6) \quad p_r = f(r, u)$$

ist, wo die Funktion f des Parameters r und der Variablen u bekannt sein soll. Dieser Wert in (5) eingesetzt, ergibt

$$(7) \quad M = f(1, u) + f(2, u) + \dots + f(r, u) + \dots + f(N, u),$$

aus welcher Gleichung die Variable u bestimmt werden kann und dann aus Gleichung (6) die Werte p_r .

Ist nun

$$(8) \quad f(r, u) = u \cdot q_{y_r},$$

so ergibt sich aus (7) die Beziehung (3) und dann aus (6) und (8)

$$(9) \quad p_r = u \cdot q_{y_r}.$$

7. Analoge Verfahren können auch dazu dienen, Sterbetafeln bei kleinen beobachteten Beständen zu konstruieren, wenn eine aus einem grössern Bestand gebildete Sterbetafel schon vorhanden ist, welche jedoch den neu-beobachteten Beständen nicht mehr ganz entspricht. Die einjährigen Sterbens-W.en der schon vorhandenen Sterbetafeln seien q_y^I und diejenigen der neu zu bildenden Tafel q_y^{II} , wo y das jeweilige Lebensalter der in Frage kommenden Personen bedeutet. Wenn die q_y^{II} ungefähr gleich verlaufen wie die q_y^I , so nennt man die Sterbetafel q_y^{II} der Sterbetafel q_y^I angeglichen. Dabei verweise ich auf den Aufsatz von Herrn Dr. Robert Picard in Genf: «Beitrag zur Konstruktion einer Sterbetafel bei kleinen Beständen», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 43. Band, Heft 2, vom 15. Oktober 1943. Für die Bildung der angeglichenen Sterbens-W.en wird im genannten Aufsatz die Methode der kleinsten Quadrate benützt, die bei der Ausgleichung von Beobachtungsfehlern verwendet wird und bei der Ausgleichung von Sterbetafeln oft gebraucht wurde. Wir setzen an

$$(10) \quad q_x^{II} = \alpha + \beta q_x^I$$

Für jedes in Frage kommende Lebensalter x wird ein Bestand von B_x unter einjährigem Risiko stehenden Personen beobachtet. Von diesen Personen sind innerhalb der Beobachtungszeit T_x Personen gestorben. Dann werden die Unbekannten α und β des Ansatzes (10) so bestimmt, dass der Ausdruck

$$(11) \quad Z = \sum [B_x q_x^{II} - T_x]^2$$

ein Minimum wird. Dabei ist die Summe \sum über alle beobachteten Lebensalter x zu erstrecken.

Wir setzen noch

$$(12) \quad Q_x = B_x q_x^I, \text{ wo die } q_x^I \text{ und also auch die } Q_x$$

gegeben sind, so ergibt sich aus (10) und (11)

$$(13) \quad Z = \sum [\alpha B_x + \beta Q_x - T_x]^2.$$

Werden die partiellen Ableitungen

$$\frac{\delta Z}{\delta \alpha} \quad \text{und} \quad \frac{\delta Z}{\delta \beta}$$

gleich Null gesetzt, so ergeben sich für α und β die Bestimmungsgleichungen

$$(14) \quad \alpha \sum B_x^2 + \beta \sum B_x Q_x = \sum B_x T_x \text{ und}$$

$$(15) \quad \alpha \sum B_x Q_x + \beta \sum Q_x^2 = \sum Q_x T_x,$$

wobei α und β so bestimmt sind, dass der Ausdruck (11), also Z , ein Minimum wird. Damit ist nach (10) für jeden Wert von x auch q_x^{II} gegeben.

Wird jedoch nicht verlangt, dass der Ausdruck Z ein Minimum wird, so lassen sich Werte für die q_x^{II} auch auf folgende Art herstellen: Wir teilen die Lebensalter x durch die Ungleichungen

$$(16) \quad x_1 \bar{<} y \text{ und } x_2 > y$$

in zwei Gruppen x_1 und x_2 und wählen dabei x_1 und x_2 so, dass die Summen $\sum B_{x_1}$ und $\sum B_{x_2}$ ungefähr einander gleich werden, wenn die Summen \sum über alle Werte mit dem Index x_1 , resp. x_2 erstreckt werden. Da alle T_x bekannt sind, so sind auch die Summen $\sum T_{x_1}$ und $\sum T_{x_2}$ gegeben. Analog (5) ist näherungsweise

$$(17) \quad \sum T_{x_1} = \sum B_{x_1} q_{x_1}^{\text{II}} \text{ und } \sum T_{x_2} = \sum B_{x_2} q_{x_2}^{\text{II}}$$

und die Werte (10) eingesetzt,

$$(18) \quad \sum T_{x_1} = \sum B_{x_1} (\alpha + \beta q_{x_1}^{\text{I}}) \text{ und } \sum T_{x_2} = \sum B_{x_2} (\alpha + \beta q_{x_2}^{\text{I}})$$

und da nach (12) auch die Werte

$$(19) \quad Q_{x_1} = B_{x_1} q_{x_1}^{\text{I}} \text{ und } Q_{x_2} = B_{x_2} q_{x_2}^{\text{I}}$$

gegeben sind, so haben wir in

$$(20) \quad \sum T_{x_1} = \alpha \sum B_{x_1} + \beta \sum Q_{x_1} \text{ und } \sum T_{x_2} = \alpha \sum B_{x_2} + \beta \sum Q_{x_2}$$

zwei Gleichungen, aus welchen α und β bestimmt werden können.

