

**Zeitschrift:** Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft  
**Herausgeber:** Schweizerische Astronomische Gesellschaft  
**Band:** 10 (1965)  
**Heft:** 88

**Artikel:** Die keplerschen Gesetze der Planetenbewegungen [Fortsetzung]  
**Autor:** Steinlin, Uli  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-900030>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

*De Callataÿ, V. : Atlas de la lune.*

de Visscher, Paris 1962.

*Markowitz, W. : The photographic zenith tube and the dual-rate moon-position camera.*

«Stars and stellar systems» Vol. 1, ed. G.-P. Kuiper & B.-M. Middlehurst, University of Chicago Press, 1960.

Adresse de l'auteur :

Mlle W. BURGAT, Observatoire de Neuchâtel.

Für angehende Sternfreunde

## DIE KEPLERSCHEN GESETZE DER PLANETENBEWEGUNGEN

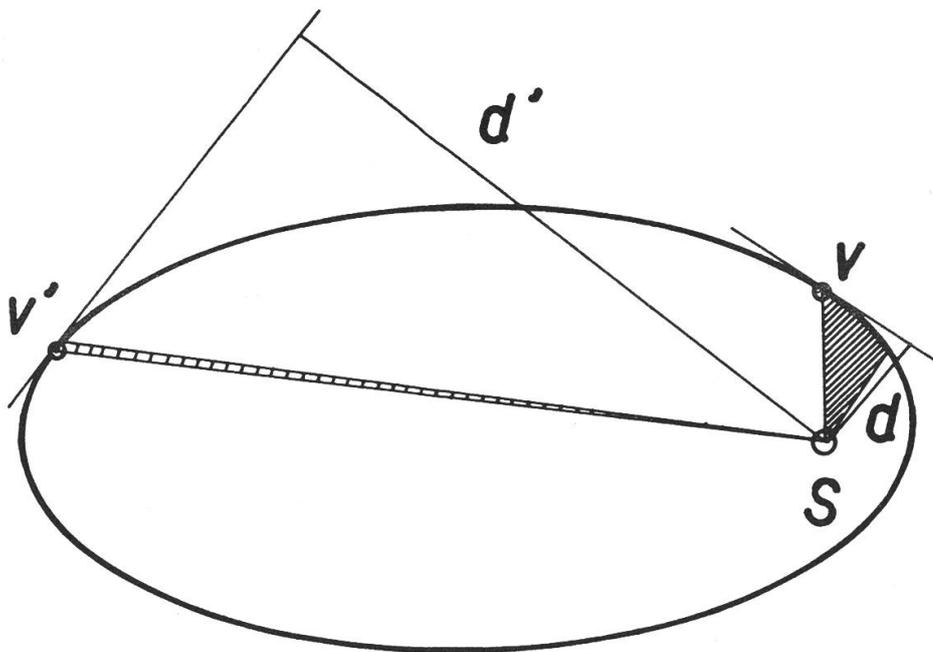
Von Uli STEINLIN, Basel

### 3. Das zweite und dritte Keplersche Gesetz.

Wie im vorhergehenden Kapitel schon erwähnt wurde, fand Kepler aus Tycho Brahes Beobachtungen, dass Mars nicht nur auf einer elliptischen Bahn läuft, sondern sich in dieser Bahn auch nicht mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Wenn der Planet der Sonne näher ist, bewegt er sich schneller, als wenn er weiter entfernt ist. Auch hier fand Kepler eine Gesetzmässigkeit, die so ausgedrückt werden kann, dass die Geschwindigkeit in einem gegebenen Punkt der Bahn umgekehrt proportional ist dem Lot von der Sonne auf die Tangente, die in eben diesem Punkt an die Bahn gelegt wird. In Abbildung 1 bezeichnen  $v$  und  $v'$  zwei Geschwindigkeiten,  $d$  und  $d'$  die dazugehörigen Lote auf die Tangenten an die Bahn, in deren Richtung die Geschwindigkeiten liegen. Kepler fand also das Verhältnis

$$\text{oder} \quad \begin{array}{l} v : v' = d' : d \\ vd = v'd' \end{array}$$

das heisst: das Produkt  $vd$  hat für alle Punkte der Bahn denselben Wert. Die Hälfte dieses Produktes,  $vd/2$ , wird «Flächengeschwindigkeit» genannt. Wird nämlich ein so kurzer Bogen  $s$  der Ellipse betrach-



tet, dass die Krümmung der Bahn vernachlässigt werden darf, dann kann der kleine Sektor der Ellipse, der in Abbildung 1 schraffiert ist, als ein Dreieck behandelt werden, dessen Flächeninhalt das halbe Produkt aus der Grundlinie  $s$  und der Höhe  $d$  ist. Die Geschwindigkeit  $v$  ist jedoch gleich der Strecke  $s$ , dividiert durch die Zeit, die der Planet braucht, um diese zu durchlaufen. Das heisst aber, dass unser  $vd/2$  dasselbe ist wie die Fläche des Dreiecks, dividiert durch die Zeit; daher der Name Flächengeschwindigkeit.

