

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 61 (1961)

Artikel: Zur Auffindung optimaler Sterblichkeitsgrundlagen

Autor: Nolfi, P.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-966735>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur Auffindung optimaler Sterblichkeitsgrundlagen

Von P. Nolfi, Zürich

*Meinem lieben Kollegen Prof. Heinrich Jecklin
zu seinem 60. Geburtstag gewidmet*

Zusammenfassung

In Anlehnung an die Methoden der Spieltheorie wird der Auftrag des Aktuars, passende und zuverlässige Sterblichkeitsgrundlagen für seine Kalkulationen aufzufinden, als eine *strategische* Aufgabe aufgefasst, im Sinne eines Spieles gegen die «Natur». Es werden Verfahren zur Gewinnung eines Überblickes über die Gesamtheit der Strategien sowie Erwägungen und Anregungen zur Überwindung der sich ergebenden Schwierigkeiten vorgebracht.

1. Kennzeichnung des Problems

Der anhaltende Rückgang der Sterblichkeit hat zur Folge, dass Schwankungen in der Sterblichkeit sich immer empfindlicher auf die Höhe der Versicherungswerte auswirken. Nachdem die Sterbenswahrscheinlichkeit in jüngeren Jahren unter ein Promille gefallen ist, sinkt die Nettoprämie für eine einjährige Risikoversicherung auf einen sehr bescheidenen Betrag, womit das Risiko des Versicherers sich ständig erhöht. Das folgt einmal rein theoretisch. Das relative Risiko für n gleichartige Versicherungen hängt von der Grösse $\sqrt{p/nq}$ ab, woraus ersichtlich wird, dass dieses bei sinkenden Werten von q ansteigt. — In Wirklichkeit dürfte die Risikogefahr — wie Untersuchungen über die Sterblichkeitsschwankungen zeigen — noch wesentlich grösser sein. Auch muss darauf hingewiesen werden, dass es dank den Fortschritten in der Heilkunde wohl möglich war, die Sterblichkeit zurückzudrängen, dass aber keine Sicherungsmassnahmen getroffen werden konnten, um sie auf diesem Niveau zu halten. Man muss sich fragen, ob die Möglichkeiten eines Rückfalles nicht grösser sind als früher. Allein ein temporärer Rückfall in die Sterblichkeit zu Beginn unseres Jahrhunderts würde in der Todesfallversicherung erhebliche Verluste verursachen,

von der Möglichkeit des Auftretens grosser Epidemien, wie solche in früheren Jahrhunderten sich über ganze Kontinente ausbreiteten, ganz zu schweigen. Hinzu tritt heute die Gefahr, dass gewisse Erzeugnisse der chemischen Industrie, die in mannigfacher Weise in alle Bevölkerungsschichten Eingang finden, mit der Zeit möglicherweise Spätwirkungen hervorrufen, deren Folgen noch nicht zu übersehen sind. Ebenso bildet die in der Medizin deutlich in Erscheinung tretende Resistenz-Reaktion der Bakterien ein Warnungszeichen. Jedenfalls hat es den Anschein, dass die Sterblichkeit keineswegs eine stabile Lage erreicht hat, so dass es weiterer Anstrengungen bedarf, um sie zu halten oder weiter zurückzudämmen.

Neben den zeitlichen Sterblichkeitsschwankungen kommt der Variation der Mortalität unter den einzelnen Individuen, die ein erhebliches Ausmass erreicht, in der Versicherung erhöhter Risiken grosse Bedeutung zu. In dieser Hinsicht konnten in der letzten Zeit zahlreiche Fortschritte erzielt werden. Insbesondere hat Jecklin im Anhang des Lehrbuches von W. Saxer [1]¹⁾ eine grundlegende Technik zur Behandlung solcher Risiken bekanntgegeben.