Ist genau

$$(21) \quad \sum B_{x_2} = \sum B_{x_1},$$

so folgt aus den beiden Gleichungen (20)

$$(22) \quad \beta = \frac{\sum T_{x_2} - \sum T_{x_1}}{\sum Q_{x_2} - \sum Q_{x_1}} \text{ und}$$

$$(23) \quad \alpha = \frac{\sum T_{x_1} \sum Q_{x_2} - \sum T_{x_2} \sum Q_{x_1}}{\sum B_{x_1} (\sum Q_{x_2} - \sum Q_{x_1})}$$

wo im Nenner nach (21) auch $\sum B_{x_1}$ durch $\sum B_{x_2}$ ersetzt werden kann. Nimmt man weiter an, dass mit wachsendem x die q_x^I zunehmen, so wird bei der getroffenen Wahl der x_1 und x_2 und nach (21) jetzt

$$(24) \quad \sum Q_{x_2} > \sum Q_{x_1}.$$

Die Nenner der rechten Seiten von (22) und (23) verschwinden dann nicht, und α und β lassen sich sicher bestimmen. Wird dann in (10) x durch x_1 resp. x_2 ersetzt, so ergeben sich aus α und β und den Werten $q_{x_1}^I$ und $q_{x_2}^I$ die gesuchten Werte $q_{x_1}^{II}$ und $q_{x_2}^{II}$.

8. In Anlehnung an die in Abschnitt 3 gegebene Bestimmung der W. a posteriori definiere ich zunächst die W. wie folgt:

Hauptdefinition I: Für ein Grundereignis G , für welches die W. (1) $p = w(G, GP)$ für das Eintreten des Ereignisses P beim Bestehen des genannten Grundereignisses definiert werden soll, bestehe ein Koll. spez. Art. (Kollektiv spezieller Art). Dasselbe ist dann vorhanden, wenn das Grundereignis G in einer unbegrenzten Zahl von Fällen F gegeben ist und folgendes zutrifft: Greift man nach vorgegebenen Auswahlverfahren eine Anzahl n dieser Fälle F heraus und ist das Ereignis P in m dieser Fälle eingetroffen, so bilde man den Quotienten

$$(25) \quad p_n = \frac{m}{n}$$

(Häufigkeit). Wird n unendlich gross, dann existiert der Grenzwert

$$(26) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$$

und zwar unabhängig von der gewählten Art, nach welcher nach dem vorgegebenen Auswahlverfahren die n Fälle herausgegriffen werden. Es ist dann die W. p durch (25) und (26) definiert.

Herr Prof. Dr. von Mises hat eine W.s-Definition gegeben, bei welcher er nur dann eine W. im mathematischen Sinne als vorhanden betrachtet, wenn ein «Kollektiv» vorliegt, welches sich ungefähr mit dem oben bestimmten Koll. spez. Art deckt. Die W. soll dann nicht für den einzelnen Fall F , sondern nur für das ganze «Kollektiv» gelten.

Auch aus der hier gegebenen Hauptdefinition I folgt, dass die $W. p$ nur dann für einen bestimmten Fall F gilt, wenn derselbe in das Koll. spez. Art mit der $W. p$ eingeordnet ist. Wird derselbe Fall F in ein anderes Koll. spez. Art eingeordnet und ergibt sich für dasselbe eine von p verschiedene $W. p'$, dann besteht für diesen Fall F nicht die $W. p$, sondern die $W. p'$. Auch ist die $W. p'$ resp. p von dem vorgegebenen Auswahlverfahren der Fälle F abhängig.

Andere Autoren neuerer Lehrbücher der W.s-Rechnung verzichten darauf, ein Kollektiv beschriebener Art zu definieren, gehen aber auch von der W.s-Bestimmung a posteriori aus und geben ebenfalls die $W.$ als Grenzwert p nach den Beziehungen (25) und (26).

9. Also bei allen im vorhergehenden Abschnitt 8 erwähnten Definitionen stützt sich der Begriff $W.$ darauf, dass eine unbegrenzte Zahl von Fällen mit gleicher oder als gleich angenommener $W.$ vorliegt, damit der Grenzwert p aus (25) und (26) bestimmt werden kann. In den Abschnitten 4 bis einschliesslich 7 werden aber $W.$ en bestimmt aus der Beobachtung von Fällen, für welche man die $W.$ en nicht als gleich vorausgesetzt hat. Das gilt schon bei den für die Lebensversicherungen allein in Betracht kommenden «ausgeglichenen» $W.$ en, dann bei den Sterbens- $W.$ en anormaler Risiken sowie bei den «angeglichenen» $W.$ en.

Bei allen genannten und bei ähnlichen Aufgaben gelten jedoch die $W.$ s-Sätze, die nach den in Abschnitt 8 erwähnten Definitionen abgeleitet werden können.

10. Unsere neue $W.$ s-Definition, welche die Hauptdefinition I ersetzen soll, wenn nicht genügend Fälle gleicher $W.$ vorliegen, wohl aber eine unbegrenzte Zahl von Fällen ungleicher $W.$, wollen wir nun unter Anwendung von grundlegenden $W.$ s-Sätzen formulieren. Dabei ergibt sich zugleich das Koll. allg. Art.

Die $W.$ s-Sätze, die wir benötigen, lassen sich u. a. aus der «klassischen» Ermittlungsmethode der « $W.$ en a priori» ermitteln; dabei ist die $W.$ a priori gleich dem «Verhältnis» der Zahl der dem Ereignis günstigen Möglichkeiten zur Gesamtzahl aller Möglichkeiten, wobei letztere als gleichwahrscheinlich vorausgesetzt werden. Diese Methode genügt, um die in Rede stehenden $W.$ s-Sätze aufzustellen.

