

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of  
Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 52 (1952)

**Artikel:** Über eine spezielle Klasse von Frequenzfunktionen

**Autor:** Rufener, E.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-550798>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über eine spezielle Klasse von Frequenzfunktionen

Von *E. Rufener*, Zürich

A. Sommerfeld hat für seine Herleitung des Gaußschen Fehlergesetzes symmetrische Verteilungen herangezogen, die sich durch Faltung gleichbreiter rechteckiger Frequenzfunktionen ergeben [1] <sup>1)</sup>. Derartige Funktionen gehen auch in die Lösungsformeln für die gleichwahrscheinliche Aufteilung [2] und den Mittelwert der mittleren Breite zufallsartig gestalteter Polygone ein [3].

Die Faltung rechteckiger Frequenzfunktionen verschiedener Breite führt auf eine allgemeinere Klasse von symmetrischen Frequenzfunktionen. Einblick in ihr Verhalten vermittelt ihre Darstellung durch bestimmte Integrale. Wie in derartigen Fällen üblich, benutzen wir die Fouriertransformation, um das Faltungsprodukt in ein bestimmtes Integral überzuführen und dessen Wert explizite anzugeben. Dem zentralen Grenzwertsatz entnehmen wir schliesslich eine Grenzwertformel, die bemerkenswerte Sonderfälle enthält. Die Bedeutung, die einzelne der angeführten Relationen als Hilfsmittel für das Lösen von Problemen, namentlich aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, haben, rechtfertigt unseres Erachtens eine zusammenfassende Darstellung ihrer Eigenschaften in dieser Mitteilung <sup>2)</sup>.

## 1. Integraldarstellung des Faltungsproduktes von $n$ elementaren Frequenzfunktionen <sup>3)</sup>

Die Verteilungen der  $n$  unabhängigen Variablen  $t_i$  seien durch die Frequenzfunktionen

---

<sup>1)</sup> Die Zahlen in [ ] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

<sup>2)</sup> Ableitungen der von uns betrachteten Funktionen treten auch auf als Kerne einer gewissen Integralgleichung unendlich hoher Ordnung, die mit einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, für deren Hauptlösungen man das asymptotische Verhalten kennt, eng verknüpft ist (vgl. R. Jost, *Helv. Phys. Acta* **20** [1947], S. 256).

<sup>3)</sup> Vgl. etwa G. Dötsch, *Handbuch der Laplace-Transformation I* (Basel 1950), insbes. S. 104–131 und 191–209.

$$F_i(t_i) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2a_i}, \quad |t_i| < a \\ \frac{1}{4a_i}, \quad |t_i| = a \\ 0, \quad |t_i| > a \end{array} \right\} \quad (1)$$

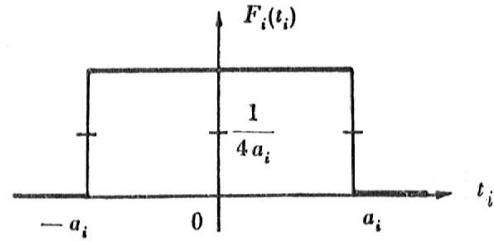


Fig. 1

gegeben. Wir bezeichnen sie als «elementare rechteckige Verteilungen». Ihr Bild ist in Fig. 1 festgehalten.

Das Faltungsprodukt

$$\Omega_n(t; a_1, a_2, \dots, a_n) = F_1(t) * F_2(t) * \dots * F_n(t), \quad (2)$$

das von  $n$  Parametern  $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$  abhängt, ist Frequenzfunktion der Summe

$$t = t_1 + t_2 + \dots + t_n$$

der als stochastisch unabhängig vorausgesetzten Variablen  $t_i$  mit den Frequenzfunktionen (1).

Die Fouriertransformation algebraisiert die transzendente Integralbildung der Faltung. Mit den Bezeichnungen

$$\mathfrak{F}\{\Omega_n(t; a_i); y\} = \omega(y) \quad \text{und} \quad \mathfrak{F}\{F_i(t); y\} = f_i(y)$$

folgt dann

$$\omega(y) = \prod_{\lambda=1}^n f_{\lambda}(y)$$

oder, weil

$$f_i(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt} F_i(t) dt = \frac{1}{2a_i} \int_{-a_i}^{a_i} e^{-iyt} dt = \frac{\sin a_i y}{a_i y}$$

ist,

$$\omega(y) = \prod_{\lambda=1}^n \frac{\sin a_{\lambda} y}{a_{\lambda} y}. \quad (3)$$

$\Omega_n(t; a_i)$  ist in  $t$  gerade Funktion; der Inversionsatz (Fouriersche Cosinustransformation) führt zur Integraldarstellung

$$\Omega_n(t; a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^n \frac{\sin a_{\lambda} x}{a_{\lambda} x} \cos tx dx = \frac{\Phi_n(t; a_1, a_2, \dots, a_n)}{a_1 a_2 \dots a_n}. \quad (4)$$

$$\Phi_n(t; a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^n \frac{\sin a_\lambda x}{x} \cos tx \, dx, \quad (5)$$

durch das Produkt  $a_1 a_2 \dots a_n$  normiert, ist Frequenzfunktion. Ihre Fouriertransformierte  $\mathfrak{F}\{\Phi_n(t; a_i); y\}$  sei mit  $\varphi(y)$  bezeichnet. Das Integral

$$\Phi_1(t; a_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a_1 x}{x} \cos tx \, dx = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}, \quad |t| < a_1 \\ \frac{1}{4}, \quad |t| = a_1 \\ 0, \quad |t| > a_1 \end{array} \right\} \quad (6)$$

ist als Dirichletscher Diskontinuitätsfaktor bekannt [4].

## 2. Integralrekursionen

Da das Faltungsprodukt assoziativ ist, lassen sich in (2) die ersten  $m$  und die  $n - m$  übrigen Faktoren zu Funktionen  $\Omega_m$  und  $\Omega_{n-m}$  zusammenfassen:

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_n(t; a_1, a_2, \dots, a_n) = \Omega_m(t; a_1, a_2, \dots, a_m) * \Omega_{n-m}(t; a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n) \\ \Phi_n(t; a_1, a_2, \dots, a_n) = \Phi_m(t; a_1, a_2, \dots, a_m) * \Phi_{n-m}(t; a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n), \end{array} \right\} \quad (7)$$

$$t; a_1, a_2, \dots, a_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_m(t - \tau; a_1, a_2, \dots, a_m) \Phi_{n-m}(\tau; a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n) \, d\tau.$$

Insbesondere ist

$$\Omega_n(t; a_1, a_2, \dots, a_n) = \Omega_{n-1}(t; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) * \Omega_1(t; a_n),$$

also

$$\Omega_n(t; a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{2a_n} \int_{-a_n}^{a_n} \Omega_{n-1}(t - \tau; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \, d\tau$$

oder

$$\Omega_n(t; a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{2a_n} \int_{t-a_n}^{t+a_n} \Omega_{n-1}(\tau; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \, d\tau \quad (8)$$

und

$$\Phi_n(t; a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{2} \int_{-a_n}^{a_n} \Phi_{n-1}(t - \tau; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \, d\tau$$

$\Omega_n(t; a_1, a_2, \dots, a_n)$  ist Integralmittel von  $\Omega_{n-1}(t; a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$  der symmetrischen Nachbarschaft von  $t$  über ein Intervall der Breite  $2a_n$ .  $\Omega_n(t; a_1, a_2, \dots, a_n)$  entsteht aus  $\Omega_{n-1}(t; a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$  durch einen «Glättungsprozess».  $\Omega_n(t; a_1, a_2, \dots, a_n)$  ist Ergebnis der  $n$ -ten Glättung von  $\Omega_1(t; a_1)$  und kann durch fortgesetztes Bilden des Integralmittels aus  $\Omega_1(t; a_1)$  explizite berechnet werden.

### 3. Die Polynomdarstellungen der Funktionen $\Phi_n(t; a_i)$

Die rekursive Berechnung der  $\Omega_n(t; a_i)$  oder der  $\Phi_n(t; a_i)$  ist nur für kleine  $n$  geeignet; sie wird für  $n \geq 3$  unübersichtlich und mühsam.