Die von Kepler gefundene Regel kann auch so ausgedrückt werden: Die Flächengeschwindigkeit eines und desselben Planeten ist konstant. In dieser Form, in der von der Tangente und dem Lot auf sie nicht mehr die Rede ist, erhält die Regel auch Gültigkeit für grössere Sektoren, in denen die Krümmung der Bahn nicht mehr vernachlässigt werden kann. Die Regel wird gewöhnlich in der folgenden Form ausgedrückt und trägt den Namen *zweites Keplersches Gesetz*:

Die Radienvektoren eines Planeten (das sind die Verbindungslinien zwischen der Sonne und dem Planeten) überstreichen in gleichen Zeiten gleich grosse Flächenräume.

Einige Jahre nach der Entdeckung der beiden ersten Gesetze, die im Jahre 1609 veröffentlicht wurden, gelang es Kepler nach verschiedenen vergeblichen Versuchen, auch eine gesetzmässige Beziehung zwischen Entfernungen und Umlaufzeiten nachzuweisen. Sie wird ausgedrückt durch das *dritte Keplersche Gesetz*:

Die Quadrate der siderischen Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die Kuben der mittleren Entfernungen von der Sonne.

Sind  $a_1$  und  $a_2$  die mittleren Entfernungen zweier Planeten und  $U_1$  und  $U_2$  ihre Umlaufszeiten, so hat man also :

$$U_1^2 / U_2^2 = a_1^3 / a_2^3 \quad (1)$$

Da die Umlaufszeiten gut zu beobachten und damit genau bekannt sind, hat man hier ein wichtiges Mittel, das Verhältnis zwischen den Entfernungen zu bestimmen, sodass man alle kennt, wenn eine von ihnen in irdischen Masseinheiten bekannt ist. Mit dem, dass man etwa die Entfernung Sonne – Erde in Kilometern bestimmen konnte, sind auch die Entfernungen aller andern Planeten von der Sonne in Kilometern auf Grund dieser Beziehung einfach zu berechnen gewesen.

Solange nur nach den relativen Werten der Entfernungen der Planeten gefragt wird, benutzt man die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne (die « astronomische Einheit ») als Mass für die Entfernungen und das siderische Jahr als Zeiteinheit. Dann ist in der obigen Gleichung  $a_1 = 1$  und  $U_1 = 1$  und man erhält

$$a_2 = \sqrt[3]{U_2^2} \text{ oder } U_2 = \sqrt{a_2^3},$$

das heisst: man kann für jeden Planeten oder Planetoiden in unserem Sonnensystem sehr einfach aus seiner Umlaufszeit in Jahren seine mittlere Entfernung in astronomischen Einheiten ausrechnen.

Das dritte Keplersche Gesetz kann auch zur angenäherten Berechnung der durchschnittlichen Geschwindigkeit eines Planeten dienen. Je mehr sich die Ellipsenform der Bahn einem Kreis annähert, umso kleiner sind ja die Aenderungen des Abstandes von der Sonne während eines Umlaufes und damit auch die Aenderungen der Geschwindigkeit des Planeten in seiner Bahn. Da die Bahnen der grossen Planeten alle sehr nahe bei der Kreisform liegen, schwankt ihre Geschwindigkeit nur wenig um diesen Mittelwert. Die Geschwindigkeit  $v$  eines Planeten beträgt dann, wie eine kleine geometrische Ueberlegung\*) zeigt,

$$v = V_1 / \sqrt{a}$$

wobei  $V_1$  die mittlere Geschwindigkeit der Erde (rund 30 km/sec) bedeutet und  $a$  wieder in astronomischen Einheiten gemessen ist. Je weiter ein Planet von der Sonne entfernt ist, je grösser also  $a$ , umso kleiner wird  $v$ , umso langsamer bewegt er sich also. Aber selbst für Pluto, für den  $a$  nahezu 40 beträgt, wird die durchschnittliche Geschwindigkeit doch noch etwa 4.75 km/sec.