Die so oder auf andere Weise ermittelten Sätze sind als Bestandteile der neuen $W.$ s-Definition aufgenommen. Diese lautet nun

Hauptdefinition II: a) Die Folge einer unbegrenzten Zahl von Fällen F_r ($r = 1, 2, \dots, k, \lim k \rightarrow \infty$), für welche je ein Grundereignis G_r eingetroffen ist und für welche die W.en

$$(27) \quad p_r^* = w(G_r, G_r, P_r)$$

für das Eintreten der zu obigen Fällen gehörenden Ereignisse P_r bestimmt werden sollen, ist ein Koll. allg. Art, wenn man jedem Fall F_r eine Zahl p_r zuordnen kann und Nachstehendes erfüllt ist:

b) Wenn die Zahlen p_r als W.en betrachtet werden, so sind die untenstehend (s. Abschnitt 11) angeführten grundlegenden W.-Sätze erfüllt.

c) Greift man aus den k Fällen F_r wieder eine unbegrenzte Zahl von n Fällen F'_t heraus ($t = 1, 2, \dots, n, n \leq k$, aber stets $\lim n \rightarrow \infty$), und zwar nach vorgegebenen Auswahlverfahren, wobei dem Falle F'_t das Grundereignis G'_t , das Ereignis P'_t und die zugeordnete Zahl p'_t entspricht, und G'_t mit G_r , P'_t mit P_r und p'_t mit p_r zusammenfällt, wenn der Fall F'_t der Fall F_r ist, und ist m die Zahl der Fälle, für die die Ereignisse P'_t tatsächlich eingetreten sind,

d) so ist

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m - \sum_{t=1}^n p'_t}{n} = 0$$

für jede zugelassene Auswahl der Fälle F'_t .

e) Die Zahlen p_r gelten dann als die W.en p_r^* .

11. Die grundlegenden W.s-Sätze lauten:

Satz 1: Für jede W. p gilt

$$(29) \quad 0 \leq p \leq 1.$$

Satz 2: Für jedes Ereignis A , das sicher eintritt, wenn das Grundereignis G eingetreten ist, gilt

$$(30) \quad w(G, GA) = 1.$$

Satz 3: Für ein Ereignis 0 , das sicher nicht eintritt, wenn das Grundereignis G eingetreten ist, gilt

$$(31) \quad w(G, GO) = 0.$$

Satz 4: Tritt im Falle, dass das Grundereignis G eingetreten ist, das Ereignis P dann und nur dann ein, wenn eines der einander ausschliessenden Ereignisse P_1 oder P_2 eingetreten ist, so ist

$$(32) \quad w(G, GP) = w(G, GP_1) + w(G, GP_2). \quad (\text{Satz der totalen W.})$$

Satz 5: Kann im Falle, dass das Grundereignis G eingetreten ist, ein Ereignis P eintreten, und im Falle, dass ausser dem Grundereignis G auch das Ereignis P eingetreten ist, auch das Ereignis Q eintreten, so ist

$$(33) \quad w(G, GPQ) = w(G, GP) \cdot w(GP, GPQ) \quad (\text{Allgemeiner Satz der zusammengesetzten W.})$$

12. Ob und unter welchen Umständen für die Hauptdefinition II die Festsetzung b , dass nämlich die grundlegenden W.s-Sätze 1 bis 5 erfüllt sind, weggelassen werden kann, wie bei der Hauptdefinition I eine solche Festsetzung nicht getroffen werden muss, da diese Sätze für die Hauptdefinition I von selber erfüllt sind, würde eine besondere Untersuchung ergeben, die mir aber nicht wichtig erscheint, da sich die besagten W.s-Sätze direkt leicht ergeben.

Die Grundereignisse G_r der Hauptdefinition II können durch das gemeinsame Grundereignis G ersetzt werden, das dann und nur dann als eingetroffen gilt, wenn die einzelnen Grundereignisse G_r eingetroffen sind.

Der wesentliche Bestandteil der Hauptdefinition II, nämlich

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m - \sum_{l=1}^n p'_l}{n} = 0$$

würde bei endlichem n mit der Beziehung (5) von Abschnitt 6 $M = p_1 + p_2 + \dots + p_r + \dots + p_N$ inhaltlich zusammenfallen.

13. Aus der Hauptdefinition II können wir weiter eine W.s-Definition ableiten, indem wir jede der möglichen Beziehungen (28) mit irgendeinem Faktor multiplizieren und die so entstehenden Gleichungen zueinander addieren. Durch Einführung eines neuen Symbols C_r ergibt sich dann die *Hauptdefinition III*: Es treffen die Bestimmungen a und b der Hauptdefinition II zu. c) Weiter soll folgendes gelten: Ordnet man jedem der Fälle F_r eine Grösse C_r nach vorgegebenen Zuordnungsverfahren zu, wobei

$$(34) \quad 0 \leq C_r \leq C$$

ist und C eine endliche positive Grösse bedeutet

d) und setzt man

$$(35) \quad \begin{cases} g_r = 1, & \text{wenn das Ereignis } P_r \text{ zutrifft und} \\ g_r = 0, & \text{wenn das Ereignis } P_r \text{ nicht zutrifft,} \end{cases}$$

so ist

$$(36) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{r=1}^k g_r C_r - \sum_{r=1}^k p_r C_r}{C \cdot k} = 0$$

e) Die Zahlen p_r sind dann die W.en p_r^* .

Trifft die Hauptdefinition III zu, so gilt selbstverständlich auch die Hauptdefinition II.

Da p_r durch p_r^* ersetzt werden kann, so ist auch

$$(37) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{r=1}^k g_r C_r - \sum_{r=1}^k p_r^* C_r}{C \cdot k} = 0$$

14. Bedeuten nun die Fälle F_r für $r = 1, 2, \dots, k$, wo k zunächst eine endliche Zahl bleibt, die Versicherungen eines Bestandes, P_r die dazugehörigen versicherten Ereignisse und C_r das Kapital, das beim Eintreten von P_r zahlbar ist (wo also zu jeder Versicherung nur ein Kapital gehören soll), so ist bei der Bezeichnung des vorigen Abschnittes

$$(38) \quad T_k = \sum_{r=1}^k g_r C_r$$

das fällig werdende Kapital dieses Bestandes und

$$(39) \quad S_k = \sum_{r=1}^k p_r^* C_r$$

der Erwartungswert dieses Kapitals (siehe Abschnitte 18 und 21).