Um  $\Phi_n(t; a_i)$  explizite darzustellen, können wir beispielsweise eine der gebräuchlichen funktionentheoretischen Methoden zur Ermittlung derartiger Integrale heranziehen.

Nahezu auf triviale Weise lässt sich die Polynomdarstellung von  $\Phi_n(t; a_i)$  jedoch durch geschicktes Ausnützen der Eigenschaften der Fouriertransformation finden. Wir führen zunächst die Funktionen

$$[t]^n = \begin{cases} t^n, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$[t]^0 = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (9)$$

ein.

$$\mathfrak{F}\{[t + \alpha]^n; y\} = \Gamma(n + 1) \frac{e^{i\alpha y}}{(iy)^{n+1}}$$

entnehmen wir die Inversionsformel

$$\mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{e^{i\alpha y}}{(iy)^{n+1}}; t\right\} = \frac{[t + \alpha]^n}{n!}. \quad (10)$$

Die Fouriertransformierte  $\varphi(y)$  von  $\Phi_n(t; a_i)$  wird auf zwei Arten dargestellt. Das Produkt der Sinusfaktoren,

$$\varphi(y) = \prod_{\lambda=1}^n \frac{\sin a_\lambda y}{y}, \quad (3')$$

führt in der Inversion auf das bestimmte Integral (5) für  $\Phi_n(t; a_i)$ .

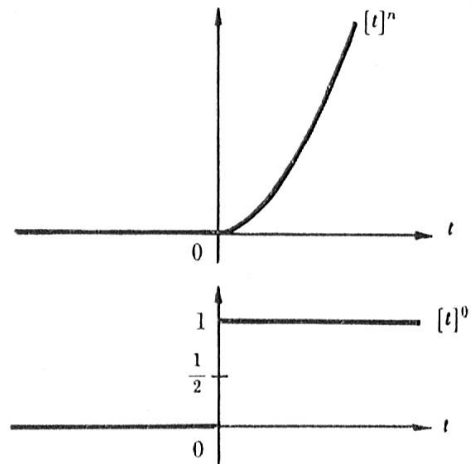


Fig. 2

Stellt man in (3') die  $\sin a_\lambda y$  durch die Eulerschen Formeln dar, so lässt sich  $\varphi(y)$  als Summe schreiben, nämlich:

$$\varphi(y) = \prod_{\lambda=1}^n \left( \frac{e^{ia_\lambda y} - e^{-ia_\lambda y}}{2iy} \right) = \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_j} (-1)^\lambda \frac{e^{i(\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \dots + \varepsilon_n a_n)y}}{(iy)^n}$$

$\varepsilon_j$  ist der Werte  $+1$  und  $-1$  fähig; summiert wird über  $2^n$  Summanden (über alle  $2^n$  Vorzeichenanordnungen in der Klammer);  $\lambda$  ist die Anzahl der negativen  $\varepsilon_j$  in jedem Summand. Mittels (10) entsteht jetzt durch gliedweise Inversion eine Polynomdarstellung für  $\Phi_n(t; a_i)$ , die wegen der Eindeutigkeit der inversen Fouriertransformation das Integral (5) explizite darstellt:

$$\begin{aligned} \Phi_n(t; a_1, a_2, \dots, a_n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^n \frac{\sin a_\lambda x}{x} \cos tx \, dx = \\ &= \frac{1}{2^n(n-1)!} \sum_{\varepsilon_j} (-1)^\lambda [\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \dots + \varepsilon_n a_n \pm t]^{n-1} \end{aligned} \quad (11)$$

$(\varepsilon_j = \pm 1, \lambda \text{ Anzahl der negativen } \varepsilon_j)$

In der Klammer gelten beide Vorzeichen für  $t$ , da  $\Phi_n(t; a_i)$  in  $t$  gerade Funktion ist.

(11) lehrt, dass  $\Phi_n(t; a_i)$  aus Parabeln der Ordnungen  $\leq (n-1)$  zusammengesetzt ist und dass

$$\Phi_n(t; a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \text{ für } |t| \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (12)$$

wird.

#### 4. Eine anschauliche geometrische Interpretation der Funktionen $\Phi_n(t; a_i)$ [1], [5]

Wir betrachten im Euklidischen  $n$ -dimensionalen Raum den Hyperquader mit Mittelpunkt 0 und den Kantenlängen  $2a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ . Seine Kanten seien zu den Koordinatenachsen  $x_i$  parallel.

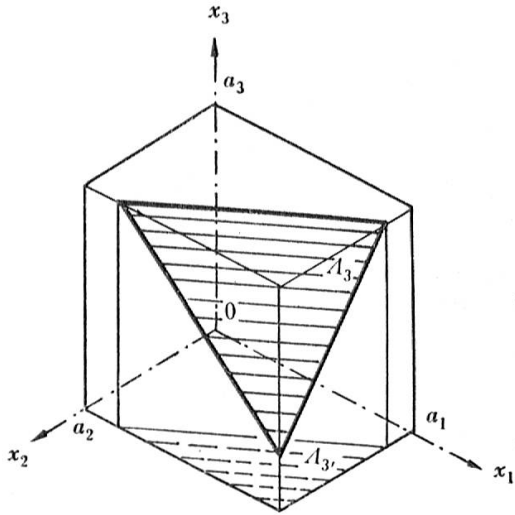


Fig. 3

Es bezeichne

$\theta_n(t)$  das Volumen des Quaders zwischen den  $(n-1)$ -dimensionalen Hyperebenen  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \pm t$ ,

$A_n(t)$  das  $(n-1)$ -dimensionale Schnittvolumen zwischen Quader und Hyperebene,

$A'_n(t)$  seine Projektion in eine der  $n$  Koordinatenhyperebenen  $x_i = 0$ .

Das Schnittvolumen  $\theta_n(t)$  ist dann bestimmt durch

$$\theta_n(t) = \int_{-a_1}^{a_1} \int_{-a_2}^{a_2} \dots \int_{-a_n}^{a_n} \Phi dx_n \dots dx_2 dx_1.$$

Führt man für den Dirichletschen Faktor

$$\Phi = 2\Phi_1(x_1 + x_2 + \dots + x_n; t) = \begin{cases} 1, & |x_1 + x_2 + \dots + x_n| < t \\ 0, & |x_1 + x_2 + \dots + x_n| > t \end{cases}$$

die Integraldarstellung (6) ein und integriert nach den  $x_i$  aus, so folgt

$$\theta_n(t) = 2^n \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a_1 \xi}{\xi} \frac{\sin a_2 \xi}{\xi} \dots \frac{\sin a_n \xi}{\xi} \frac{\sin t \xi}{\xi} d\xi. \quad (13)$$

$A'_n(t)$  und  $A_n(t)$  entstehen aus  $\theta_n(t)$  durch Differentiation:

$$\left. \begin{aligned} A'_n(t) &= \frac{1}{2} \frac{\partial \theta_n}{\partial t} = 2^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^n \frac{\sin a_\lambda x}{x} \cos tx dx = 2^n \Phi_n(t; a_i) \\ A_n(t) &= \frac{\sqrt{n}}{2} \frac{\partial \theta_n}{\partial t} = 2^n \sqrt{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^n \frac{\sin a_\lambda x}{x} \cos tx dx = 2^n \sqrt{n} \Phi_n(t; a_i). \end{aligned} \right\} (14)$$

$2^n \sqrt{n} \Phi_n(t; a_i)$  ist mithin  $(n-1)$ -dimensionales Schnittvolumen zwischen Quader und Ebene  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = t$ ;  $2^n \Phi_n(t; a_i)$  ist Projektion des Schnittvolumens in eine der Koordinatenhyperebenen  $x_i = 0$ .