Eine entgegengesetzte Bedeutung kommt der Veränderung der Sterblichkeit in reinen Erlebensfallversicherungen, wie in der Rentenversicherung, zu. Wohl ist in dieser Branche der Schwankungsbereich auf der Verlustseite wesentlich beschränkter, doch ist der Wirkungsgrad dafür grösser, so dass bereits eine verhältnismässig kleine Verminderung der Sterblichkeit die Belastung empfindlich zu steigern vermag. Auch kommt in der Rentenversicherung den höheren Lebensaltern und damit demjenigen Abschnitt der Sterbetafel mit höheren Sterbenswahrscheinlichkeiten und grösserem Schwankungsbereich mehr Gewicht zu. — Erschwerend für eine möglichst zutreffende Kalkulation der Versicherungskosten macht sich die Langfristigkeit der Versicherungsverträge (Altersrenten) bemerkbar. Die Wahl der Grundlagen muss lange bevor ihre Zuverlässigkeit verifiziert werden kann stattfinden.

Aus allen diesen Hinweisen folgt, dass die Verantwortung, die der Aktuar für seine Berechnungen übernehmen muss, nicht gesunken ist, sondern zugenommen hat, und es stellt sich die Frage, wie er sich in dieser Situation am besten und am ehesten bewähren kann. An der

¹⁾ Siehe Literatur.

Tatsache, dass die Sterblichkeit einen wirksameren Einfluss auf die Versicherungswerte ausübt, kann er nichts ändern. Die einzige Möglichkeit für ihn besteht in einem weiteren Ausbau der Versicherungstechnik im Hinblick auf den ihm gestellten Auftrag. Was unseres Erachtens am meisten erwünscht wäre, ist vor allem ein Übergang zu einer dynamischen Technik, zu einem Verfahren, das gestattet, möglichst rasch und ohne allzu grosse, zeitraubende Berechnungen einen Überblick über den Einfluss von Sterblichkeitsveränderungen und von Abweichungen gegenüber der normalen Sterblichkeit zu gewinnen. In dieser Hinsicht vermag das bestehende versicherungsmathematische Rüstzeug noch keineswegs zu befriedigen. Andererseits gelangt man bei näherer Überlegung doch zur Überzeugung, dass zumindest ein Teilerfolg in der gewünschten Richtung erreichbar sein sollte. Wir betrachten hierzu nachstehend zur Abtastung der bestehenden Möglichkeiten einige Verfahren, die geeignet erscheinen, dem Ziele näher zu kommen.

2. Ausblick auf eine Gesamtheitslösung

Um möglichst rasch und zuverlässig über die Auswirkung von Sterblichkeitsveränderungen auf eine vorliegende Versicherungskombination orientiert zu werden, sollte der Aktuar über einen Katalog unter verschiedenen Hypothesen aufgestellter Tafeln und deren Versicherungswerte verfügen können. Dabei sollten diese Tafeln nicht nur nach den Hypothesen, die dem Versicherungsmathematiker wichtig erscheinen, sondern auch nach solchen, an die er mangels Kenntnissen oder Urteilsfähigkeit nicht denkt und welche möglicherweise von grösserer Tragweite sein können, als er von vornherein annimmt, aufgestellt werden. Wie Hasso Härten [2] richtig bemerkt, besteht das Hauptproblem darin, die einzelne Versicherung dem richtigen Kollektiv zuzuordnen. Würde also dem Aktuar eine vollständige Gesamtheit von Tafeln mit samt den Versicherungswerten zur Verfügung stehen, so würde ihm nur noch die Aufgabe zufallen, aus einem solchen Katalog die bestmögliche auszusuchen. Er befände sich alsdann grundsätzlich in der gleichen Situation wie ein Spieler, der unter den vielen verfügbaren Strategien die optimale auffinden möchte. Es handelt sich also bei dieser Situation im Prinzip um ein Zwei-Gegner-Spiel; ein Spiel des Aktuars gegen die «Natur».

