**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 61 (1961)

**Artikel:** La méthode de Lidstone et son degré d'approximation

**Autor:** Capt, E.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-966731

# La méthode de Lidstone et son degré d'approximation

*Par E. Capt, Zurich*

## Résumé

S'appuyant sur un travail de M. Podtiaguine, de Prague, l'auteur s'est attaché à démontrer que la méthode de groupement de Lidstone, bien que communément considérée comme très satisfaisante, pouvait dans certains cas conduire à des résultats assez différents de ceux de la méthode exacte. Il procède à cet effet à une analyse de la méthode de Lidstone et utilise différentes expressions analytiques de la rente $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, afin de mieux juger du degré d'approximation du développement lidstonien. Puis l'auteur présente une nouvelle expression de cette rente et une nouvelle méthode de calcul de l'âge moyen, élaborées par M. Podtiaguine, qui permettent un calcul des réserves mathématiques de groupes d'une approximation bien meilleure que celle de la méthode de Lidstone.

Il est communément admis que la méthode de groupement de Lidstone pour le calcul des réserves mathématiques dans l'assurance sur la vie conduit à des résultats dont l'approximation peut être considérée comme extrêmement satisfaisante. Lidstone avait en effet vérifié sur divers portefeuilles la validité de sa méthode qui fut dès lors très souvent appliquée.

M. Podtiaguine, de Prague, s'est attaché à démontrer que la méthode de Lidstone pouvait cependant conduire, dans certains cas, à des réserves mathématiques assez différentes de celles qui sont calculées d'après la formule exacte. C'est son travail, publié dans les *Aktuarské Vědy* (vol. VII, 1937/38), que nous avons étudié et que nous analyserons maintenant.

Reprenons tout d'abord la méthode de Lidstone. Elle groupe les polices de même année d'échéance, dont la durée $n'$ restant à courir est donc la même pour toutes. Considérons alors les polices suivantes:

| N° | Age d'entrée | Durée | Durée écoulée | Age à l'inventaire | Durée restant à courir | Age-terme | Capital assuré | Prime annuelle |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_1$ | $n_1$ | $t_1$ | $x_1+t_1=x_1'$ | $n_1-t_1=n'$ | $x_1+n_1=x_1'+n'=s_1$ | $C_1$ | $\Pi_1$ |
| 2 | $x_2$ | $n_2$ | $t_2$ | $x_2+t_2=x_2'$ | $n_2-t_2=n'$ | $x_2+n_2=x_2'+n'=s_2$ | $C_2$ | $\Pi_2$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $v$ | $x_v$ | $n_v$ | $t_v$ | $x_v+t_v=x_v'$ | $n_v-t_v=n'$ | $x_v+n_v=x_v'+n'=s_v$ | $C_v$ | $\Pi_v$ |

Les réserves seront respectivement:

$$C_1\, {}_{t_1}V_{x_1:\overline{n_1}|} = C_1 - d\,C_1\, \ddot{a}_{x_1':\overline{n'}|} - \Pi_1\, \ddot{a}_{x_1':\overline{n'}|}$$
$$C_2\, {}_{t_2}V_{x_2:\overline{n_2}|} = C_2 - d\,C_2\, \ddot{a}_{x_2':\overline{n'}|} - \Pi_2\, \ddot{a}_{x_2':\overline{n'}|}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_v\, {}_{t_v}V_{x_v:\overline{n_v}|} = C_v - d\,C_v\, \ddot{a}_{x_v':\overline{n'}|} - \Pi_v\, \ddot{a}_{x_v':\overline{n'}|}.$$

Les rentes $\ddot{a}_{x_i':\overline{n'}|}$ n'ont pas toutes la même valeur, mais diffèrent assez peu, car pour une durée $n'$ constante elles varient faiblement en fonction de $x'$. Lidstone s'est proposé de trouver un âge moyen $\xi'$ tel que la rente $\ddot{a}_{\xi':\overline{n'}|}$ constitue une moyenne des rentes $\ddot{a}_{x_i':\overline{n'}|}$.