Wir bemerken noch, dass aus der Integralrekursion (8), wenn sie fortgesetzt auf sich selbst angewendet wird,

$$\Phi_n(t; a_i) = \frac{1}{2^{n-1}} \int_{-a_n}^{a_n} \int_{-a_{n-1}}^{a_{n-1}} \dots \int_{-a_2}^{a_2} \Phi_1(t - \tau_n - \tau_{n-1} - \dots - \tau_2; a_1) d\tau_2 \dots d\tau_{n-1} d\tau_n = \frac{1}{2^n} A'_n(t) \quad (15)$$

folgt. Ebenso führt die geometrische Methode zur Berechnung von Frequenz- und Wahrscheinlichkeitsfunktionen einer Summe stochastisch unabhängiger Variablen im Fall der elementar rechteckigen Verteilungen auf unsere geometrische Interpretation.

Die geometrische Deutung ermöglicht uns, in anschaulichen Fällen, Integrale  $\Phi_n(t; a_i)$  durch geometrisch einfache Überlegungen zu ermitteln. Aus Fig. 4 folgt z. B. ohne Rechnung

$$\Phi_2(0; a_1, a_2) = \frac{a_1}{2}$$

und hieraus das Integral

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a_1 x \sin a_2 x}{x^2} dx = \text{Min.}(a_1, a_2).$$

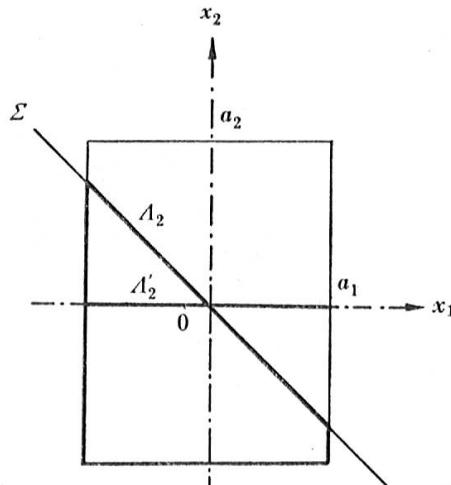


Fig. 4

Fig. 5, konstruiert unter den Voraussetzungen  $a_1 < a_2 < a_3$ ,  $a_1 + a_2 < a_3$ , entnehmen wir, dass in den Intervallgrenzen für  $t$ , die den Schnittebenen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -a_1 + a_2 + a_3 \equiv \Gamma_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= a_1 - a_2 + a_3 \equiv \Delta_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -a_1 - a_2 + a_3 \equiv E_1 \\ \\ x_1 + x_2 + x_3 &= a_1 + a_2 - a_3 \equiv E_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -a_1 + a_2 - a_3 \equiv \Delta_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= a_1 - a_2 - a_3 \equiv \Gamma_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -a_1 - a_2 - a_3 \end{aligned}$$

entsprechen, die Darstellungspolynome für  $\Phi_3(t; a_1, a_2, a_3)$  ändern.



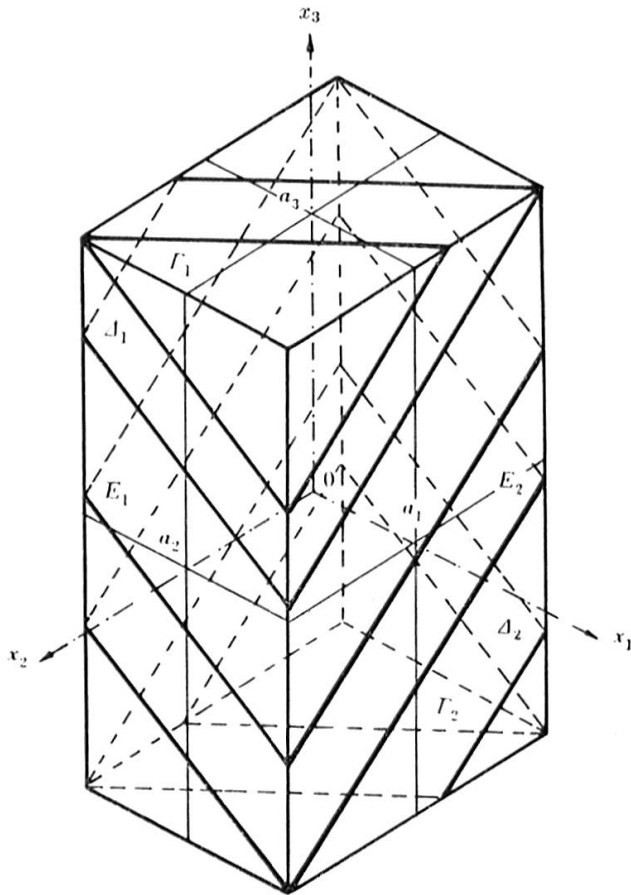


Fig. 5

Den expliziten Funktionsverlauf (Fig. 6) erhalten wir durch Berechnung der Schnittfiguren:

$$\Phi_3(t; a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} 0, & |t| \geq a_1 + a_2 + a_3 \\ \frac{1}{16}(a_1 + a_2 + a_3 - t)^2, & a_1 + a_2 + a_3 \geq |t| \geq -a_1 + a_2 + a_3 \\ \frac{1}{4}(a_1 a_2 + a_1 a_3 - a_1 t), & -a_1 + a_2 + a_3 \geq |t| \geq a_1 - a_2 + a_3 \\ \frac{1}{16}[8a_1 a_2 - (a_1 + a_2 - a_3 + t)^2], & a_1 - a_2 + a_3 \geq |t| \geq -a_1 - a_2 + a_3 \\ \frac{a_1 a_2}{2}, & -a_1 + a_2 + a_3 \geq |t| \geq 0. \end{cases}$$

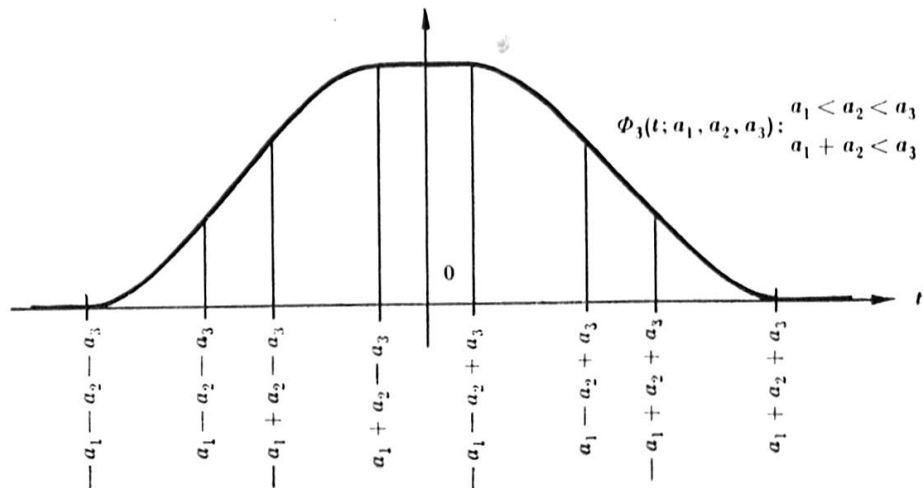


Fig. 6

### 5. Die Ableitungen nach $t$ ; Differentialrekursionen. Abschätzungsformeln

Aus

$$\Phi_n(t; a_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^n \frac{\sin a_\lambda x}{x} \cos tx \, dx$$

folgt durch Ableiten nach  $t$  mittelst einer naheliegenden trigonometrischen Umformung des Integranden, zunächst die Differentialrekursion

$$\frac{\partial \Phi_n(t; a_i)}{\partial t} = \frac{1}{2} \{ \Phi_{n-1}(t + a_1; a_2, \dots, a_n) - \Phi_{n-1}(t - a_1; a_2, \dots, a_n) \} \quad (16)$$

und hieraus

$$\frac{\partial^r \Phi_n(t; a_i)}{\partial t^r} = \frac{1}{2^r} \sum_{\varepsilon_j} (-1)^\lambda \Phi_{n-r}(t + \varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_r a_r; a_{r+1}, \dots, a_n) \quad (17)$$

( $\lambda = \text{Anzahl der negativen } \varepsilon_j$ ).

$\Phi_n(t; a_i)$  hat nach (17) höchstens  $(n - 2)$  stetige Ableitungen; existiert die  $(n - 1)$ -te, so ist sie unstetig.

