

Zeitschrift: Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft
Herausgeber: Schweizerische Astronomische Gesellschaft
Band: 32 (1974)
Heft: 141

Artikel: Nicht-statische Weltmodelle
Autor: Wiedemann, Doris
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-899647>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$\cotg Az = \frac{\operatorname{tg} \delta \cos \varphi_0}{\sin s} - \frac{\sin \varphi_0}{\operatorname{tg} s} \quad (1)$$

Wir brauchen also eigentlich die Koordinaten des Beobachtungsorts schon jetzt, dabei wollen wir sie ja erst bestimmen! Da wir das Azimut jedoch nicht mit höchster Genauigkeit für die weitere Rechnung brauchen, kann man zum Beispiel die Maschine erst den falschen Ort A (φ_0/λ_0) berechnen lassen, damit man φ° in obige Formel einsetzen und aus λ_0 und dem Greenwicher Stundenwinkel einen brauchbaren Wert für den Ortsstundenwinkel s berechnen kann.

Mit dem rechten Winkel bei D, der Distanz d und dem Winkel τ liefert die aus der sphärischen Trigonometrie bekannte Beziehung zwischen vier Stücken:

$$\sin \tau \cotg 90^\circ = \cotg d \sin k - \cos k \cos \tau.$$

Da $\cotg 90^\circ = 0$ ist, erhält man hieraus:

$$\cotg d \sin k = \cos k \cos \tau,$$

Anschrift des Verfassers: MARTIN FRICK, Hochschule für Nautik, Bremen, B.R.D.

oder

$$\operatorname{tg} k = \cos \tau \operatorname{tg} d. \quad (2)$$

Das Rechenprogramm wird also ein erstes Durchlaufen des Standlinienprogramms vorsehen, wobei die gemessenen Zenitdistanzen eingegeben werden. Mit dem so erhaltenen falschen Ort A (den man übrigens durch den aus der Koppelrechnung bekannten Loggeort ersetzen kann, der ja auch nur einen Näherungsort darstellt) sowie den bekannten Werten für Distanz und Kurs wird nach (1) das Azimut des zuerst beobachteten Gestirns berechnet und daraus nach (2) die Korrektur k berechnet. Nachdem diese an z'_1 angebracht worden ist, wird mit der korrigierten Zenitdistanz z_1 und dem unveränderten Wert z_2 das Standlinienprogramm nochmals durchgespielt (Iteration), was den Ort C (φ/λ) ergibt, dessen Genauigkeit im wesentlichen nur noch von den Beobachtungsfehlern abhängt.

Nicht-statische Weltmodelle

VON DORIS WIEDEMANN, Basel

Die Erforschung des Universums durch Physiker und Astronomen ist wohl eines der grössten intellektuellen Abenteuer unseres Jahrhunderts. Zur Zeit da EINSTEIN seine Allgemeine Relativitätstheorie entwickelte, war der Glaube an die *Beständigkeit* des Universums noch ein fester Bestandteil der westlichen Philosophie. «Der Himmel dauert von Ewigkeit zu Ewigkeit» nahm man an, und es war zunächst auch kein Grund vorhanden, von dieser Vorstellung abzuweichen. Damals war nämlich die systematische Relativbewegung ferner Galaxien noch nicht entdeckt. EINSTEIN soll daher auch unglücklich darüber gewesen sein, dass die Grundgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie *kein* statisches Universum beschreiben. Sie machten vielmehr die phantastisch anmutende Voraussage einer *expandierenden* Welt. Die Situation änderte sich aber mit einem Schlag, als HUBBLE im Jahre 1929 die vorausgesagte Expansion des Alls nachwies. Diese HUBBLE'sche Entdeckung war zugleich eine erste Bestätigung der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Wie lässt sich nun die Expansion des Universums beschreiben? Die Allgemeine Relativitätstheorie liefert hierfür die folgende einfache Differentialgleichung:

$$\dot{R}^2 - \frac{\mu}{R} = -k.$$



Fig. 1: E. P. HUBBLE 1889–1953

Hierin sind μ und k Konstante und unter $R(t)$ wollen wir uns – zunächst noch etwas unpräzise – den «Welt-radius» vorstellen. Die Theorie zeigt weiter, dass k nur die Werte

$$k = 0, \pm 1$$

annehmen kann. Entsprechend diesen drei k -Werten, die ein Mass für die Raumkrümmung sind, ergeben sich auch drei verschiedene Weltmodelle, die hier skizziert werden sollen.