La réserve mathématique du groupe de polices s'écrira donc:

$$\underline{\sum_{i=1}^{v} C_i\, {}_{t_i}V_{x_i:\overline{n_i}|} = \sum_{i=1}^{v} C_i - \ddot{a}_{\xi':\overline{n'}|}\, d \sum_{i=1}^{v} C_i - \ddot{a}_{\xi':\overline{n'}|} \sum_{i=1}^{v} \Pi_i}\,, \qquad (1)$$

et l'âge $\xi'$ devra satisfaire aux deux relations:

$$\text{(a)} \qquad \underline{\ddot{a}_{\xi':\overline{n'}|} \sum_{i=1}^{v} C_i = \sum_{i=1}^{v} C_i\, \ddot{a}_{x_i':\overline{n'}|}}\,,$$

$$\text{(b)} \qquad \underline{\ddot{a}_{\xi':\overline{n'}|} \sum_{i=1}^{v} \Pi_i = \sum_{i=1}^{v} \Pi_i\, \ddot{a}_{x_i':\overline{n'}|}}\,.$$

Lidstone a admis alors que la table de mortalité utilisée est ajustée d'après Makeham, c'est-à-dire selon la loi suivante:

$$l_x = k\, s^x g^{c^x}.$$

Nous aurons ainsi, pour la rente $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, l'expression:

$$\underline{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \, {}_tp_x} \tag{2}$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t s^t g^{c^x(c^t-1)}$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} (vs)^t e^{c^x(c^t-1)\operatorname{Log} g}.$$

En développant en série $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \ldots$, nous obtenons:

$$(vs)^t e^{c^x(c^t-1)\operatorname{Log} g} = (vs)^t \left[1 + c^x(c^t-1)\operatorname{Log} g + \frac{1}{2!} c^{2x}(c^t-1)^2 \operatorname{Log}^2 g + \ldots\right],$$

et finalement:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} (vs)^t + c^x \operatorname{Log} g \sum_{t=0}^{n-1} (vs)^t (c^t-1) + \frac{1}{2!} c^{2x} \operatorname{Log}^2 g \sum_{t=0}^{n-1} (vs)^t (c^t-1)^2 + \ldots.$$

Posons alors:

$$A_0(n) = \sum_{t=0}^{n-1} (vs)^t$$

$$A_1(n) = \operatorname{Log} g \sum_{t=0}^{n-1} (vs)^t (c^t - 1)$$

$$A_2(n) = \frac{1}{2!} \operatorname{Log}^2 g \sum_{t=0}^{n-1} (vs)^t (c^t - 1)^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_j(n) = \frac{1}{j!} \operatorname{Log}^j g \sum_{t=0}^{n-1} (vs)^t (c^t - 1)^j.$$

Ainsi Lidstone développe la rente $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ en une série convergente de la forme:

$$\underline{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_0(n) + A_1(n)\, c^x + A_2(n)\, c^{2x} + \ldots + A_j(n)\, c^{jx} + \ldots}, \tag{3}$$

dont il ne retient que les deux premiers termes, estimant la convergence de cette série telle qu'on ne commet pas d'erreur sensible en négligeant les autres termes. Nous appellerons développement lidstonien (selon M. E. Dasen) l'expression:

$$\underline{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_0(n) + A_1(n)\, c^x.} \tag{4}$$

De plus Lidstone obtient, pour déterminer l'âge moyen $\xi'$ du groupe considéré, la formule suivante:

$$c^{\xi'+n'-55} = \frac{\sum_{i=1}^{v} C_i \, c^{s\,i-55}}{\sum_{i=1}^{v} C_i} . \tag{5}$$

On admet en pratique que le $\xi'$, déterminé ci-dessus en partant de la relation (a), satisfait aussi de façon suffisamment précise la relation (b).