Bilden die Ereignisse P_r ($r = 1, 2, \dots, k$) für $\lim k \rightarrow \infty$ ein Koll. allg. Art, für welches nach der Hauptdefinition III die Beziehung (37) gilt, und hat man einen Versicherungsbestand mit den k Ereignissen P_r und den dazugehörigen Kapitalien C_r , so trifft nach unseren Bezeichnungen auch die Beziehung

$$(40) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{T_k - S_k}{C \cdot k} = 0$$

zu, und da nach der Hauptdefinition III C eine endliche Grösse ist,

$$(41) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{T_k}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k}{k}$$

15. Wenn in den Hauptdefinitionen II und III eine Folge einer unbegrenzten Zahl von Fällen F_r angenommen sind, für welche wieder ein Grundereignis G_r eingetroffen ist, aber für welche die W.en

$$(42) \quad p_r^* = w(G_r, G_r P)$$

für das Einsetzen eines einheitlichen Ereignisses P bestimmt werden sollen, so ist es nur eine Sache der Bezeichnung, dieses Ereignis wieder als P_r zu bezeichnen, falls das Grundereignis G_r eingetroffen ist, da dasselbe Ereignis P , in verschiedenen Fällen F_r auf verschiedene Grundereignisse G_r angewandt, sich wie verschiedene Ereignisse P_r verhält.

Stimmen in der Hauptdefinition II weiter die G_r in den für die W.s-Bestimmung des Ereignisses P wesentlichen Eigenschaften miteinander überein, gilt also für jedes p_r^* die Beziehung

$$(43) \quad p_r^* = p^* \quad \text{für } r = 1, 2, \dots, k,$$

so wollen wir die verschiedenen Grundereignisse G_r ebenfalls als ein einheitliches Grundereignis G betrachten, das in jedem der Fälle F_r eingetroffen ist. Die Hauptdefinition II geht dann sachlich über in die Hauptdefinition I und das Koll. allg. Art in das Koll. spez. Art. An Stelle der Beziehungen (27) tritt dann nämlich die Beziehung (43), jedem Fall F_r wird dieselbe Zahl p zugeordnet, Absatz b kann weggelassen werden, da sich die grundlegenden W.s-Sätze des Abschnittes 11 von selber ergeben, in Absatz c und d wird

$$(44) \quad p'_i = p$$

und aus (28) folgt dann

$$(45) \quad p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n},$$

was sich auch aus (25) und (26) ergibt. Schliesslich ist nach Absatz e $p^* = p$.

16. Während nun im Koll. spez. Art nach der Hauptdefinition I durch die Beziehungen (25) und (26), zusammengefasst in (45), die in Betracht kommende W. (1) $p = w(G, GP)$ eindeutig gegeben ist, lassen sich durch das Koll. allg. Art nach den Hauptdefinitionen II und III, auch wenn nach dem ersten Absatz des Abschnittes (15) dasselbe Ereignis P in allen vorgesehenen Fällen F_r in Betracht kommt, die W.en p_r^* nicht unmittelbar bestimmen, sondern es gelten nur die Beziehungen der Hauptdefinition II resp. die Beziehung (37) der Hauptdefinition III. Um die W.en p_r^* für das Koll. allg. Art endgültig zu erhalten, führen wir noch zusätzliche Bestimmungen ein, die an Stelle der für die Hauptdefinition I und das Koll. spez. Art geltenden Festsetzung einer einzigen W. p für das ganze Koll. spez. Art treten. Die in Betracht kommenden W.en in Abschnitt 15

$$(42) \quad p_r^* = w(G_r, G_r, P)$$

hängen nämlich von den Umständen ab, unter welchen das Ereignis P in den einzelnen Fällen F_r eintritt, vor allem von den Eigenschaften der Grundereignisse G_r . Jedes derselben ist durch einen Index r gekennzeichnet. Als in Frage kommende zusätzliche Bestimmungen machen wir deshalb die W.en p_r^* zu in ihrer Form vorgegebenen Funktionen der Indizes r und von Unbekannten a_1, a_2, \dots, a_s , wobei letztere nach ihrer Ermittlung das in Frage kommende Kollektiv kennzeichnen, analog wie in Abschnitt 6 die Beziehung gebildet ist (9) $p_r = u \cdot q_{y_r}$, wo die Unbekannte u nach ihrer Ermittlung der Sterblichkeitsfaktor der untersuchten Gruppe anormaler Risiken und q_{y_r} die Sterbens-W. für das zum Index r gehörende normale Risiko bedeutet. Wir setzen also

$$(46) \quad p_r^* = f(r, a_1, a_2, \dots, a_s) \text{ für } r = 1, 2, \dots, k, \text{ lim } k \rightarrow \infty,$$

wo f die in ihrer Form vorgegebene Funktion ist. Dieser Wert wird in (28) der Hauptdefinition II eingesetzt, wo für jedes t derjenige Wert r zu nehmen ist, für welchen die Grösse p_t' nach Absatz c dieser Hauptdefinition mit p_r , also auch mit p_r^* zusammenfällt. Dann erhält man die Beziehungen

$$(47) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m - \sum_{t=1}^n f[r; a_1, a_2, \dots, a_s]}{n} = 0$$

oder wird der Wert (46) für jedes p_i^* (Beziehung (37) der Hauptdefinition III) eingesetzt, so erhält man

$$(48) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{r=1}^k g_r C_r - \sum_{r=1}^k f[r; a_1, a_2, \dots, a_s] C_r}{C \cdot k} = 0$$

wo g_r , C_r und C aus (37) bestimmt sind.

Nun sind viele Gleichungen von der Form (47) resp. (48) vorhanden. Lassen sich aus den Gleichungen (47) resp. (48) die Unbekannten a_1, a_2, \dots, a_s bestimmen, so ergeben sich die W.en p_r^* aus (46).

Im gegebenen Koll. allg. Art erhält man also nach geeigneter Vervollständigung durch zusätzliche Bestimmungen für jede der W.en p_r^* einen Wert, aber diese Werte hängen vom Koll. allg. Art und den genannten zusätzlichen Bestimmungen ab.

17. Nun eine kurze Aufstellung von Definitionen und von Sätzen, die notwendig sind, um nach Abschnitt 1, zweiter Absatz, zu zeigen, wie das Koll. allg. Art in den praktisch wichtigsten Fällen mittelst der Anwendung der grundlegenden W.s-Sätze (Satz 1 bis 5) und von Unabhängigkeitsbedingungen entsteht.