Betrachtet man die obige Differentialgleichung, so fällt die Ähnlichkeit mit einem einfachen Problem aus

der NEWTON'schen Mechanik auf. Der erste Term links hat nämlich den qualitativen Charakter einer kinetischen Energie, der zweite den qualitativen Charakter einer potentiellen Energie, und rechts steht eine Konstante, die uns an die Gesamtenergie erinnert. Aufgrund dieser Analogie könnte man sich fragen, ob sich diese Gleichung nicht auch im Rahmen

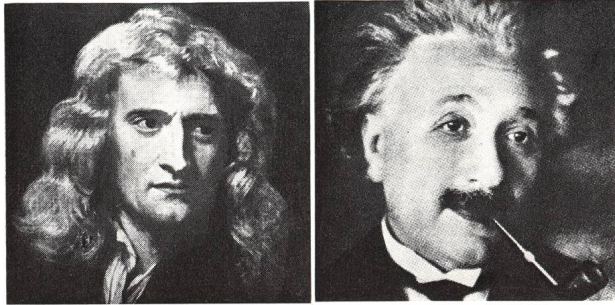


Fig. 2: I. NEWTON 1642-1726, A. EINSTEIN 1879-1955

der NEWTON'schen Mechanik verstehen lässt. In der Tat haben 1934 E. A. MILNE und W. H. MCCREA gezeigt, dass dies möglich ist. Sie gehen dabei von der NEWTON'schen Beschreibung einer homogenen Gaswolke aus, stecken aber noch die Annahme der Isotropie hinein, um dem kosmologischen Prinzip zu genügen. Diese NEWTON'sche Kosmologie ist mathematisch viel einfacher und führt in vielen Teilen zu im wesentlichen gleichen Ergebnissen wie die relativistische. Wir wollen daher *sie* zum Ausgangspunkt unserer Überlegungen machen.

Betrachten wir daher eine kugelförmige Gaswolke im euklidischen Raum, in der die Galaxien die Rolle der Massenpunkte spielen. Die Annahme der Isotropie bedeutet dann, dass ein im Zentrum sitzender Beobachter einen linearen Zusammenhang zwischen

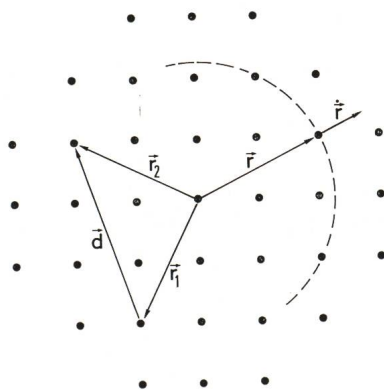


Fig. 3: NEWTON'sches Modell des Universums

Entfernung und Geschwindigkeit einer Galaxie, also ein HUBBLE-Gesetz, feststellt:

$$\dot{\mathbf{r}} = H(t) \mathbf{r}^*.$$

Die «HUBBLE-Konstante» H sei räumlich konstant, darf aber von der Zeit abhängen. Ebenso wird aber auch jeder andere nicht im Zentrum der Wolke sitzende Beobachter ein solches Gesetz finden. Es ist nämlich (vgl. Fig. 3):

$$\dot{\mathbf{d}} = \dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 = H(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = H\mathbf{d}.$$

Wenn wir uns die Wolke viel grösser vorstellen, als irgend eine Distanz, die bis heute gemessen wurde, so bietet das Weltall von jeder uns bekannten Galaxie aus den gleichen Anblick, wenn man von lokalen Unregelmässigkeiten absieht. In diesem Sinne soll unser Modell das kosmologische Prinzip erfüllen. Machen wir den Ansatz

$$\mathbf{r}(t) = R(t) \mathbf{r}_0 \text{ mit } \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, R(t_0) = 1,$$

so ist das HUBBLE-Gesetz erfüllt und es gilt

$$H = \frac{\dot{R}}{R}.$$

Das kann man durch Einsetzen sogleich verifizieren. Unter t_0 wollen wir uns den Zeitpunkt «heute» vorstellen.