---

\*) Für diejenigen Leser, die eine kleine geometrische Betrachtung nicht scheuen, sei hier die Ableitung gezeigt. Für einen Planeten gilt, wenn wir näherungsweise mit einer Kreisbahn rechnen, dass

#### 4. Bahnelemente.

Auf Grund der Keplerschen Gesetze kann der Ort eines Planeten am Himmel zu jedem beliebigen Zeitpunkt berechnet werden mit Hilfe von 6 konstanten Grössen, den sogenannten Bahnelementen. Zwei dieser Grössen geben an, wie die Ebene, in der die Planetenbahn liegt, im Raume orientiert ist. Zwei weitere Grössen kennzeichnen die Grösse und die Form der Bahnellipse. Eine fünfte Grösse sagt, in welcher Richtung diese Ellipse in der Ebene liegt, und eine sechste Grösse gibt an, an welchem Punkte der Bahn sich der Planet in einem bestimmten Augenblick befindet.

---

seine Geschwindigkeit gleich ist dem Kreisumfang dividiert durch seine Umlaufzeit:

$$v_1 = 2 \pi a_1 : U_1$$

und analog für einen zweiten:

$$v_2 = 2 \pi a_2 : U_2.$$

Dann ist das Verhältnis der beiden Geschwindigkeiten

$$v_2 / v_1 = a_2 U_1 / a_1 U_2. \quad (2)$$

Weiter oben hatten wir die Beziehung (1)

$$U_1 / U_2 = \sqrt{a_1^3 / a_2^3} = (a_1 / a_2) \sqrt{a_1 / a_2}$$

die wir umformen können in

$$a_2 U_1 / a_1 U_2 = \sqrt{a_1 / a_2}.$$

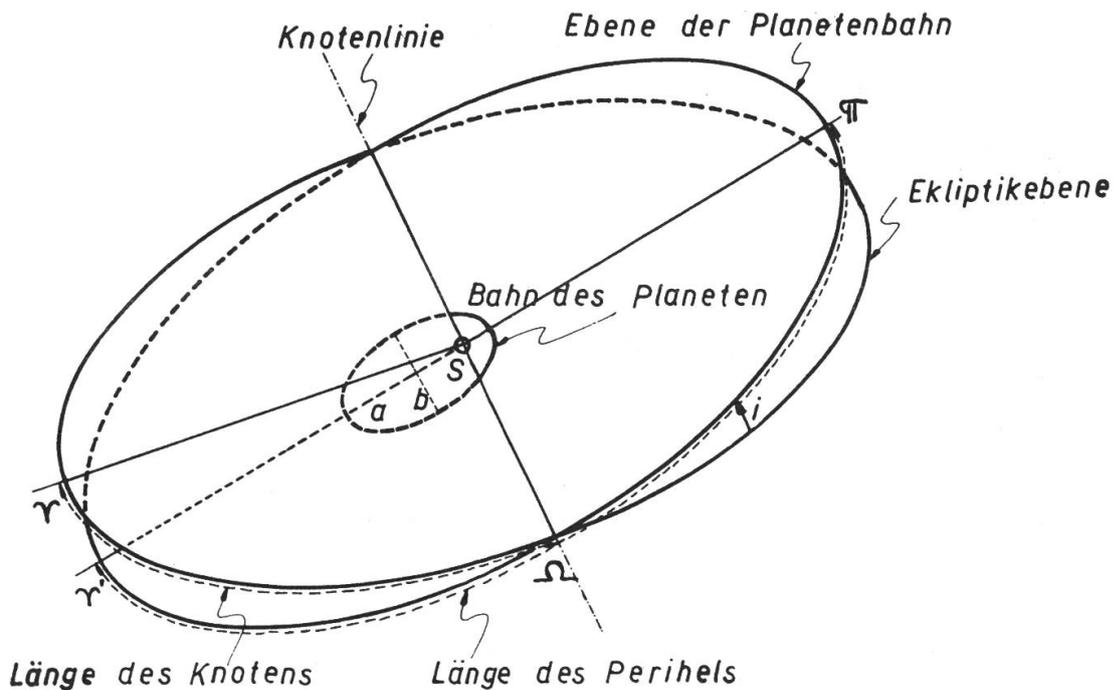
Diesen Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung für den wir oben in Gl. (2), wo wir ihn durch den hier auf der rechten Seite stehenden ersetzen können:

$$v_2 / v_1 = \sqrt{a_1 / a_2} \quad \text{oder} \quad v_2 = v_1 \sqrt{a_1 / a_2}.$$

Wenn wir nun für den Planeten 1 die Werte für die Erde einsetzen, dann ist  $a_1 = 1$  und wir erhalten

$$v_2 = v_1 / \sqrt{a_2},$$

d.h. die Geschwindigkeit eines zweiten Planeten ist gleich der Geschwindigkeit der Erde, dividiert durch die Quadratwurzel aus seinem Abstand von der Sonne, gemessen in astronomischen Einheiten.