Die Kanten des Parallelepipedes seien in der Reihenfolge  $a_1, a_2, a_3, \dots$  der Grösse nach angeordnet:  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$ . Die in der Koordinatenhyperebene  $x_i = 0$  liegende «Grundfläche» des Quaders ist also kleinste begrenzende «Seitenfläche».

Weil die Projektion des Schnittvolumens,  $A'_n(t)$ , in eine Koordinatenhyperebene höchstens die in ihr liegende «Grundfläche» ausfüllen kann, folgen die Abschätzungen

$$\Phi_n(t; a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \frac{1}{2} a_1 a_2 \dots a_{n-1} \leq \frac{1}{2} (a_1 a_2 \dots a_{n-1})^{\frac{n-1}{n}} = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{2N} \quad (18)$$

mit

$$N = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

und

$$\left| \frac{\partial^r \Phi_n(t; a_i)}{\partial t^r} \right| \leq \frac{1}{2} a_1 a_2 \dots a_{n-r-1} \leq \frac{1}{2} (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{n-r-1}{n}} = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{2N^{r+1}} \quad (19)$$

oder

$$\left| \frac{\partial^r \Phi_n(t; a_i)}{\partial t^r} \right| \leq \frac{1}{2} (a_1 a_2 \dots a_m)^{\frac{n-r-1}{m}}, \quad (n - r - 1 \leq m \leq n). \quad (20)$$

### 6. Die Grenzfälle unendlich grosser Kantenlängen

Um den Einfluss der Grössenbeziehungen zwischen den Kanten  $2a_i$  auf das Aussehen der Funktion  $\Phi_n(t; a_i)$  zu untersuchen, ist es zweckmässig, die Quaderecke  $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$  als neuen Ursprung  $0^*$  des Koordinatensystems zu wählen. Bezeichnen wir die Kantenlängen durch

$$\alpha_i = 2a_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

so hat im neuen Koordinatensystem die Schnittebene  $\sum$  den Achsenabschnitt

$$\tau = t + \sum_{\lambda=1}^n a_\lambda = t + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^n \alpha_\lambda$$

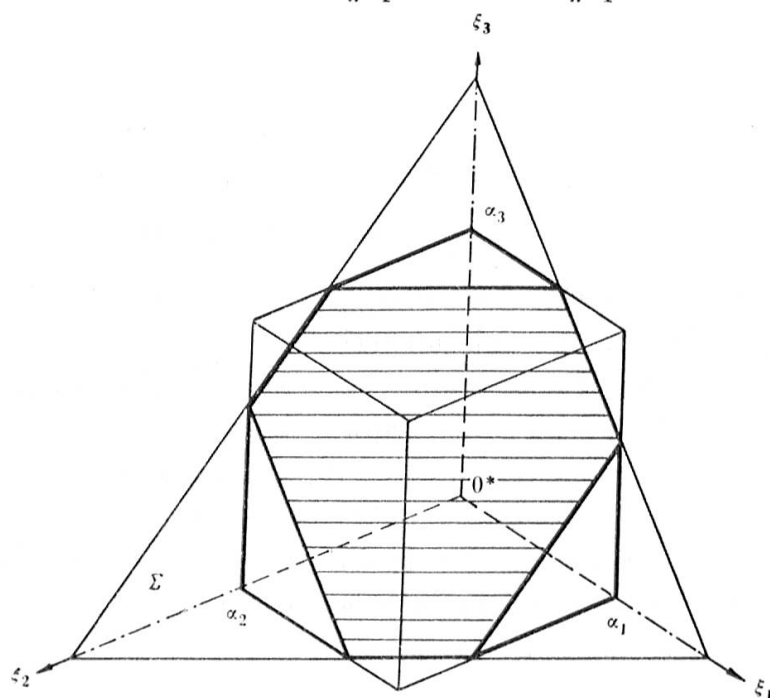


Fig. 7

und es wird

$$\begin{aligned} \Phi_n(t; a_i) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^n \frac{\sin a_\lambda x}{x} \cos tx \, dx \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^n \frac{\sin \alpha_\lambda x}{x} \cos \left( 2\tau - \sum_{\lambda=1}^n \alpha_\lambda \right) x \, dx \quad (21) \\ &= \frac{1}{2^n (n-1)!} \sum_{\theta_j} (-1)^\lambda [\theta_1 \alpha_1 + \theta_2 \alpha_2 + \dots + \theta_n \alpha_n + \tau]^{n-1} = \Phi^*(\tau; \alpha_i) \\ &\quad \left( \theta_j = \frac{\varepsilon_j - 1}{2} = \begin{cases} 0, & \lambda \text{ Anzahl der negativen } \theta_j \\ -1, & \end{cases} \right) \end{aligned}$$

oder

$$\Phi_n^*(\tau; \alpha_i) = \frac{1}{2^n(n-1)!} \cdot \left\{ [\tau]^{n-1} - \sum_i [\tau - \alpha_i]^{n-1} + \sum_{i_1, i_2} [\tau - \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2}]^{n-1} - \dots + (-1)^n [\tau - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_n]^{n-1} \right\} \quad (21')$$

$\Phi_n^*(\tau; \alpha_i)$  ist monoton in den  $\alpha_i$ , symmetrisch zu  $\frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^n \alpha_\lambda$  und verschwindet für  $\tau \leq 0$  und  $\tau \geq \sum_{\lambda=1}^n \alpha_\lambda$ .

Werden einzelne der  $\alpha_i$  unendlich gross, z. B.  $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n$ , so erhält man die entsprechende Funktion  $\Phi_n^*(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \infty, \infty, \dots, \infty)$  dadurch, dass in (21') die Klammerausdrücke, die eines der unendlich grossen  $\alpha_i$  enthalten, weggelassen werden. Wir betrachten zwei *Sonderfälle*:

a)  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \infty$  (in der Integralformel genügt es,  $\alpha_i = \tau$  zu setzen):

$$\Phi_n^*(\tau; \infty, \infty, \dots, \infty) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin \tau x}{x} \right)^n \cos(2-n) \tau x \, dx = \frac{\tau^{n-1}}{2^n(n-1)!}. \quad (22)$$

Die geometrische Interpretation dieser Formel ist offensichtlich. (22) enthält für feste  $\tau$  die Abschätzung

$$\Phi_n^*(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq \frac{\tau^{n-1}}{2^n(n-1)!} \quad (22')$$

(das Gleichheitszeichen gilt, falls  $\alpha_i \geq \tau$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ )), sowie eine Integraldarstellung der reziproken Fakultät

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n \cos(n-2) x \, dx = \frac{1}{(n-1)!}. \quad (23)$$

b)  $\alpha_n = \infty$  ( $a_n = \infty$ ).

Die Projektion der Schnittfigur in die Hyperebene  $\xi_n = 0$  ( $x_n = 0$ ) fällt für  $\tau \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}$  ( $t$  beliebig) ganz mit der in ihr liegenden «Grundfläche» des Quaders zusammen.