Definition 1: Ist das Grundereignis G eingetroffen und tritt von dann sich einander ausschliessenden Ereignissen P^I und P^{II} entweder das eine oder das andere ein, so heissen P^I und P^{II} in bezug auf G zueinander komplementär.

(Zum Unterschied der Hauptdefinitionen I, II und III beginne ich bei den andern Definitionen also mit 1.)

Daraus ergibt sich

Satz 6: Sind P^I und P^{II} in bezug auf G zueinander komplementär, so ist

$$(49) \quad w(G, GP^I) + w(G, GP^{II}) = 1.$$

(Satz der komplementären W.en)

18. Nun definieren wir die «zufällige» Variable und den «Erwartungswert» derselben.

Definition 2: Wenn eine Grösse A , nachdem ein Grundereignis G eingetroffen ist, verschiedene Werte a_r ($r = 1, 2, \dots, n$) annimmt, je

nachdem das eine oder das andere der sich einander ausschliessenden Ereignisse P_r eingetreten ist, wobei stets eines derselben eintreffen soll, so nennt man A eine zufällige Variable.

Jedem der Werte a_r ist die W.

$$(50) \quad \bar{p}_r = w(G, GP_r)$$

zugeordnet, und es ist

$$(51) \quad \sum_{r=1}^n \bar{p}_r = 1$$

(vgl. die Beziehung (49) von Satz 6).

Definition 3: Den Wert

$$(52) \quad M(A) = \sum_{r=1}^n \bar{p}_r a_r$$

nennt man den Erwartungswert der zufälligen Variablen A .

Analog haben wir die zufällige Variable B , welche, nachdem dasselbe Grundereignis G eingetroffen ist, die Werte b_s ($s = 1, 2, \dots, m$) annimmt, je nachdem (s. Definition 2) eines der Ereignisse Q_s eingetroffen ist. Werden entsprechend (50) die W.en

$$(53) \quad \bar{q}_s = w(G, GQ_s) \text{ zugeordnet, so ist}$$

$$(54) \quad \sum_{s=1}^m \bar{q}_s = 1 \text{ und}$$

$$(55) \quad M(B) = \sum_{s=1}^m \bar{q}_s b_s$$

Als die «Summe»

$$(56) \quad C = A + B$$

bezeichnen wir die zufällige Variable, welche den Wert $(a_r + b_s)$ annimmt, wenn die Variable A den Wert a_r und die Variable B den Wert b_s annimmt. Bezeichnen wir die voneinander verschiedenen Werte, welche C annehmen kann, mit c_t ($t = 1, 2, \dots, 0$) und ist $\bar{\omega}_t$ die W., dass C auf irgendeine Weise den Wert c_t annimmt, so ist

$$(57) \quad \sum_{t=1}^0 \bar{\omega}_t c_t = \sum_{r=1}^n \bar{p}_r a_r + \sum_{s=1}^m \bar{q}_s b_s \text{ oder}$$

$$(58) \quad M(C) = M(A) + M(B).$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Beziehung erhält man den

Satz 7: Es ist

$$(59) \quad M\left(\sum_{r=1}^n A_r\right) = \sum_{r=1}^n (M A_r).$$

Es kann nun jede der Grössen $g_r C_r$, die in der Beziehung (36) resp. (37) (Hauptdefinition III) auftreten, als zufällige Variable betrachtet werden, welche die Werte C_r oder Null annimmt, je nachdem das Ereignis P_r mit der W. p_r^* eintritt oder nicht. Wenn das Ereignis P_r nicht eintritt, so tritt das zu demselben komplementäre Ereignis Q_r mit der W. $(1 - p_r^*)$ ein (s. Satz 1). Es ist also nach (52) (Definition III)

$$M(g_r C_r) = p_r^* C_r + (1 - p_r^*) \cdot 0 \quad \text{oder}$$

$$(60) \quad M(g_r C_r) = p_r^* C_r$$

und nach Satz 7 (Beziehung (59))

$$(61) \quad M\left(\sum_{r=1}^k g_r C_r\right) = \sum_{r=1}^k p_r^* C_r.$$

Nach der Deutung von Abschnitt 14 kommen wir zu den Beziehungen (38) und (39), wo T_k als fällig gewordenes Kapital eine zufällige Variable und S_k der Erwartungswert derselben ist, wobei sich noch die Beziehung (41) ergibt.

19. Um nachzuweisen, dass die versicherten Ereignisse des Bestandes eines wirtschaftlich gesicherten Versicherungsunternehmens einen annähernd genügend umfangreichen Ausschnitt eines Koll. allg. Art bilden müssen und deshalb die Beziehung (41) näherungsweise für die versicherten Ereignisse eines solchen Bestandes anwendbar ist, ist der Begriff der gegenseitigen Unabhängigkeit von Ereignissen und die sich daraus ergebenden Folgerungen wichtig.

Wir definieren (etwas allgemeiner als es sonst üblich ist)

Definition 4: Zwei Ereignisse P und Q sind in bezug auf ein Grundereignis G (im Sinne der W.s-Rechnung) voneinander unabhängig, wenn entweder

$$(62) \quad w(GP, GPQ) = w(G, GQ) \quad \text{oder wenn}$$

$$(63) \quad w(G, GP) = 0 \quad \text{ist.}$$

Nach Satz 5 gilt für alle Ereignisse P und Q (auch wenn sie nicht voneinander unabhängig sind) die Beziehung (33)

$$w(G, GPQ) = w(G, GP) \cdot w(GP, GPQ).$$

Durch Einsetzen von (62) ergibt sich daraus

$$(64) \quad w(G, GPQ) = w(G, GP) \cdot w(G, GQ).$$

Gilt aber (63), so ist ebenfalls

$$(65) \quad w(G, GPQ) = 0, \text{ weil stets}$$

$$(66) \quad w(G, GPQ) \overline{\leq} w(G, GP).$$

Wenn aber (63) und (65) gilt, so gilt (64) ebenfalls.