Dans son travail, M. Podtiaguine reprend la rente $\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ et en donne différentes expressions analytiques qui permettent de mieux juger du degré d'approximation du développement lidstonien. Il arrive également à un procédé nouveau pour la détermination de l'âge moyen d'un groupe de polices.

Gardant l'hypothèse que la table de mortalité est ajustée selon la loi de Makeham et partant de l'expression (2):

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \, {}_tp_x ,$$

il écrit cette rente, après diverses transformations, sous la forme suivante:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = e^{\lambda} \left[ a_0(n) - \lambda a_1(n) + \frac{\lambda^2}{2!} a_2(n) - \frac{\lambda^3}{3!} a_3(n) + \ldots \right] , \tag{6}$$

où $\lambda = \lambda(x) = -c^x \operatorname{Log} g$ et $a_j = a_j(n) = \sum_{t=0}^{n-1} c^{(j-k)t} = \dfrac{c^{(j-k)t} - 1}{c^{j-k} - 1}$

avec $k = \dfrac{\alpha + \delta}{\operatorname{Log} c}$, $\quad \alpha = -\operatorname{Log} s$, $\quad \delta = -\operatorname{Log} v$.

La série entre crochets est absolument convergente pour toutes les valeurs de $x$ et de $n$. En effet, le rapport $\dfrac{a_{j+1}(n)}{a_j(n)}$ tend vers une limite déterminée $c^{n-1}$ lorsque $j$ tend vers l'infini et, dans la série en question, le rapport en valeur absolue du terme de rang $(j+1)$ au terme de rang $j$ tend vers zéro lorsque $j$ tend vers l'infini. De son côté, $e^{\lambda}$ peut être développé en une série qui est aussi absolument convergente.

En remplaçant, dans la formule (6), $e^{\lambda}$ par son développement taylorien, nous obtenons une nouvelle expression de $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = a_0(n) - \lambda\left[a_1(n) - a_0(n)\right] + \frac{\lambda^2}{2!}\left[a_2(n) - 2a_1(n) + a_0(n)\right] -$$
$$- \frac{\lambda^3}{3!}\left[a_3(n) - 3a_2(n) + 3a_1(n) - a_0(n)\right] + \dots,$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = a_0(n) - \lambda\,\Delta a_0(n) + \frac{\lambda^2}{2!}\Delta^2 a_0(n) - \frac{\lambda^3}{3!}\Delta^3 a_0(n) + \dots \tag{7}$$

La formule (7), en tant que produit de deux séries absolument convergentes, est elle aussi absolument convergente (selon le théorème de Cauchy); et comme $\lambda = -c^x \operatorname{Log} g$, nous constatons que la rente $\ddot{a}_{x:\overline{n}}$ a effectivement été développée en une série convergente de la forme (3).

Il n'en résulte cependant pas que la convergence soit très rapide. En effet, il ressort de la définition même de la fonction $\lambda = \lambda(x)$ que $\lambda(x)$ sera supérieur à l'unité pour tout $x$ vérifiant la relation:

$$x > \frac{-\operatorname{Log}(-\operatorname{Log} g)}{\operatorname{Log} c},$$

c'est-à-dire, pour la table *MM*, pour tout $x$ supérieur à 72,4 ans. Les valeurs de $\lambda(x)$ sont ainsi sensiblement supérieures à l'unité pour les âges élevés (80, 90, 100 ans). Quant aux fonctions $a_j(n)$, de par leur définition, elles croissent constamment lorsque $j$ ou $n$ ou les deux ensemble augmentent, et prennent des valeurs considérables pour les grandes valeurs de ces deux variables. Il en résulte que les coefficients de la formule (7) peuvent aussi être assez grands, spécialement lorsque $j$ est supérieur ou égal à 2 et $n$ supérieur ou égal à 40.

Pour le confirmer, M. Podtiaguine a largement recouru au calcul numérique. A cet effet, il a choisi comme bases techniques la table *MM* $3\frac{1}{2}\%$ établie en 1931 par le Bureau fédéral des assurances pour l'assurance de groupes. C'est à l'aide de ces bases que sont déterminées toutes les valeurs numériques figurant dans cet exposé.