Es folgen die Relationen

$$\left. \begin{aligned} \Phi_n^*(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \infty) &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}{2^n}, \quad \tau \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}, \\ \Phi_n(t; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \infty) &= \Phi_n(0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \infty) \\ &= \Phi_n(0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) = \frac{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}{2} \end{aligned} \right\} (24)$$

und aus ihnen die Integrale

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^{n-1} \frac{\sin a_\lambda x}{x} \frac{\sin (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) x}{x} dx = a_1 a_2 \dots a_{n-1}, \quad (25)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n \frac{\sin nx}{x} dx = 1. \quad (25')$$

### 7. Beispiele <sup>1)</sup>

a)  $n = 2$

I.  $\alpha_1 < \alpha_2$  (Fig. 8)

$$4\Phi_2^*(\tau; \alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} \tau, & 0 \leq \tau \leq \alpha_1 \\ \alpha_1, & \alpha_1 \leq \tau \leq \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \tau, & \alpha_2 \leq \tau \leq \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0, & \alpha_1 + \alpha_2 \leq \tau \end{cases}$$

II.  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  (Fig. 9)

$$4\Phi_2^*(\tau; \alpha, \alpha) = \begin{cases} \tau, & 0 \leq \tau \leq \alpha \\ 2\alpha - \tau, & \alpha \leq \tau \leq 2\alpha \\ 0, & 2\alpha \leq \tau \end{cases}$$

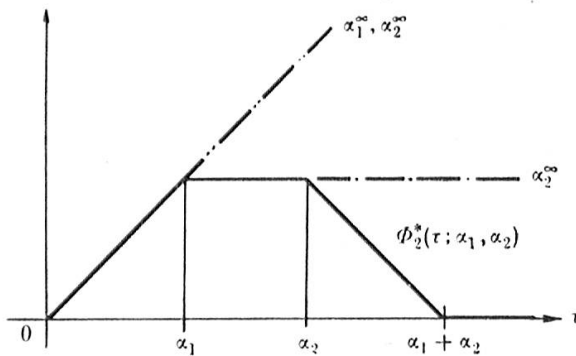


Fig. 8

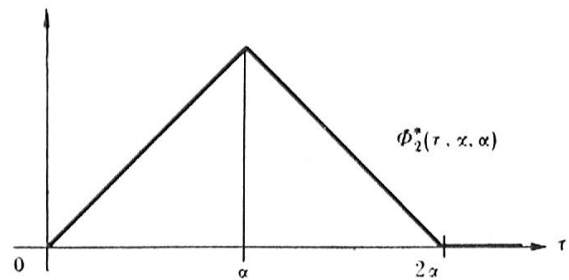


Fig. 9

<sup>1)</sup> Die Funktionskurven zu unendlich grossen Parametern  $\alpha_i$  sind entsprechend mit  $\alpha_i^\infty$  bezeichnet.

b)  $n = 3$

I.  $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ ;  $\alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_3$  (Fig. 10 und 11)

$$6\Phi_3^*(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{cases} \tau^2, & 0 \leq \tau \leq \alpha_1 \\ 2\alpha_1\tau - \alpha_1^2, & \alpha_1 \leq \tau \leq \alpha_2 \\ -\tau^2 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)\tau - \alpha_1^2 - \alpha_2^2, & \alpha_2 \leq \tau \leq \alpha_1 + \alpha_2 \\ 2\alpha_1\alpha_2, & \alpha_1 + \alpha_2 \leq \tau \leq \alpha_3 \\ -\tau^2 + 2\alpha_3\tau + 2\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2, & \alpha_3 \leq \tau \leq \alpha_1 + \alpha_3 \\ -2\alpha_1\tau + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_1^2, & \alpha_1 + \alpha_3 \leq \tau \leq \alpha_2 + \alpha_3 \\ (\tau - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)^2, & \alpha_2 + \alpha_3 \leq \tau \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0, & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq \tau \end{cases}$$

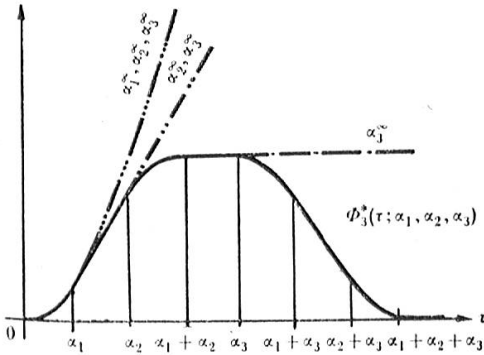


Fig. 10

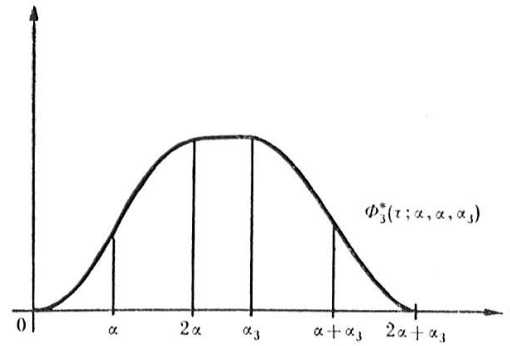


Fig. 11

II.  $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ ;  $\alpha_1 + \alpha_2 > \alpha_3$  (Fig. 12 und 13)

$$6\Phi_3^*(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{cases} \tau^2, & 0 \leq \tau \leq \alpha_1 \\ 2\alpha_1\tau - \alpha_1^2, & \alpha_1 \leq \tau \leq \alpha_2 \\ -\tau^2 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)\tau - \alpha_1^2 - \alpha_2^2, & \alpha_2 \leq \tau \leq \alpha_3 \\ -2\tau^2 + 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\tau - \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, & \alpha_3 \leq \tau \leq \alpha_1 + \alpha_2 \\ -\tau^2 + 2\alpha_3\tau + 2\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2, & \alpha_1 + \alpha_2 \leq \tau \leq \alpha_1 + \alpha_3 \\ -2\alpha_1\tau + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_1^2, & \alpha_1 + \alpha_3 \leq \tau \leq \alpha_2 + \alpha_3 \\ (\tau - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)^2, & \alpha_2 + \alpha_3 \leq \tau \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0, & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq \tau \end{cases}$$

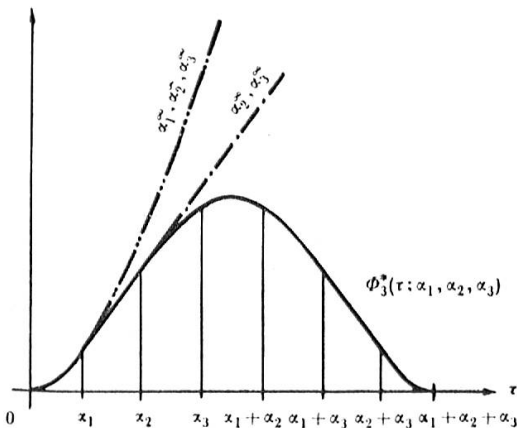


Fig. 12

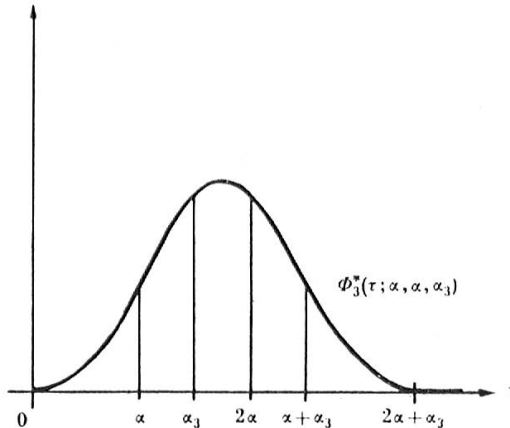


Fig. 13

III.  $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ ;  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$  (Fig. 14 und 15)

$$16\Phi_3^*(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{cases} \tau^2, & 0 \leq \tau \leq \alpha_1 \\ 2\alpha_1\tau - \alpha_1^2, & \alpha_1 \leq \tau \leq \alpha_2 \\ -\tau^2 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)\tau - \alpha_1^2 - \alpha_2^2, & \alpha_2 \leq \tau \leq \alpha_1 + \alpha_3 \\ -2\alpha_1\tau + 4\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_1^2, & \alpha_1 + \alpha_3 \leq \tau \leq \alpha_2 + \alpha_3 \\ (\tau - 2\alpha_1 - 2\alpha_2)^2 = (\tau - 2\alpha_3)^2, & \alpha_2 + \alpha_3 \leq \tau \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0, & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq \tau \end{cases}$$