Zunächst muss man die Lage der Ebene, in der die Planetenbahn liegt, kennen. Für uns ist es am einfachsten, die Lage dieser Ebene relativ zur Bahnebene der Erdbahn, der Ekliptik, in Beziehung zu setzen. Die Bahnebene des Planeten, die nach dem ersten Keplerschen Gesetz durch die Sonne gehen muss, schneidet die Ekliptikebene in einer Geraden, der sogenannten Knotenlinie (Abbildung 2). Der «aufsteigende Knoten» bezeichnet den Punkt, in dem der Planet im Laufe seines Weges um die Sonne von Süden nach Norden die Ekliptikebene überschreitet. Den entgegengesetzten Schnittpunkt nennt man den «absteigenden Knoten». Die Richtung zu dem aufsteigenden Knoten wird durch den Winkel zwischen der Knotenlinie und der Richtung zum Frühlingspunkt auf der Ekliptik (dem Punkte, an dem die Sonne am 21. März steht) angegeben (alle Winkel im Planetensystem werden «rechtläufig» gezählt, d.h. in der Richtung in der die Planeten alle um die Sonne laufen: von Norden gesehen im Gegenuhrzeigersinn). Diesen Winkel nennt man die «Länge des aufsteigenden Knotens» und bezeichnet ihn mit  $\Omega$ . Kennt man ausser der Richtung der Knotenlinie auch den Winkel zwischen der Ekliptikebene und der Ebene der Planetenbahn, die «Neigung»  $i$ , dann ist die Lage der Bahnebene im Raume bestimmt.

Die Grösse und Gestalt der Ellipse wird, wie im Kapitel über das erste Keplersche Gesetz auseinandergesetzt, durch die beiden Angaben der Länge der grossen Halbachse  $a$  und der Exzentrizität  $e$  bestimmt.

Die Lage der Ellipse in ihrer Bahnebene wird durch die Richtung zum Perihel, dem sonnennächsten Punkt der Bahn, von der Sonne aus festgelegt. Die «Länge des Perihels»,  $\tilde{\omega}$ , wird folgendermassen gemessen: Die Länge des aufsteigenden Knotens, das heisst der Winkel  $\Upsilon\Omega$

in der Ekliptikebene wird in die Ebene der Planetenbahn übertragen, sodass  $\varpi' \Omega = \varpi \Omega$ . Nun wird die «Länge des Perihels», das heisst die Richtung, in der das Perihel von der Sonne aus liegt, von der Richtung dieses Punktes  $\varpi'$  aus gemessen. Man kann dies anders auch so ausdrücken: Die Länge des Perihels ist die Summe der Länge des Knotens  $\Omega$  und des Winkels zwischen Knoten und Perihel — beide Winkel in der Bewegungsrichtung des Planeten gerechnet. Der Punkt  $\varpi'$  bildet auch den Ausgangspunkt der Zählung für jede andere Länge in der Bahn.

Mit diesen fünf Grössen ist die Grösse der Ellipsenbahn und ihre Lage im Raum festgelegt. Wir brauchen noch eine sechste Angabe, die uns sagt, an welchem Punkte seiner Bahn sich der Planet in irgend einem Zeitpunkt befindet. Gewöhnlich gibt man die «Perihelzeit»  $T$  an, d.h. den Zeitpunkt, in dem der Planet durch das Perihel hindurchwandert. Umgekehrt kann man aber auch für jeden beliebigen Zeitpunkt die Länge des Planeten in seiner Bahn, d.h. den Winkel, den die Verbindungslinie von der Sonne zu ihm mit der Richtung nach  $\varpi'$  einschliesst, angeben.

Die sechs Bahnelemente, die die Bahn eines Planeten im Raume bestimmen und die uns erlauben, seinen Ort zu jedem beliebigen Zeitpunkt zu berechnen, seien nochmals in der in astronomischen Jahrbüchern üblichen Reihenfolge zusammengestellt:

$T$	Perihelzeit
$\tilde{\omega}$	Länge des Perihels
$\Omega$	Länge des aufsteigenden Knotens
$i$	Neigung
$e$	Exzentrizität der Ellipse
$a$	Mittlere Entfernung von der Sonne

## DIE ENTWICKLUNG DER WELTRAUMPROJEKTE

IM JAHRE 1964

Von H. BACHMANN, Zürich

Das zur Neige gehende Jahr brachte die Rekordzahl von bisher 74 Satellitenabschüssen, während die Zahl der Körper, die dadurch in Umlaufbahnen um die Erde gebracht wurden, ein Vielfaches davon beträgt. Trotzdem verlief das Jahr ohne viele spektakuläre Ereignisse;