Die erste Aufgabe, die einem Spieler nach den Empfehlungen der Spieltheorie zufällt, besteht in der Erlangung einer möglichst vollständigen Information einerseits über die ihm zustehenden Möglichkeiten und deren Auswirkungen und andererseits über die mutmasslichen Absichten des Gegners. Tatsächlich zeigt es sich, dass der Auskundschaftung, sei es der Erfolge der einzelnen Strategien oder der Verhaltensweise des Gegners, ausschlaggebende Bedeutung zukommt. Dazu ergeben sich meistens aus dem Studium der Auswirkung unterschiedlicher Strategien Anhaltspunkte für die eigene bestmögliche Verhaltensweise. – In der Versicherung tritt allerdings die zusätzliche Eigentümlichkeit hinzu, dass der Versicherer nicht von der Annahme ausgehen darf, die «Natur» trachte darnach, ihn zu schädigen, da er alsdann vom Abschluss von Versicherungen absehen müsste. Indessen lassen sich andere Kriterien [3] aufstellen, durch welche die Verfahrensfrage nicht unmittelbar tangiert wird.

Unser Anliegen bedingt vorerst eine Abklärung der Zahl der Strategien, die dem Aktuar zur Verfügung stehen. Sieht man davon ab, dass im vorliegenden Spiele eigentlich noch ein dritter Spielpartner, nämlich der Versicherungsnehmer gewisse Entscheide (Annahme oder Ablehnung des Versicherungsantrages) treffen kann, so stehen dem Aktuar im Prinzip eine un abzählbare Menge von Strategien zur Verfügung. Er kann die versicherungstechnisch «notwendige» Prämie a priori nach irgendeiner beliebigen Sterbetafel berechnen. Die Aufgabe, die Auswirkung aller möglichen Sterblichkeitsverläufe zu prüfen, wäre somit für ihn nicht zu bewältigen. – Eine wesentliche Verminderung der Zahl der Strategien ohne praktischen Nachteil ergibt sich bei Beschränkung auf «Treppen»-Tafeln. Für versicherungstechnische Kalkulationen genügt die Festsetzung der einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x für die ganzzahligen Werte von $x = 0$ bis $x = 99$. Ebenso genügt es, wenn diese Angaben auf fünf Dezimalstellen erfolgen. Die Menge aller möglichen Sterbetafeln wird damit sehr stark eingeschränkt, sie wird nicht nur abzählbar, sondern sogar endlich und beziffert sich auf

$$\underline{(10^5)^{100} = 10^{500}}.$$

Man kann somit feststellen, dass im Prinzip die Möglichkeit besteht, sämtliche Strategien anzugeben. Die Anzahl der Elemente dieser Menge, d. h. die Gesamtheit aller «Treppen»-Tafeln ist jedoch so über-

ragend gross, dass die Aufgabe, alle Fälle zu sondieren, niemals bewältigt werden kann. Wohl bestünde die Möglichkeit einer geschickten Anordnung der Elemente. So könnte die Gesamtheit der Tafeln nach strategischen Gesichtspunkten katalogisiert werden, z. B. in der Weise, dass aufeinanderfolgende Absterbeordnungen sich durch bestimmte Merkmale unterscheiden, etwa eine konstante Differenz in der Sterblichkeit aufweisen, womit das Aufsuchen der «bestgeeigneten» weitgehend erleichtert würde; doch auch ein solches Programm übersteigt die Leistungsfähigkeit menschlicher Tatkraft.

Es verbleibt die Frage, inwieweit durch eine sinnvolle Reduktion der Anzahl das gesteckte Ziel doch noch erreicht werden könnte. Eine ganz wesentliche Verminderung der Zahl der Elemente könnte erreicht werden durch Beschränkung auf Tafeln, bei denen die Folge der q_x monoton zunimmt (monoton wachsend im engeren Sinn). Da im allgemeinen diese Bedingung für die Altersjahre über 10 zutrifft, kämen nur die Altersjahre 11 bis 100 in Betracht. Die Zahl der Elemente würde

$$\binom{100\,000}{90} \text{ oder rund } 10^{312}$$

erreichen. Die betrachtete Einschränkung wäre somit sehr wirksam. Sie erscheint aber bereits zu weitgehend. Namentlich in der Versicherung erhöhter Risiken hat man vielfach mit anfänglich sinkenden Sterbenswahrscheinlichkeiten zu tun [4]. Dazu kommt, dass trotz der wesentlichen Verminderung der Elemente ihre Zahl immer noch überwältigend gross bleibt, so dass keine Aussicht besteht, selbst ein dermassen reduziertes Programm zu bewältigen.