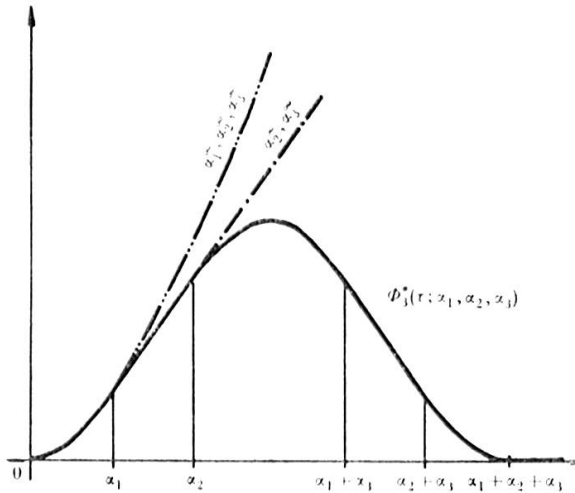


Fig. 14

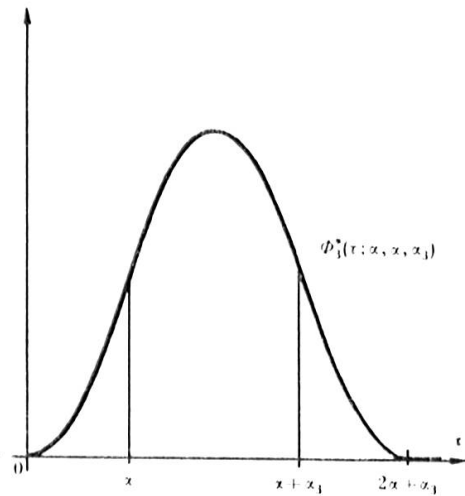


Fig. 15

$\Phi_3^*(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  setzt sich aus quadratischen Parabeln und Geradenstücken mit gemeinsamen Tangenten in den Nahtstellen zusammen. In den Fällen I und III ( $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ) folgen sich diese abwechselungsweise. Das horizontale Scheitelstück verschwindet, wenn  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$  ist (III); in II ist es ebenfalls durch einen parabolischen Bogen ersetzt. Die linearen Stücke im aufsteigenden und im absteigenden Ast arten für  $\alpha_1 = \alpha_2$  aus. Die Vertikale durch  $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)/2$  ist Symmetrieachse.

### 8. Der Grenzfall $n \rightarrow \infty$

Hornich hat gezeigt [6], dass die Integrale

$$\Omega_n(t; a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^n \frac{\sin a_\lambda x}{a_\lambda x} \cos tx dx$$

für  $n \rightarrow \infty$  stets gleichmäßig in  $t$  konvergieren und dass die Grenzfrequenzfunktion  $\Omega(t; a_1, a_2, \dots)$ , falls  $\sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda^2$  konvergiert, eine von Null

verschiedene analytische Funktion ist (divergiert  $\sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda}^2$ , so verschwindet  $\Omega(t; a_1, a_2, \dots)$  identisch). Die Funktionen  $\Omega(t; a_1, a_2, \dots)$  sind von unendlich vielen Parametern abhängig.

Der zentrale Grenzwertsatz (Central Limit Theorem) gibt uns die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine Gaußsche Konvergenz. Es sei

$$M_n = \sum_{\lambda=1}^n m_{\lambda} \text{ und } m_{\lambda} = \frac{a_{\lambda}^2}{3}$$

das zweite Moment der elementaren Verteilungen (1). Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{M_n} \Omega_n(\sqrt{M_n} t; a_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (26)$$

falls  $\frac{m_{\lambda}}{M_n} \rightarrow 0 (\lambda = 1, 2, \dots, n)$ , und  $\sqrt{M_n}$  nicht beschränkt ist. Für die in der Tabelle

	$a_{\lambda}$	$m_{\lambda}$	$M_n$
(I)	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{n}{3}$
(II)	$\sqrt{\lambda}$	$\frac{\lambda}{3}$	$\frac{(n+1)n}{6}$
(III)	$\lambda$	$\frac{\lambda^2}{3}$	$\frac{(2n+1)(n+1)n}{18}$

enthaltenen Beispiele ergeben sich daher die Grenzwertformeln:

$$(I) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \Phi_n(\sqrt{n} t) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{-\frac{3t^2}{2}}, \quad (27)$$

$$(II) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(n+1)n} \Omega_n(\sqrt{(n+1)n} t; 1, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n}) = \sqrt{\frac{3}{\pi}} e^{-3t^2},$$

$$(III) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(2n+1)(n+1)n} \Omega_n(\sqrt{(2n+1)(n+1)n} t; 1, 2, \dots, n) = \frac{3}{\sqrt{\pi}} e^{-9t^2},$$



und an der Stelle  $t = 0$ :

$$(I) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n dx = \sqrt{6\pi}, \quad (28)$$

$$(II) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(n+1)n} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^n \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda} x} dx = \sqrt{12\pi},$$

$$(III) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(2n+1)(n+1)n} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^n \frac{\sin \lambda x}{\lambda x} dx = 6\sqrt{\pi}.$$

### 9. Der Sommerfeldsche Fall: $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$

$$\Phi_n(t; 1, 1, \dots, 1) = \Phi_n(t), \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (29)$$

sind symmetrische Frequenzfunktionen. Sommerfeld hat ihr Grenzverhalten benutzt zu seiner anschaulichen Herleitung des Gaußschen Fehlergesetzes [1]. Die nachfolgend erwähnten Formeln sind Sonderfälle der für die  $\Phi_n(t; a_i)$  hergeleiteten Relationen:

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n \cos tx dx \quad (30)$$

ist Lösung der Faltungsfunktionalgleichung

$$\Phi_{n+m}(t) = \Phi_n(t) * \Phi_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(t-\tau) \Phi_m(\tau) d\tau \quad (31)$$

und erfüllt die Integralrekursionen

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2} \int_{t-1}^{t+1} \Phi_{n-1}(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Phi_{n-1}(t-\xi) d\xi = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Phi_{n-1}(t+\xi) d\xi. \quad (32)$$

(11) geht wegen  $a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \dots + a_n \varepsilon_n \pm t = n - 2\lambda \pm t$  nach Zusammenfassen der  $\binom{n}{\lambda}$  gleichen Summanden über in die erstmals von Laplace [7] angegebene Formel

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n \cos tx dx = \frac{1}{2^n(n-1)!} \sum_{\lambda=0}^{\left[ \frac{n+t}{2} \right]^*} (-1)^\lambda \binom{n}{\lambda} (n-2\lambda \pm t)^{n-1} \quad (33)$$

\*)  $\left[ \frac{n \pm t}{2} \right]$  ist die Gaußsche Klammer und bedeutet die grösste ganze Zahl  $\leq \frac{n \pm t}{2}$ .

(17) gibt 
$$\frac{d^r \Phi_n(t)}{dt^r} = \frac{1}{2^r} \sum_{\lambda=0}^r (-1)^\lambda \binom{r}{\lambda} \Phi_{n-r}(t+r-2\lambda), \quad (34)$$

woraus

$$|\Phi^{(r)}(t)| \leq \Phi_{n-r}(0) \quad (34')$$

folgt.

$\Phi_n(t)$  wird stückweise durch Polynome  $(n-1)$ -ten Grades, die sich mit wachsendem  $n$  an den Nahtstellen inniger zusammenschliessen, dargestellt.  $\Phi_1(t)$  ist unstetig,  $\Phi_2(t)$  stetig,  $\Phi_3(t)$  stetig differenzierbar; allgemein hat  $\Phi_n(t)$   $(n-1)$  Ableitungen, wovon die  $(n-2)$  ersten stetig sind. Das Verhalten der  $\Phi_n(t)$  nähert sich mit wachsendem  $n$  dem Verhalten einer analytischen Funktion. Bei geeigneter Normierung gilt die Grenzwertformel [5]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \Phi_n(\sqrt{n} t) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{-\frac{3t^2}{2}} \quad (1)^2), \quad (27)$$

die L. Maurer zum Beweis seines Grenzwertsatzes für iterierte Mittelwerte herangezogen hat [8].

1) Ohne strengen Grenzübergang kann (27) aus der von Laplace [7] angegebenen Beziehung

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \cos r \sqrt{n} x dx = \sqrt{\frac{3}{2n\pi}} e^{-\frac{3r^2}{2}} \left\{ 1 - \frac{3}{20n} (1-6r^2+3r^4) + \dots \right\} = \Phi_n(\sqrt{n} r)$$

abgelesen werden.