Il ressort de ce qui précède que la série (7) ne converge rapidement que pour des âges $x$ pas trop élevés et des durées $n$ pas trop longues.

Dans les autres cas, la convergence est beaucoup plus lente. En calculant la rente $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ exprimée par son développement lidstonien (4), c'est-à-dire:

$$\underline{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = a_0(n) - \lambda(x)\,\Delta a_0(n)\,,} \tag{8}$$

et en la comparant aux valeurs de la table MM, on constate que les résultats obtenus à l'aide de la formule (8) sont satisfaisants jusqu'à l'âge-terme $s = x + n$ de 70 ans, cela pour autant que l'on considère comme admissible une erreur relative de 3%. Mais au-delà de cette valeur de l'âge-terme, l'erreur devient toujours plus importante et la formule (8) n'est plus guère applicable. En revanche, en prenant les cinq premiers termes de la série (7), M. Podtiaguine obtient jusqu'à $s = 70$ les valeurs exactes de la rente $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$; pour $s = 80$ l'erreur relative reste encore constamment inférieure à 0,35%.

En conclusion, nous pouvons affirmer que, lorsque l'âge-terme $s$ dépasse 70 ans, le développement lidstonien (8) ne suffit plus à déterminer avec une précision suffisante la valeur de la rente $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, les termes abandonnés de la série (7) n'étant pas du tout négligeables.

Constatant cette insuffisance de la méthode de groupement de Lidstone, M. Podtiaguine s'est alors demandé s'il serait possible de lui en substituer une autre donnant une meilleure approximation. Reprenant la formule (7) de la rente $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, il lui a appliqué la transformation de Lindelöf afin de rendre la convergence de cette série plus rapide. Il s'agit d'un changement de variable où l'on pose:

$$z = z(x,n) = \frac{\lambda(x)}{m(n) + \lambda(x)}$$

ou

$$\lambda(x) = (z + z^2 + z^3 + \ldots)\, m(n)\,,$$

$m(n)$ étant une fonction de la durée $n$ que nous définirons ultérieurement. La formule (7) devient alors:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = a_0 - zm\,\Delta a_0 + \frac{z^2}{2!}\, m(m\,\Delta^2 a_0 - 2\,\Delta a_0) - \frac{z^3}{3!}\, m(m^2\,\Delta^3 a_0 - 6m\,\Delta^2 a_0 + 6\,\Delta a_0)$$
$$+ \frac{z^4}{4!}\, m(m^3\,\Delta^4 a_0 - 12m^2\,\Delta^3 a_0 + 36m\,\Delta^2 a_0 - 24\,\Delta a_0) - \ldots .$$

Nous définirons maintenant $m(n)$ de telle manière que le troisième terme de cette série soit nul.

Nous obtiendrons donc pour $m(n)$:

$$m = m(n) = \frac{2\Delta a_0(n)}{\Delta^2 a_0(n)}, \tag{9}$$

et la série ci-dessus deviendra:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = a_0(n) - z b_1(n) - \frac{z^3}{3!} b_3(n) + \frac{z^4}{4!} b_4(n) - \dots \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } b_1(n) &= m \Delta a_0 \\ b_3(n) &= m(m^2 \Delta^3 a_0 - 6 \Delta a_0) \\ b_4(n) &= m(m^3 \Delta^4 a_0 - 12 m^2 \Delta^3 a_0 + 48 \Delta a_0) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Les coefficients $b_j(n)$ ainsi définis ont des valeurs beaucoup plus petites que les coefficients $\Delta^j a_0(n)$ de la série (7) et, à l'exception de $b_1(n)$, ils n'excèdent jamais 3 en valeur absolue. La fonction $z$ étant toujours inférieure à l'unité, de par sa définition même $(m(n) > 0)$, il est évident que la série (10) convergera très rapidement. Nous pouvons alors ne conserver que les deux premiers termes de cette série et obtiendrons la formule approchée suivante:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = a_0(n) - m(n) \Delta a_0(n) \frac{\lambda(x)}{m(n) + \lambda(x)}. \tag{11}$$