Obwohl nach den gemachten Feststellungen der Versuch einer Gesamtlösung auch unter Heranziehung modernster Hilfsmittel wie elektronischer Rechenmaschinen usw. aussichtslos erscheint, dürften die angestellten Betrachtungen aus höchster Warte doch wertvoll sein. Sie vermögen, wie sich das in der Spieltheorie immer wieder zeigt, umfassende Einblicke in allgemeine Zusammenhänge zu vermitteln, die wegweisend werden können.

Im vorliegenden Falle gewinnt man den Eindruck, dass es wohl gelingen dürfte, durch ein geeignetes Verfahren zumindest wertvolle Teilergebnisse zu erhalten. Dazu wird man nicht umhinkommen, vorerst nach weiteren Hilfsmethoden Umschau zu halten.

3. Ausschau nach Invarianten

Die grosse Schwierigkeit, innert nützlicher Zeit die wichtigsten Strategien zu erkennen, um sie gegeneinander abzuwägen, hat ihren tieferen Grund in der Tatsache, dass die Sterblichkeitskurve einen umständlichen, schwer mathematisierbaren Verlauf aufweist. Der Aktuar ist in dieser Hinsicht in einer wesentlich ungünstigeren Lage als z. B. der Statistiker. In der Statistik kommt der *Normalverteilung* überragende Bedeutung zu. Sehr viele Erwägungen können mit Hilfe eines geeigneten Vertreters dieser Kurvenschar durchgeführt werden. Im Gegensatz zur Sterbetafel sind dabei zur Charakterisierung eines Kurvenverlaufes bekanntlich jedoch nur zwei Parameter, die Angaben von Mittelwert und Streuung, notwendig. Dazu tritt die weitere verblüffende Tatsache, dass durch Vorgabe von Mittelwert und Streuung die meisten grundlegenden numerischen Berechnungen auf Grund der ein für allemal erstellten Zahlentafel der Verteilungsfunktion $\Phi(t)$ durchgeführt werden können. — In einer ähnlichen begünstigten Lage wie der Statistiker befindet sich auch der Astronom. Seine Kurve ist die Ellipse, also wieder eine Kurve von grösster Einfachheit. Nicht umsonst setzte sich Ende des letzten Jahrhunderts Th. Wittstein das Ziel: «Aus den Beobachtungen weniger Altersklassen mit Sicherheit eine Sterblichkeitstafel aufzubauen, wie der Astronom aus wenigen Beobachtungen eines Gestirns dessen ganze Bahn berechne.» Wäre dieses Anliegen erfolgreich gewesen, so liesse sich auch das hier umschriebene Vorhaben ohne Schwierigkeiten bewältigen. Leider konnte trotz allen Bemühungen keine allseitig befriedigende *Sterbeformel* gefunden werden. Indessen sollten unseres Erachtens diese Bestrebungen nicht direkt aufgegeben, sondern vielmehr umgestaltet werden. Wünschenswert wäre die Aufstellung von typischen Merkmalen, die eine rasche und ausreichende Orientierung gestatten. So sollte es möglich sein, Vereinfachungen zu treffen, derart, dass auf Grund von wenigen Angaben eine ausreichende Charakterisierung ermöglicht wird.

Ein Weg in diesem Sinne ergäbe sich vielleicht durch die Auffindung von Invarianten, die ein abgekürztes Verfahren gestatten. Wir denken z. B. an eine interessante Entdeckung von H. Wiesler [5]. Dieser Autor konnte zeigen, dass dank der Invarianz gewisser Grössen eine Sterbetafel mit ausreichender Genauigkeit aus den Sterbeziffern unter Beschränkung auf Altersstufen von 5 Jahren aufgestellt werden kann.