Im Lichte des zentralen Grenzwertsatzes ist Formel (27) trivial. Ohne diesen Satz vorauszusetzen, zeigt man z. B. mittels des Ergänzungssatzes der Gammafunktion,

$$\Gamma(1-t) \Gamma(1+t) = \frac{\pi t}{\sin \pi t}, \quad \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = \psi(t),$$

dass für die charakteristische Funktion

$$\mathfrak{F} \{ \sqrt{n} \Phi_n(\sqrt{n} t); y \} = \varphi_n(y) = \left( \frac{\sin \frac{y}{\sqrt{n}}}{\frac{y}{\sqrt{n}}} \right)^n$$

gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(y) = -\frac{y^2}{\pi^2} \psi'(1) = -\frac{y^2}{6},$$

woraus (27) folgt.

2) Die zur Richtung  $(1, 1, \dots, 1)$  normale Hyperebene im Abstand  $d$  vom Würfelmittelpunkt schneidet aus dem  $n$ -dimensionalen Einheitswürfel die Fläche  $2\sqrt{n} \Phi_n(2\sqrt{n} d)$ . Nach (27) beträgt die entsprechende Schnittfläche am unendlichvieldimensionalen Einheitswürfel  $\sqrt{\frac{6}{\pi}} e^{-6d^2}$ .

Wir benutzen (33), um die Funktionen  $\Phi_1(t)$  bis  $\Phi_{10}(t)$  explizite anzuschreiben:

$$\Phi_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (0 \leq t < 1) \\ \frac{1}{4}, & (1 = t) \\ 0, & (1 < t) \end{cases}$$

$$\Phi_2(t) = \begin{cases} \frac{2-t}{4}, & (0 \leq t \leq 2) \\ 0, & (2 \leq t) \end{cases}$$

$$\Phi_3(t) = \begin{cases} \frac{3-t^2}{8}, & (0 \leq t \leq 1) \\ \frac{9-6t+t^2}{16}, & (1 \leq t \leq 3) \\ 0, & (3 \leq t) \end{cases}$$

$$\Phi_4(t) = \begin{cases} \frac{32-12t^2+3t^3}{96}, & (0 \leq t \leq 2) \\ \frac{64-48t+12t^2-t^3}{96}, & (2 \leq t \leq 4) \\ 0, & (4 \leq t) \end{cases}$$

$$\Phi_5(t) = \begin{cases} \frac{115-30t^2+3t^4}{384}, & (0 \leq t \leq 1) \\ \frac{55+10t-30t^2+10t^3-t^4}{192}, & (1 \leq t \leq 3) \\ \frac{625-500t+150t^2-20t^3+t^4}{768}, & (3 \leq t \leq 5) \\ 0, & (5 \leq t) \end{cases}$$

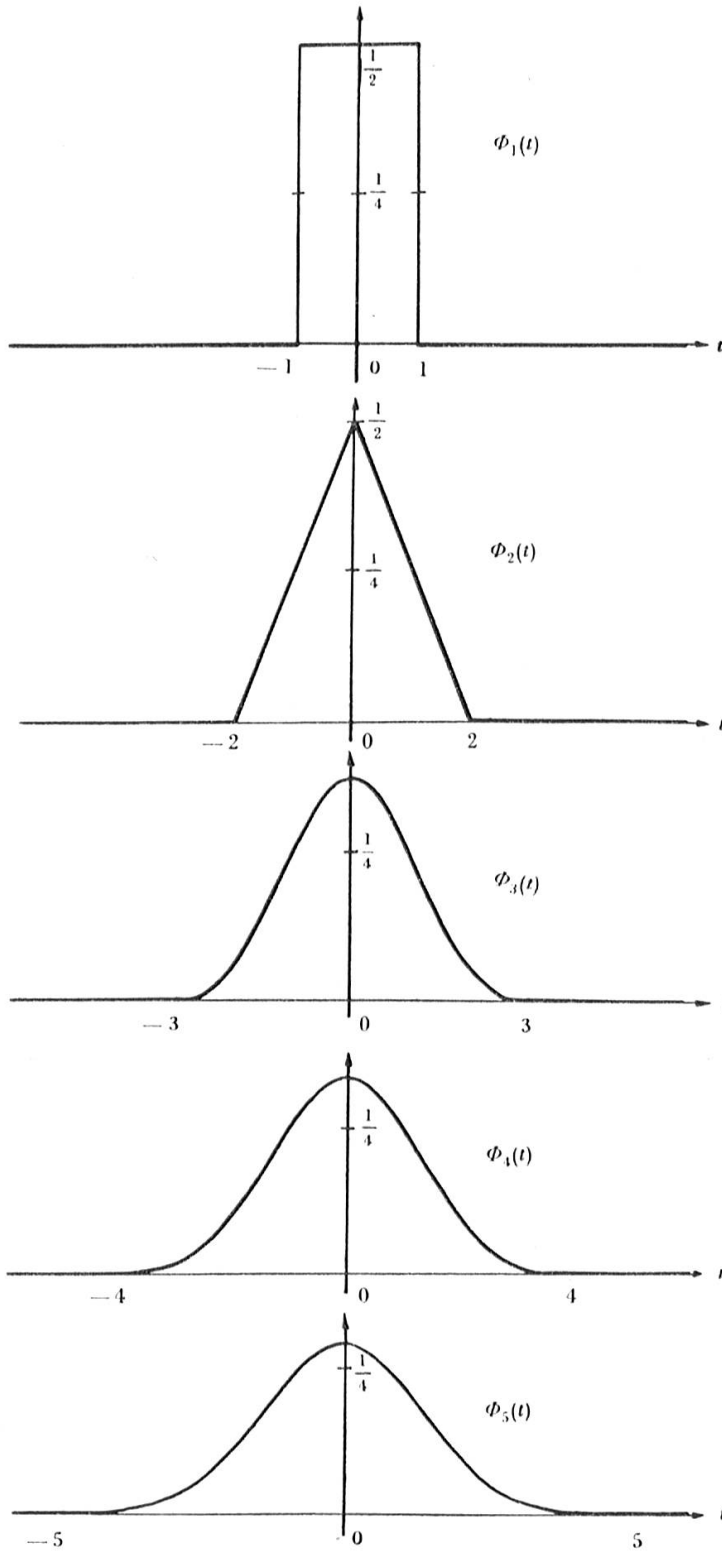


Fig. 16

$$\Phi_6(t) = \begin{cases} \frac{1056 - 240t^2 + 30t^4 - 5t^5}{3840}, & (0 \leq t \leq 2) \\ \frac{1632 + 1200t - 1680t^2 + 600t^3 - 90t^4 + 5t^5}{7680}, & (2 \leq t \leq 4) \\ \frac{7776 - 6480t + 2160t^2 - 360t^3 + 30t^4 - t^5}{7680} = \frac{(6-t)^5}{7680}, & (4 \leq t \leq 6) \\ 0, & (6 \leq t) \end{cases}$$

$$\Phi_7(t) = \begin{cases} \frac{5587 - 1155t^2 + 105t^4 - 5t^6}{23\cdot040}, & (0 \leq t \leq 1) \\ \frac{23\cdot583 - 210t - 4095t^2 - 700t^3 + 945t^4 - 210t^5 + 15t^6}{92\cdot160}, & (1 \leq t \leq 3) \\ \frac{4137 + 15\cdot204t - 14\cdot805t^2 + 5320t^3 - 945t^4 + 84t^5 - 3t^6}{46\cdot080}, & (3 \leq t \leq 5) \\ \frac{117\cdot649 - 100\cdot842t + 36\cdot015t^2 - 6860t^3 + 735t^4 - 42t^5 + t^6}{92\cdot160} = \frac{(7-t)^6}{92\cdot160}, & (5 \leq t \leq 7) \\ 0, & (7 \leq t) \end{cases}$$

Tafel der Funktionen  $A_n \Phi_n(t) = \sum_{\lambda=0}^{n-1} C_{\lambda}^{(n)} t^{\lambda}$  für  $n = 8, 9$  und  $10$