Cette formule approchée donne d'excellents résultats et pour tous les âges-terme inférieurs ou égaux à 80 ans l'erreur relative reste inférieure à 0,6 % (bases techniques MM $3\frac{1}{2}$ %). De plus, si l'on prend les quatre premiers termes de la formule (10), on obtient jusqu'à $s = x + n = 70$ ans les valeurs exactes de la rente $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$. Pour $s = 80$, l'erreur relative reste d'ailleurs inférieure à 0,02 %; les valeurs obtenues sont donc là aussi d'une précision très satisfaisante.

En résumé, la transformation opérée ci-dessus conduit à une nouvelle expression de la rente $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, qui donne des résultats nettement meilleurs que ceux obtenus avec les formules (7) et (8), spécialement si l'on compare les résultats des formules approchées (8) et (11). Grâce à cette transformation en effet, la nouvelle série (10), exprimant la rente $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, converge beaucoup plus rapidement que la série (7).

Il est dès lors normal de se demander si l'on peut, à partir de cette nouvelle formule approchée (11), calculer la réserve mathématique d'un groupe de polices en se fondant sur un âge moyen valable pour ce groupe et facile à calculer.

Nous pouvons tout d'abord écrire la formule (11) sous la forme:

$$\underline{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = a_0(n) - m(n)\, \Delta a_0(n) \frac{\lambda(x+n)}{m(n)\, c^n + \lambda(x+n)}}, \tag{12}$$

car $\lambda(x)\, c^n = \lambda(x+n)$. Or le produit $m(n)\, c^n$ change peu avec $n$, sauf pour les petites valeurs de $n$; mais dans ces cas le second terme de la formule (12) est en général très petit. Le calcul montre qu'en utilisant la table MM 3½% on peut choisir:

$$m(n)\, c^n = 4{,}9 = \gamma \quad \text{(constante).}$$

Et la formule (12) deviendra:

$$\underline{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = a_0(n) - \frac{\gamma\, \Delta a_0(n)}{c^n} \frac{\lambda(x+n)}{\gamma + \lambda(x+n)}}. \tag{13}$$

Cette formule approchée donne de meilleurs résultats que le développement lidstonien et l'erreur relative n'atteint jamais 0,6% pour $s = x + n \leqq 70$ ans.

Dans son travail, M. Podtiaguine envisage un groupe de polices pour lesquelles la durée restant à courir, $n'$, est la même. Nous partirons alors de la formule (1) qui donne la réserve mathématique du groupe envisagé au début de cet exposé et que nous rappelons ici:

$$\sum_{i=1}^{v} C_i\, {}_{t_i}V_{x_i:\overline{n_i}|} = \sum_{i=1}^{v} C_i - \ddot{a}_{\xi':\overline{n'}|}\, d \sum_{i=1}^{v} C_i - \ddot{a}_{\xi':\overline{n'}|} \sum_{i=1}^{v} \Pi_i,$$

où $\xi'$ est l'âge moyen du groupe, satisfaisant aux deux relations:

$$\text{(a)} \qquad \ddot{a}_{\xi':\overline{n'}|} \sum_{i=1}^{v} C_i = \sum_{i=1}^{v} C_i\, \ddot{a}_{x'_i:\overline{n'}|},$$

$$\text{(b)} \qquad \ddot{a}_{\xi':\overline{n'}|} \sum_{i=1}^{v} \Pi_i = \sum_{i=1}^{v} \Pi_i\, \ddot{a}_{x'_i:\overline{n'}|}.$$

Pour déterminer cet âge moyen $\xi'$, M. Podtiaguine est parti de la relation (*b*) qui donne la valeur actuelle totale des primes restant à payer pour l'ensemble du groupe.