Darnach würde für das Auswahlverfahren zur Auffindung der bestgeeigneten Sterbetafel die Vorlage sämtlicher «Treppen»-Tafeln in 5jähriger Altersgruppierung ausreichen. Die Ordnungszahl einer solchen Menge stellt sich auf 10^{100} . Sie ist im Vergleich zu den obigen Werten wesentlich reduziert, übersteigt jedoch immer noch die Grenze des Erreichbaren. Immerhin erscheint das gesteckte Ziel nicht mehr absolut unerreichbar, es bedarf «bloss» der Entdeckung weiterer Invarianten, um es in erreichbare Nähe zu rücken. Ein augenscheinliches Mass für die Wirksamkeit der hier in Betracht gezogenen Invariante wird durch den Rückgang der Entropie von höchstens 1661 auf höchstens 332 bit. vermittelt [6].

4. Möglichkeiten eines Analogieverfahrens

Besonders interessant erscheinen in diesem Zusammenhang neuere Entwicklungen in der Krebsstatistik. Weil die möglichst frühzeitige Kenntnis des Heilerfolges bei an Krebs erkrankten Personen für die Behandlung von entscheidender Bedeutung sein kann, wurde ein Verfahren gesucht, das der Anforderung raschster Auswertung des Beobachtungsmaterials genügt. In verschiedenen Arbeiten konnten J. W. Boag, Soerensen und T. W. Less [7] gestützt auf die Methode der Maximum Likelihood nachweisen, dass das Ableben einer Gesamtheit von an Krebs erkrankten Personen während der Behandlungsdauer weitgehend der logarithmischen Normalverteilung folgt. Werden also die Zahlen der Überlebenden in einem Wahrscheinlichkeitsnetz eingetragen, so präsentieren sich die Kurven als gerade Linien, womit der Überblick und die wissenschaftliche Auswertung wesentlich erleichtert wird, insbesondere kann in einfacher Weise die Monte-Carlo-Methode zum Testen neuer Beobachtungen herangezogen werden.

Angeregt durch diesen Erfolg in der Darstellung eines Sterblichkeitsphänomens haben wir geprüft, ob nicht auch irgendeine biometrische Funktion aus dem Gebiete der Lebensversicherung entsprechende Eigenschaften aufweise. Es zeigte sich, dass die Überlebensordnung, also die Kurve der l_x zwar keine geradlinige, aber doch eine wesentlich einfachere Gestalt annimmt. Ob sich hieraus Möglichkeiten für die Erreichung des oben umschriebenen Zieles ergeben, konnte nicht näher abgeklärt werden. — Dagegen konnte festgestellt werden, dass die mittlere Lebenserwartung e_x als Funktion von x für die Altersjahre 20 bis 70 die

Bedingungen der Gradlinigkeit weitgehend erfüllt. Da die Grösse e_x ein erhebliches Aussagevermögen besitzt, erscheint diese Feststellung bemerkenswert. In analytischer Form lautet die Beziehung wie folgt:

$$1 - \frac{e_{20+t}}{e_{20}} \cong \Phi(\tau) \quad \text{wobei} \quad \Phi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

die logarithmische Normalverteilung bedeutet mit

$$\tau = \frac{\log(20+t) - m}{\sigma}.$$

Der Verlauf von e_{20+t} wird damit einzig durch den Mittelwert m und die Streuung σ gegeben, wobei der Mittelwert m für $\tau = 0$ aus

$$\frac{e_{20+t_m}}{e_{20}} = \frac{1}{2} \quad \text{mit} \quad m = \log(20+t_m) \quad \text{folgt.}$$