Wir haben also

Satz 8: Aus der Definition 4 folgt

$$(64) \quad w(G, GPQ) = w(G, GP) \cdot w(G, GQ)$$

(spezieller Satz der zusammengesetzten W.)

Aus (64) ergibt sich andererseits eine der Beziehungen (62) und (63), aber auch in entsprechender Weise eine der Beziehungen

$$(67) \quad w(GQ, GQP) = w(G, GP) \text{ oder}$$

$$(68) \quad w(G, GQ) = 0.$$

Wir haben also

Satz 9: Aus der Beziehung (64) folgt, dass die beiden Ereignisse P und Q in bezug auf G voneinander unabhängig sind. Diese Unabhängigkeit ist weiter stets gegenseitig.

Wenn mehr als zwei Ereignisse voneinander unabhängig sein sollen, so gilt die

Definition 5: Wenn die Ereignisse R_1, R_2, \dots, R_n ($n > 2$) in bezug auf ein gemeinsames Grundereignis G (im Sinne der W.s-Rechnung) voneinander unabhängig sein sollen, so muss jedes Ereignis R_s für $s = 2, 3, \dots, n$ nicht nur von allen Ereignissen R_k für $k < s$ unabhängig sein, sondern auch von jedem Ereignis, das dadurch entsteht, dass mehrere Ereignisse R_{k_t} für $k_t < s$ zugleich eintreffen.

Nach dieser Definition muss z. B. das Ereignis R_s vom Ereignis $R_{k_1} R_{k_2} \dots R_{k_t} \dots R_{k_r}$ (wo $t = 1, 2, \dots, r$, und $k_1 < k_2 < \dots < k_t < \dots < k_r < s$ ist) unabhängig sein.

Aus Definition 5 folgt, dass die Zahl der Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit die obigen n Ereignisse voneinander unabhängig sind, mit wachsendem n rasch ansteigt.

Wenn die genannten Ereignisse übrigens in der einen Reihenfolge voneinander unabhängig sind, so sind sie es auch in jeder andern.

20. Für zufällige Variable A_r , die voneinander unabhängig sein sollen, gilt nun die

Definition 6: Die n zufälligen Variablen A_r für $r = 1, 2, \dots, n$, die von den Ereignissen P_{r, s_r} abhängen, heissen in bezug auf ein gemeinsames Grundereignis G voneinander unabhängig, wenn die n Ereignisse $P_{1, s_1}, P_{2, s_2} \dots P_{r, s_r} \dots P_{n, s_n}$ bei allen möglichen Zusammenstellungen der Werte für die s_r in bezug auf das Grundereignis G voneinander unabhängig sind.

Wir führen noch die «Streuung» $\sigma(A)$ einer zufälligen Variablen ein und definieren:

Definition 7: Die Streuung $\sigma(A)$ der zufälligen Variablen A ist gegeben durch

$$(69) \quad \sigma(A) = + \sqrt{M[\{A - M(A)\}^2]}$$

Die Streuung ist also stets positiv (oder Null), und es ist

$$(70) \quad [\sigma(A)]^2 = M[\{A - M(A)\}^2].$$

Wenn die Bezeichnungen des Abschnittes 18 zu den Definitionen 2 und 3 gelten, so ist deshalb

$$(71) \quad [\sigma(A)]^2 = \sum_{r=1}^n \bar{p}_r \left\{ a_r - \sum_{s=1}^n \bar{p}_s a_s \right\}^2.$$

Wie man sieht, wird nur $\sigma(A) = 0$, wenn für jedes r , für welches $p_r > 0$ ist, $a_r = a$ ist, also wenn in jedem vorkommenden Fall $A = a$ wird, d. h. wenn A keine zufällige Variable, sondern eine feste Grösse ist.

Für die zufälligen Variablen A_r gilt nun

Satz 10: Sind die zufälligen Variablen A_r für $r = 1, 2, \dots, n$ in bezug auf ein gemeinsames Grundereignis voneinander unabhängig, so ist

$$(72) \quad \left[\sigma \left(\sum_{r=1}^n A_r \right) \right]^2 = \sum_{r=1}^n [\sigma(A_r)]^2.$$

Es ist zu beachten, dass Satz 7 für alle zufälligen Variablen A_r , während Satz 10 nur für solche zufälligen Variablen gilt, die voneinander unabhängig sind.

21. Wir nehmen nun an, dass bei irgendeiner Versicherungsunternehmung oder bei einer sonstigen Veranstaltung, auf welche die W.s-Rechnung anwendbar ist, eine zunächst nicht unbegrenzte Zahl von Fällen F_r ($r = 1, 2, \dots k$) wie in Abschnitt 14 vorhanden ist, so dass auch die Beziehungen

$$(38) \quad T_k = \sum_{r=1}^k g_r C_r$$

und

$$(39) \quad S_k = \sum_{r=1}^k p_r^* C_r$$

gelten, wo nach der Beziehung (61) von Abschnitt 18

$$(73) \quad M\left(\sum_{r=1}^k g_r C_r\right) = S_k \text{ ist.}$$

Nun könnten wir voraussetzen, dass alle Ereignisse P_r in bezug auf das angenommene gemeinsame Grundereignis G voneinander unabhängig sind. Wir wollen aber, um alle bei der praktischen Anwendung unserer Hauptdefinitionen vorkommenden Verhältnisse, besonders diejenigen der Lebensversicherungen, zu berücksichtigen, folgendes annehmen: Die Gesamtheit der Fälle F_r werden in die l Gruppen 1, 2, \dots s , \dots l zerlegt, indem wir setzen

$$(74) \quad \begin{array}{ll} \text{für die Gruppe 1:} & r = r_1 = 1, 2, \dots m_1 \\ \text{» » » 2:} & r = r_2 = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots m_2 \\ \text{» » » s:} & r = r_s = m_{s-1} + 1, m_{s-1} + 2, \dots m_s \\ \text{» » » l:} & r = r_l = m_{l-1} + 1, m_{l-1} + 2, \dots m_l \end{array}$$