Cette valeur actuelle peut s'écrire, en partant de la formule (13):

$$\sum_{i=1}^{v} \Pi_i \, \ddot{a}_{x'_i : \overline{n'}|} = a_0(n') \sum_{i=1}^{v} \Pi_i - \frac{\gamma \, \Delta a_0(n')}{c^{n'}} \sum_{i=1}^{v} \Pi_i \, \frac{\lambda(x'_i + n')}{\gamma + \lambda(x'_i + n')} .$$

Il faut donc trouver un âge moyen $\xi'$ tel que:

$$\ddot{a}_{\xi' : \overline{n'}|} \sum_{i=1}^{v} \Pi_i = \sum_{i=1}^{v} \Pi_i \, \ddot{a}_{x'_i : \overline{n'}|} ,$$

c'est-à-dire tel que:

$$\frac{\lambda(\xi' + n')}{\gamma + \lambda(\xi' + n')} \sum_{i=1}^{v} \Pi_i = \sum_{i=1}^{v} \Pi_i \, \frac{\lambda(x'_i + n')}{\gamma + \lambda(x'_i + n')} .$$

Nous poserons:

$$A = \sum_{i=1}^{v} \Pi_i \, \frac{\lambda(x'_i + n')}{\gamma + \lambda(x'_i + n')} ,$$

$$B = \sum_{i=1}^{v} \Pi_i ,$$

et obtiendrons, pour déterminer l'âge moyen $\xi'$, l'expression suivante:

$$\underline{c^{\xi' + n'} = \frac{\gamma A}{-\operatorname{Log} g \, (B - A)}} . \qquad (14)$$

Pour chaque police, l'expression $\Pi_i \, \dfrac{\lambda(x'_i + n')}{\gamma + \lambda(x'_i + n')}$ est une constante qui peut être calculée une fois pour toutes lors de la conclusion du contrat. A chaque inventaire, il sera donc aisé de calculer $A$ et $B$ et de déterminer, pour le groupe envisagé, l'âge-terme moyen $\xi' + n'$, ou l'âge moyen à l'inventaire $\xi'$.

Ce procédé n'est nullement plus compliqué que celui de Lidstone, et il conduit à des résultats bien meilleurs comme en témoignent divers exemples numériques faits par M. Podtiaguine et portant sur la valeur actuelle des primes restant à payer. D'autre part, en pratique, l'âge $\xi'$ ainsi déterminé satisfait à la relation (a) de façon suffisamment précise pour qu'il soit permis, comme dans la méthode de Lidstone, d'utiliser un seul et même âge dans le calcul de la réserve mathématique selon la formule (1).

Cette méthode conduit à des résultats d'une meilleure approximation que la méthode de Lidstone. En effet, nous avons vu que la série (10) était plus rapidement convergente que la série (7); par conséquent, la formule (11) donne de meilleurs résultats que la formule (8).

Il s'ensuit que le procédé de M. Podtiaguine conduit à un calcul plus précis de la réserve mathématique que le développement lidstonien.

A la fin de son travail, M. Podtiaguine reprend tous ses développements mais en les appliquant cette fois à la rente continue $\bar{a}_{x:\overline{n|}}$. Il obtient ainsi, à la place de la série (7), la série suivante:

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{\operatorname{Log} c}\left[\bar{a}_0(n) - \lambda\,\Delta\bar{a}_0(n) + \frac{\lambda^2}{2!}\,\Delta^2\bar{a}_0(n) - \frac{\lambda^3}{3!}\,\Delta^3\bar{a}_0(n) + \dots\right], \quad (15)$$

et, à la place des formules (10) et (11), les formules:

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{\operatorname{Log} c}\left[\bar{a}_0(n) - z\,\bar{b}_1(n) - \frac{z^3}{3!}\,\bar{b}_3(n) + \frac{z^4}{4!}\,\bar{b}_4(n) - \dots\right], \quad (16)$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{\operatorname{Log} c}\left[\bar{a}_0(n) - \bar{m}(n)\,\Delta\bar{a}_0(n)\,\frac{\lambda(x)}{\bar{m}(n) + \lambda(x)}\right]. \quad (17)$$

L'analogie de ces formules avec celles de la rente discontinue est assez évidente pour qu'il soit superflu de reprendre en détail le cas de la rente continue qui mène à des conclusions identiques.