Der Maßstabsfaktor $R(t)$ ist offenbar proportional zum Radius der Gaswolke. Versuchen wir jetzt das Verhalten von $R(t)$ aus dynamischen Überlegungen zu gewinnen! Zu diesem Zweck betrachten wir zunächst die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes im Abstand r vom Zentrum der Wolke $**$). Die Kraft auf diesen Massenpunkt rührt dann von der Masse innerhalb der Kugel vom Radius r her und das NEWTON'sche Gravitationsgesetz lautet

$$\ddot{r} = -\gamma \frac{(4\pi/3)\rho r^3}{r^2}. \quad (\text{Bewegungsgleichung})$$

γ bedeutet die Gravitationskonstante und ρ die Dichte der Gaswolke zum betrachteten Zeitpunkt. Ausserdem gilt die Erhaltung der Masse. Wir können sie bis auf einen Faktor $4\pi/3$ in folgender Form schreiben:

$$\rho r^3 = \rho_0 r_0^3 = \text{const.} \quad (\text{Kontinuitätsgleichung})$$

Aus der Bewegungsgleichung, der Kontinuitätsgleichung und mit $r = R r_0$ finden wir die gesuchte Differentialgleichung für den Maßstabsfaktor $R(t)$:

*) Fettgedruckte Buchstaben bedeuten Vektoren

***) Der Druck des Gases ist dabei vernachlässigt. Er spielt nur in der Geburtsphase des Universums eine gewisse Rolle.

$$\ddot{R} + \frac{(1/2)\mu}{R^2} = 0 \text{ mit } \mu = \gamma \frac{8\pi}{3} \rho_0.$$

Nach Multiplikation mit $2\dot{R}$ lässt sie sich leicht einmal integrieren. Man findet

$$\dot{R}^2 - \frac{\mu}{R} = -k. \quad (\text{Energieintegral})$$

k ist Integrationskonstante. Es besteht also so etwas wie ein Energieintegral für unseren Massenpunkt.

Unsere Überlegungen haben nun aber zu einer Gleichung geführt, wie sie auch in der Allgemeinen Relativitätstheorie auftritt. Dort hat k allerdings die unterschiedliche Bedeutung der Raumkrümmung und ist nur der Werte $0, \pm 1$ fähig. Bleiben wir noch bei diesem unrelativistischen Bild! Drei Fälle sind dann physikalisch zu unterscheiden: positive, negative und verschwindende Gesamtenergie, das heisst $k = 0, k \geq 0$. Wie verhält sich das Universum in diesen drei Fällen?

Beginnen wir mit

1) $k = 0$. Durch Trennung der Variablen lässt sich das Energieintegral leicht integrieren und man erhält:

$$R = \left(\frac{9\mu}{4}\right)^{1/3} t^{2/3}.$$

Die Anfangsbedingung ist dabei so gewählt, dass R und t gleichzeitig Null werden. In diesem Modell dehnt sich die Welt ewig aus, mit der Zeit jedoch immer langsamer, denn R ist proportional $1/t$. In der Relativitätstheorie ist dieses Modell unter dem Namen EINSTEIN-DE SITTER-Modell bekannt. $k = 0$ bedeutet dort verschwindende Raumkrümmung, also ein *euklidisches* Universum. Der zeitliche Verlauf von $R(t)$ ist in Figur 4 skizziert.

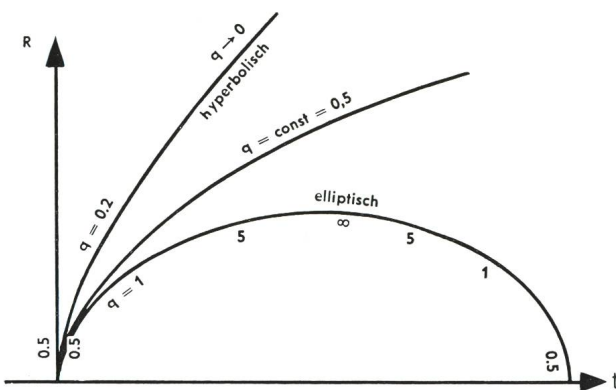


Fig. 4: Zeitlicher Verlauf von R und q für die Modelle $k = 0, \pm 1$

Gehen wir nun über zum zweiten Fall

2) $k > 0$. Eine qualitative Aussage über das Verhalten einer solchen Welt gewinnen wir, wenn wir das Energieintegral in der Form

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{\mu}{R} - k}$$

schreiben. Da nur reelle Werte für \dot{R} physikalisch sinnvoll sind, muss der Wurzelausdruck für alle Zeiten positiv sein, was bedeutet

$$R \leq \frac{\mu}{k} = R_{\text{max}}.$$

Der Radius dieser Welt wird also endlich bleiben. $k > 0$ bedeutet in die Sprache der Relativitätstheorie übersetzt, der Raum besitzt überall eine konstante positive Krümmung ($k = +1$). Man spricht von einem *elliptischen* Raum. Zur Bestimmung des zeitlichen Verlaufs von $R(t)$ ist es hier nicht zweckmässig, die Integration nach Trennung der Variablen auszuführen. Man kommt eleganter durch Einführung eines Parameters τ zum Ziel, indem man setzt:

$$R = R(t(\tau)), \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{R}{|k|}.$$