Dabei ist

$$(75) \quad 0 < m_1 < m_2 < \dots < m_s < \dots < m_l = k.$$

Dann ist $m_s - m_{s-1}$, wo $m_0 = 0$ ist, die Zahl der in der Gruppe s für $s = 1, 2, \dots l$ enthaltenen Fälle F_{r_s} . Nun sollen alle Ereignisse, die einer Gruppe s angehören, also die Ereignisse P_{r_s} in bezug auf G von allen Ereignissen, die irgendeiner andern Gruppe t angehören,

also von den Ereignissen P_{r_t} unabhängig sein. Dabei ist wie die s auch $t = 1, 2, \dots, l$, aber $t \neq s$. Die der Gruppe s zugeordneten Grössen C_{r_s} sollen nun zusammengefasst werden zur Summe

$$(76) \quad U_s = \sum_{r_s=m_{s-1}+1}^{m_s} C_{r_s}.$$

Diese Summe U_s soll einen Maximalwert U nicht überschreiten; es ist also

$$(77) \quad U_s \leq U.$$

Von den Summen U_s sind zu unterscheiden die Summen der Grössen C_{r_s} , für welche das entsprechende Ereignis P_{r_s} eingetreten ist. Diese Summen sind also analog der Summen T_k zufällige Variable und gegeben durch

$$(78) \quad \Omega_s = \sum_{r_s=m_{s-1}+1}^{m_s} g_{r_s} C_{r_s}, \text{ wo analog } g_r$$

$$g_{r_s} = 1, \text{ wenn } P_{r_s} \text{ eingetreten und}$$

$$g_{r_s} = 0, \text{ wenn } P_{r_s} \text{ nicht eingetreten ist.}$$

Für die durch (38) bestimmte zufällige Variable T_k gilt dann

$$(79) \quad T_k = \sum_{s=1}^l \Omega_s$$

und für den Erwartungswert

$$S_k = M(T_k) \text{ gilt}$$

$$(80) \quad S_k = \sum_{s=1}^l M(\Omega_s), \text{ wo}$$

$$(81) \quad M(\Omega_s) = \sum_{r_s=m_{s-1}+1}^{m_s} p_{r_s}^* C_{r_s}.$$

Die Streuung $\sigma(T_k)$ kann nach Satz 10 Beziehung (72) bestimmt werden durch

$$(82) \quad [\sigma(T_k)]^2 = \sum_{s=1}^l [\sigma(\Omega_s)]^2.$$

Nun existiert nicht nur nach der Beziehung (77) für U_s der Maximalwert U , sondern nach der Beziehung

$$(83) \quad \sigma(\Omega_s) \leq \sigma^* \text{ auch für } \sigma(\Omega_s) \text{ der}$$

Maximalwert σ^* . Aus (83) und (82) folgt

$$(84) \quad \sigma(T_k) \leq \sigma^* \sqrt{l}.$$

An Stelle der T_k führen wir noch die relative fällige Summe

$$(85) \quad T_k^* = \frac{1}{l} T_k$$

als zufällige Variable ein.

Dann ist

$$(86) \quad M(T_k^*) = \frac{1}{l} \cdot S_k \text{ und}$$

$$(87) \quad \sigma(T_k^*) = \frac{1}{l} \sigma(T_k).$$

22. Für zufällige Variable besteht nun

Satz 11. Die W. $(1 - \gamma)$, dass die zufällige Variable A den Wert $M(A) + h \cdot \sigma(A)$ nicht überschreiten, aber den Wert $M(A) - h \cdot \sigma(A)$ erreichen wird, ist nach unten begrenzt durch die Ungleichung

$$(88) \quad (1 - \gamma) > \left(1 - \frac{1}{h^2}\right). \quad (\text{Satz von Tschebyscheff})$$

Die Grösse h kann als positive Grösse angenommen werden. Damit der Satz 11 einen Sinn hat, muss $h > 1$ sein.

Setzt man T_k^* als zufällige Variable in Satz 11 ein, so erhält man

Satz 12: Die W. $(1 - \gamma)$, dass die relative fällige Summe

$$(85) \quad T_k^* = \frac{1}{l} T_k$$

unter den im Abschnitte 21 gegebenen Bedingungen den Wert

$$\frac{1}{l} S_k + \frac{\sigma^*}{\sqrt{l}} \cdot h$$

nicht überschreiten, aber den Wert

$$\frac{1}{l} S_k - \frac{\sigma^*}{\sqrt{l}} \cdot h$$

erreichen wird, ist nach unten begrenzt durch

$$(88) \quad (1 - \gamma) > \left(1 - \frac{1}{h^2}\right).$$

Nun ist bei allen praktisch vorkommenden Anwendungen der in Abschnitt 21 gegebenen Ausführungen die Anzahl l der gebildeten Gruppen eine grosse Zahl, während σ^* und $\frac{1}{l} S_k$ bestimmte endliche Werte nicht überschreiten. Dann wird auch bei grossem h die vorgesehene Schwankung zwischen den Werten

$$\frac{1}{l} S_k + \frac{\sigma^*}{\sqrt{l}} \cdot h \quad \text{und} \quad \frac{1}{l} S_k - \frac{\sigma^*}{\sqrt{l}} \cdot h$$

ziemlich klein, und die W. $(1 - \gamma)$ kann beliebig nahe an Eins gebracht werden, falls nur l so gross gewählt wird, dass auch bei grossem h der Wert $\frac{h}{\sqrt{l}}$ klein bleibt.