Für die Streuung erhält man

$$\sigma = \frac{\log(20+t) - \log(20+t_m)}{\tau}.$$

Wird zur Berechnung von σ irgendein Wert für t angenommen, so kann aus einer Zahltafel für $\Phi(\tau)$ der zugehörige Wert von τ bestimmt und damit σ berechnet werden. – Im Falle der von H. Jecklin [8] für eine α -fache Erhöhung der Sterblichkeit angegebenen Werte für $e_x^{(\alpha)}$ erhält man auf Grund der oben aufgeführten Formel

| | | |
|------------------|--------------|--------------|
| $\alpha = 0$ | $\alpha = 1$ | $\alpha = 3$ |
| $m = 1,68$ | 1,65 | 1,63 |
| $\sigma = 0,199$ | 0,194 | 0,187 |

Es müsste nun weiter abgeklärt werden, ob und inwieweit die hier umschriebene Eigenschaft der Funktion e_x tatsächlich sich als allgemein haltbar erweist. Ein positives Ergebnis würde die Möglichkeit eröffnen, die Gesamtheit der Sterbetafeln auf eine wohlgeordnete Menge von Strecken abzubilden, die einzig durch zwei Parameter gekennzeichnet werden können. Hierbei käme allerdings nur ein Analogieverfahren in Betracht, das erlauben würde, aus der Lage der

Strecke im Wahrscheinlichkeitsnetz auf den allgemeinen Verlauf der Sterblichkeit zu schliessen. Dagegen könnte die Beziehung:

$$\frac{e_x - 1}{e_{x+1}} = 1 - q_x$$

wegen des subtilen Zusammenhanges zwischen diesen Grössen und infolge der lediglich approximativen Geradlinigkeit der Funktion e_x nicht benutzt werden.

5. Andere Möglichkeiten

dürften sich aus einer Unterteilung der Gesamtmenge in repräsentable Teilmengen ergeben. Hierauf kann jedoch im Rahmen dieser Studie nicht eingetreten werden.

Literatur

- [1] *W. Saxer*, Versicherungsmathematik, Springer-Verlag 1955.
- [2] *H. Härten*, Die Lebensversicherung anormaler Risiken, XV. Int. Cong. of Actuaries.
- [3] *D. Luce and H. Raiffa*, Games and Decisions, John Wiley, New York.
- [4] *W. Sachs*, Umriss einer Theorie der Risikenauslese, Blätter f. Vers. Math., Band IV, Heft 2.
- [5] *H. Wiesler*, Einfache Methode f. d. Erst. einer abgekürzten Sterbetafel, Schw. Zeitschrift f. V. u. St., Heft 4/1951.
- [6] *P. Dubois*, Introduction a la théorie de l'information, MsVM, Band 60, Heft 2.
- [7] *T. W. Lees*, Assessing the curability of Cancer, Stockholm 1956.
- [8] *H. Jecklin*, Genäherte Bestimmung der mittleren Lebensdauer erhöhter Risiken, Heft 1, Band V der Bl. f. v. Math., Tafel I.

Résumé

Lorsqu'il applique la méthode de la théorie des jeux, l'actuaire qui a pour tâche d'établir pour ses calculs des tables de mortalité appropriées et sûres, se trouve en présence d'un problème *stratégique*, en ce sens qu'il s'agit d'un jeu contre la «nature». L'article fait état de procédés permettant d'avoir une vue d'ensemble de ces stratégies et présente quelques considérations et conseils aidant à surmonter les difficultés qui se présentent.

Summary

The problem given to the actuary, to discover for his calculations suitable and reliable bases of mortality, can be considered, with reference to the methods of the theory of games, as a *strategic* one in the way of a game against «nature». Proceedings are developed to get a survey in the set of strategies whereas considerations and stimulations are indicated to overcome the resulting difficulties.

Riassunto

Secondo i metodi della teoria dei giuochi, il problema dell'Attuario che deve determinare per i suoi calcoli tavole di mortalità adatte e sicure, può essere considerato come un compito *strategico*, nel senso di un giuoco contro la «natura». Si sviluppano procedimenti per ottenere una visione generale sulla totalità delle strategie, come pure si fanno considerazioni e si danno suggerimenti per superare le difficoltà che si presentano.