$t$	$C_0^{(n)}$	$C_1^{(n)}$	$C_2^{(n)}$	$C_3^{(n)}$	$C_4^{(n)}$	$C_5^{(n)}$	$C_6^{(n)}$	$C_7^{(n)}$	$C_8^{(n)}$	$C_9^{(n)}$
$n = 8, A_8 = 1 \cdot 290 \cdot 240$										
[0,2]	309 248	0	-53 760	0	4 480	0	-280	35		
[2,4]	316 416	-25 088	-16 128	-31 360	20 160	-4 704	504	-21		
[4,6]	-142 336	777 728	-61 824	219 520	-42 560	4 704	-280	7		
[6,8]	2 097 152	-1 835 008	688 128	-143 360	17 920	-1 344	56	-1		
$n = 9, A_9 = 20 \cdot 643 \cdot 840$										
[0,1]	2 337 507	0	-364 140	0	27 090	0	-1 260	0	35	
[1,3]	1 168 722	252	-182 152	1 764	11 340	1 764	-1 512	252	-14	
[3,5]	1 306 503	-367 164	245 700	-284 004	130 410	-29 988	3 780	-252	7	
[5,7]	-2 209 122	5 257 836	-3 691 800	1 290 996	-263 340	33 012	-2 520	108	-2	
[7,9]	43 046 721	-38 263 752	14 880 348	-3 306 744	459 270	-40 824	2 268	-72	1	
$n = 10, A_{10} = 185 \cdot 794 \cdot 560$										
[0,2]	39 984 640	0	-5 644 800	0	383 040	0	-16 800	0	630	-63
[2,4]	19 965 440	120 960	-3 064 320	282 240	-20 160	105 840	-43 680	7 560	-630	21
[4,6]	27 829 760	-17 573 760	14 630 400	-10 039 680	3 850 560	-861 840	117 600	-9 720	450	-9
[6,8]	-342 177 280	609 949 440	-394 974 720	136 200 960	-28 687 680	3 900 960	-346 080	19 440	-630	9
[8,10]	1 000 000 000	-900 000 000	360 000 000	-84 000 000	12 600 000	-1 260 000	84 000	-3 600	90	-1

Die Maximalwerte der Funktionen  $\Phi_n(t)$  sind bestimmt durch

$$\Phi_n(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx = \frac{1}{2^n(n-1)!} \sum_{\lambda=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^\lambda \binom{n}{\lambda} (n-2\lambda)^{n-1}$$

und in einer Tabelle zusammengestellt:

$n$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx$	
1	$\frac{1}{2}$	$= 0.5$
2	$\frac{1}{2}$	$= 0.5$
3	$\frac{3}{8}$	$= 0.375$
4	$\frac{1}{3}$	$= 0.333 \dots$
5	$\frac{115}{384}$	$= 0.299\ 479\ 17$
6	$\frac{11}{40}$	$= 0.275$
7	$\frac{5887}{23\cdot040}$	$= 0.255\ 512\ 152$
8	$\frac{151}{630}$	$= 0.239\ 682\ 539$
9	$\frac{259\cdot723}{1\cdot146\cdot880}$	$= 0.226\ 460\ 484$
10	$\frac{15\cdot619}{72\cdot576}$	$= 0.215\ 208\ 884$

Grenzwertformel (27) gibt für  $t = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n dx = \sqrt{6\pi}. \quad (28)$$

Das Potenzmoment  $k$ -ter Ordnung von  $\Phi_n(t)$ ,  $M_n^k$ , ist nach dem Momentensatz gegeben durch

$$M_n^k = i^{-k} \varphi_n^{(k)}(0).$$

Für die  $k$ -te Ableitung der charakteristischen Funktion  $\varphi_n(y) = \left( \frac{\sin y}{y} \right)^n$

erhalten wir mittels der Integralformel von Cauchy in  $y = 0$  die Beziehung

$$\varphi_n^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint \left( \frac{\sin \zeta}{\zeta} \right)^n \frac{d\zeta}{\zeta^{k+1}} = \frac{i^k k!}{2^n (n+k)!} \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda \binom{n}{\lambda} (n-2\lambda)^{n+k},$$

woraus

$$M_n^k = \begin{cases} \frac{k!}{2^{n-1} (n-1)!} \sum_{\lambda=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^\lambda \binom{n}{\lambda} (n-2\lambda)^{n+k}, & k = 2\kappa \\ 0, & k = 2\kappa + 1 \end{cases} \quad (36) \quad (\kappa = 0, 1, 2, \dots)$$

folgt.

Sonderfälle ( $k = 2\kappa$ ):

$n$	1	2	3	4
$M_n^k$	$\frac{1}{k+1}$	$\frac{2^{k+1}}{(k+1)(k+2)}$	$\frac{3}{4} \frac{3^{k+2} - 1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$\frac{2^{k+3} (2^{k+2} - 1)}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$

$M_n^0$  ist Fläche zwischen Abszissenachse und Funktionskurve; mit-  
hin wird

$$\frac{1}{2^n n!} \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda \binom{n}{\lambda} (n-2\lambda)^n = 1$$

oder

$$\sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda \binom{n}{\lambda} \left( \frac{n}{2} - \lambda \right)^n = n! \quad (37)$$

$$W(\pm t) = \int_{-\infty}^{\pm t} \Phi_n(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \pm \int_0^t \Phi_n(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \pm G_n(t), \quad (t > 0)$$



ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zufallsartige Variable  $\xi$  mit der Frequenzfunktion  $\Phi_n(\xi)$  kleiner als  $\pm t$  ausfalle;

$$G_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n \frac{\sin tx}{x} dx$$

ist Wahrscheinlichkeit einer Abweichung zwischen 0 und  $t$ . Insbesondere ist  $G_n(1) = \Phi_{n+1}(0)$ , d. h. der Maximalwert der Funktion  $\Phi_{n+1}(t)$  ist gleichzeitig Wahrscheinlichkeit, dass die nach  $\Phi_n(\xi)$  verteilte zufallsartige Variable  $\xi$  ins Intervall  $[0, 1]$  falle. Bekannte Methoden (vgl. 3) ergeben für  $G_n(t)$  die Polynomdarstellung

$$G_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n \frac{\sin tx}{x} dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n n!} \sum_{\lambda=0}^{\lfloor \frac{n+t}{2} \rfloor} (-1)^\lambda \binom{n}{\lambda} (n+t-2\lambda)^n, \quad (38)$$

von der wir noch die beiden Sonderfälle  $t = 1$  und  $t = n$  festhalten:

$$G_{n-1}(1) = \Phi_n(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n-1} (n-1)!} \sum_{\lambda=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^\lambda \binom{n-1}{\lambda} (n-2\lambda)^{n-1}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (39)$$

$$G_n(n) = \frac{1}{2}, \quad \text{also} \quad \sum_{\lambda=0}^n \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \frac{(n-\lambda)^n}{(n-\lambda)!} = 1. \quad (40)$$

### Literaturverzeichnis

- [1] *A. Sommerfeld*: «Eine besondere anschauliche Ableitung des Gaussischen Fehlergesetzes», Festschrift Ludwig Boltzmann (Leipzig 1904), S. 848–859.
- [2] *H. Hadwiger*: «Über gleichwahrscheinliche Aufteilungen», Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 22, Heft 4 (1942), S. 226–232.
- [3] *H. Hadwiger*: «Über die mittlere Breite zufallsartig gestalteter Polygone», Commentarii Mathematici Helvetici, Vol. 11 (1938/39), S. 321–329.
- [4] *H. Burkhardt*: «Trigonometrische Reihen und Integrale», Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band II, 1. Teil, 2. Hälfte, S. 1320–1324 (Diskontinuitätsfaktoren).
- [5] *G. Pólya*: «Berechnung eines bestimmten Integrals», Math. Annalen 74 (1913), S. 204–212.
- [6] *H. Hornich*: «Über gewisse trigonometrische Integrale I und II», Math. Zeitschrift 48 (1942/43) und 49 (1943/44), S. 787–790 und S. 374–379.
- [7] *P. S. de Laplace*: Oeuvres, Tome Septième, «Théorie Analytique des Probabilités» (Paris 1847), S. 186 und 187.
- [8] *L. Maurer*: «Über die Mittelwerthe der Functionen einer reellen Variablen», Math. Annalen 47 (1896), S. 263–280, bes. S. 267–270.