Um zu einem Koll. allg. Art zu gelangen, setzen wir nun

$$(89) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} l, \text{ während die Werte } \sigma^* \text{ und } \frac{1}{l} S_k \text{ endlich bleiben.}$$

Sodann setzen wir

$$(90) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{h}{\sqrt{l}} \rightarrow 0$$

und trotzdem

$$(91) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} h \rightarrow \infty$$

Dadurch nämlich, dass zuerst h genügend gross gewählt wird und dann l so gross, dass (90) gilt, kann das Zusammenbestehen von (90) und (91) gesichert werden. Dann fallen

für $\lim l \rightarrow \infty$ die Werte $\frac{1}{l} S_k + \frac{\sigma^*}{\sqrt{l}} \cdot h$ und $\frac{1}{l} S_k - \frac{\sigma^*}{\sqrt{l}} \cdot h$

und alle dazwischenliegenden mit $\frac{1}{l} S_k$ zusammen, und es wird nach der Beziehung (88)

$$(92) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} (1 - \gamma) = 1, \text{ wo } (1 - \gamma)$$

die W. ist, dass

$$(93) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} T_k = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} S_k \text{ wird.}$$

23. Ist nun α_n die W., dass eine Gleichung

$$(94) \quad f(n) = g(n)$$

(wo f und g irgendwelche Grössen, welche von n abhängen, sind) zutrifft, wo das Eintreffen einer Gleichung auch als ein Ereignis betrachtet werden kann, und gilt für α_n die Beziehung

$$(95) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1,$$

so folgt daraus noch nicht, dass die Gleichung

$$(96) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(n)$$

mit Gewissheit zutrifft. Sind nämlich $P_1^*, P_2^*, \dots, P_r^*, \dots, P_n^*$ n Ereignisse, die sich unter der Voraussetzung, dass das gemeinsame Grundereignis G eingetroffen ist, einander ausschliessen, wo aber eines der Ereignisse P_r^* eintreffen soll, so ist, wenn $w(G, GP_r^*) = p_r^*$ gesetzt wird

$$\sum_{r=1}^n p_r^* = 1.$$

Nun setzen wir $\lim n \rightarrow \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} p_r^* = 0$ für jedes Ereignis P_r^* , trotzdem muss nach Voraussetzung eines dieser Ereignisse eintreten; wir wollen dasselbe mit P_t^* bezeichnen. Bezeichnet man nun das zu P_r^* in bezug auf G komplementäre Ereignis mit P_r und $w(G, GP_r) = p_r$, so ist

$$(97) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_r = 1$$

für jedes Ereignis P_r , trotzdem wird eines dieser Ereignisse nicht eintreten, nämlich das zum eintretenden Ereignis P_t^* komplementäre Ereignis P_t . Wenn wir aber von vornherein ein einzelnes der Ereignispaare P_r^* und P_r betrachten und dabei $\lim_{n \rightarrow \infty} p_r^* = 0$ resp. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_r = 1$ setzen, so wird für $n \rightarrow \infty$ stets das Ereignis P_r eintreten. Es gilt also der

Satz 13: Ist ein Grundereignis G eingetreten und ist $P_1, P_2 \dots P_r, \dots P_n$ eine Reihe von Ereignissen, für welche gilt (97) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_r = 1$ und betrachtet man das Ereignis P_r für sich, so wird für $\lim_{n \rightarrow \infty}$ dieses Ereignis eintreten.

Wir ergänzen durch diesen Satz die Annahmen, die zu den grundlegenden Sätzen 1 bis 5 der W.s-Rechnung führen.

Da die Aussage (resp. das Ereignis), dass die Beziehungen (92) und (93) gelten sollen, bei jeder Anwendung einen vorgesehenen einzelnen Fall betrifft, so ergibt sich der

Satz 14: Bildet man entsprechend den Abschnitten 21 und 22 die relative fällige Summe T_k für $\lim_{l \rightarrow \infty}$, so ist stets

$$(93) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} T_k = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} S_k.$$

Aus (89) $\lim_{l \rightarrow \infty}$ folgt auch

$$(98) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} k \rightarrow \infty.$$

Setzt man in (93) die Werte (38) und (39) ein, berücksichtigt man ferner, dass der Quotient $\frac{l}{k}$ eine endliche von Null verschiedene Grösse ist und wird im Nenner beider Seiten der entstehenden Gleichung noch die endliche Grösse C als Faktor verwendet, so ergibt sich die Beziehung (37), also

Satz 15: Unter den Annahmen der Abschnitte 21 und 22 bilden die Fälle F_r für $r = 1, 2, \dots k$, $\lim_{k \rightarrow \infty}$ ein Koll. allg. Art.

Die für Koll.e allg. Art massgebenden Beziehungen (37) und auch (28) stellen also Verallgemeinerungen der Unabhängigkeitsbedingungen vor. Da bei der praktischen Anwendung der W.s-Rechnung

stets Unabhängigkeitsbedingungen wenigstens in genügender Annäherung erfüllt sind, so wollen wir hier auf Erörterungen verzichten, ob und auf welche andere Art ein Koll. allg. Art zustande kommen kann.

24. Für die k resp. n können bei praktischen Anwendungen keine unendlich grossen, sondern nur endliche, wenn auch grosse Zahlen eingesetzt werden. Dadurch kommen wir u. a. zu den W.s-Bestimmungen der Abschnitte 4 bis einschliesslich 7.

Wenn nun ein Koll. allg. Art gegeben ist, so lassen sich unter bestimmten Voraussetzungen die W.en entweder genau oder in beliebiger Annäherung auch als W.en von Koll.en spez. Art ausdrücken, aber diese Koll.e spez. Art sind nur konstruierbar, wenn vorher das Koll. allg. Art gegeben ist.

Es ist noch zu beachten, dass unsere W.s-Definitionen durch die Koll.e allg. Art sich in diesem Aufsatz unmittelbar an die klassische Theorie der W.s-Rechnung anlehnen und diese auf natürliche Weise vervollständigen und dass von statistisch und versicherungswissenschaftlichen brauchbaren W.en nur gesprochen werden kann, wenn sich diese wenigstens in genügender Annäherung durch Einzelwerte in Koll.en allg. oder spez. Art ausdrücken lassen. Möchte noch bemerken, dass man allgemein nach der Methode der kleinsten Quadrate Ausschnitte aus Koll.en allg. Art erhält, die durch die vorausgesetzten Beziehungen zwischen den W.en ergänzt sind.

Die nähere Begründung der in diesem Aufsatz aufgeführten Sätze ist in Lehrbüchern nachzusehen oder im Werke von H. Reichenbach: «Wahrscheinlichkeitslehre. Eine Untersuchung über die logischen und mathematischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.» Leiden 1935.