En conclusion, nous dirons que la méthode de Lidstone peut certes rendre de grands services, mais qu'elle ne devrait être appliquée que dans certaines limites, à savoir lorsque $x$ et $n$ ne sont pas trop élevés et, de façon générale, lorsque $s = x + n$ reste inférieur à 70 ans. Audelà de cette valeur de $s$, les termes de la série (7) abandonnés par Lidstone dans la formule (8) sont trop importants pour être négligés et pour que cette formule soit encore acceptable.

En revanche, la transformation que M. Podtiaguine a appliquée à la série (7) conduit à une nouvelle série plus rapidement convergente, d'où l'on tire une nouvelle formule (11) donnant des résultats sensiblement plus exacts et utilisables en tout cas jusqu'à l'âge-terme $s = 80$ ans. Elle est donc de loin préférable au développement lidstonien.

Enfin, en ce qui concerne le calcul des réserves mathématiques d'un groupe de polices et la détermination de l'âge moyen y relatif, il paraît certain que la méthode de M. Podtiaguine, qui part d'une formule plus précise, donne de meilleurs résultats que celle de Lidstone. Quant à la détermination de l'âge moyen $\xi'$, nous pensons que les deux méthodes se valent, sans qu'il soit possible d'en qualifier une de plus rapide ou de moins compliquée que l'autre.

## Zusammenfassung

Der Verfasser versucht, gestützt auf eine Arbeit von Podtiaguine, Prag, zu zeigen, dass die Gruppierungsmethode nach Lidstone, obwohl im allgemeinen als sehr befriedigend betrachtet, in gewissen Fällen zu Ergebnissen führen könnte, welche von den nach der genauen Methode berechneten Reserven ziemlich abweichen. Zu diesem Zwecke analysiert der Verfasser die Lidstonesche Methode, indem er verschiedene analytische Ausdrücke der Rente $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ verwendet, um den Annäherungsgrad der Lidstoneschen Entwicklung besser beurteilen zu können. Hierauf werden ein neuer Ausdruck dieser Rente und eine neue Berechnungsmethode für die Ermittlung des mittleren Alters, wie sie Podtiaguine entwickelt hat, dargestellt, was eine gruppenweise Berechnung der mathematischen Reserve mit einer besseren Annäherung als der Lidstoneschen Methode erlaubt.

## Summary

Taking a paper of Podtiaguine of Prague as a base, the author tries to demonstrate that the grouping method of Lidstone, generally considered as very satisfactory, can, in certain cases, lead to results which differ significantly from the reserves calculated by the exact method. He analyses the Lidstone method by using different analytic expressions for the annuity $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, in order to judge the degree of approximation obtained by Lidstone's procedure. Further on, the author presents a new expression for this annuity and a new method for the determination of the mean age, both elaborated by Podtiaguine, which allow the calculation of the mathematical reserve of groups with a better degree of approximation than the method of Lidstone.

## Riassunto

Riferendosi ad una pubblicazione di Podtiaguine di Praga, l'autore cerca di dimostrare che il metodo di raggruppamento di Lidstone, in generale considerato molto soddisfacente, può, in certi casi, condurre a risultati alquanto differenti da quelli calcolati con il metodo esatto. Egli procede perciò ad una analisi di questo metodo ed utilizza diverse espressioni analitiche per la rendita $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, al fine di poter meglio giudicare il grado di approssimazione dello sviluppo di Lidstone. L'autore porta inoltre una nuova formula per questa rendita ed un nuovo metodo per il calcolo dell'età media elaborati da Podtiaguine, ciò che permette il calcolo delle riserve matematiche a gruppi con una approssimazione migliore di quella che presenta il metodo di Lidstone.