Bezeichnet man die Ableitung von R nach τ mit R' , so ergibt sich damit für das Energieintegral die sogenannte FRIEDMANN'sche Differentialgleichung:

$$R'^2 - \frac{\mu}{k}R + R^2 = 0.$$

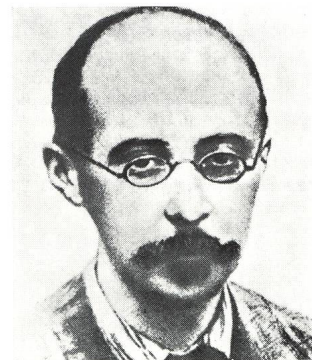


Fig. 5: A. A. FRIEDMANN 1888-1925

Sie ist nach dem russischen Mathematiker ALEXANDER ALEXANDROVITCH FRIEDMANN benannt. FRIEDMANN, der 1888 in Petersburg geboren wurde, hatte schon bevor HUBBLE seine Entdeckung gemacht hatte, eine ganze Reihe expandierender Weltmodelle aufgestellt, in denen jene von EINSTEIN und DE SITTER als Grenzfälle enthalten waren. Man kann leicht verifizieren, dass diese FRIEDMANN'sche Gleichung durch

$$R = \frac{\mu}{2k} (1 - \cos \tau)$$

gelöst wird. Setzt man dieses R in den Ausdruck für $dt/d\tau$ ein und integriert, so folgt

$$\sqrt{k}t = \frac{\mu}{2k} (\tau - \sin \tau).$$

Die Anfangsbedingung ist wiederum so gewählt, dass R , t und τ gleichzeitig verschwinden. Diese beiden letzten Beziehungen geben die Parameterdarstellung einer *Zykloide*. Sie ist die Bahnkurve eines Punktes auf einem Kreis, der auf einer Geraden rollt; ihr Bild ist in Figur 4 wiedergegeben. In unserem Fall besitzt der Kreis den Radius $\mu/2k$, und der Parameter τ hat die anschauliche Bedeutung des Rollwinkels. In der Kosmologie spricht man auch vom «Entwicklungswinkel» des Universums. Unser Modell liefert also ein oszillierendes Universum, dessen grösster Radius $R_{\max} = \mu/k$ wird. Nach einer endlichen Zeit wird die Welt in einer katastrophalen Implosion in sich zusammenstürzen und es bleibt offen, ob sich dann ein weiterer Zyklus anschliessen wird.

Es bleibt nun noch der dritte Fall

3) $k < 0$. Auch hier ergibt sich sehr einfach eine Parameterdarstellung. Das obige Resultat lässt sich verwenden, wenn man $k = -|k|$ setzt. Dann geht τ in $i\tau$, k in $i/|k|$ über, und wenn man noch den Zusammenhang zwischen den hyperbolischen und den trigonometrischen Funktionen benützt, ergibt sich:

$$R = \frac{\mu}{2|k|} (\cosh \tau - 1),$$

$$\sqrt{|k|} t = \frac{\mu}{2|k|} (\sinh \tau - \tau).$$

Dadurch wird wiederum ein ewig sich ausdehnendes Weltall beschrieben. Der Verlauf von $R(t)$ ist ebenfalls in Figur 4 dargestellt. Nach sehr langer Zeit wird die Expansionsgeschwindigkeit konstant werden, denn aus dem Verhalten der hyperbolischen Funktionen folgt, dass R für grosse Zeiten proportional t wird. Relativistisch bedeutet dieses Modell ein Universum, bei dem der Raum eine konstante negative Krümmung besitzt ($k = -1$). Man spricht auch von einem *hyperbolischen* Raum. Die hier auftretenden hyperbolischen Funktionen mögen diese Bezeichnung rechtfertigen.

Interessant ist, dass für die beiden Modelle $k \geq 0$ eine Reihenentwicklung

$$R = \left(\frac{9\mu}{4}\right)^{1/3} t^{2/3} + \dots \quad (t \text{ klein, } k \geq 0)$$

ergibt. Die beiden Modelle verhalten sich also für kleine Zeiten wie das Modell für $k = 0$, also wie ein euklidisches Universum. Man wird daher erwarten, dass es in einem frühen Stadium der Welt schwierig sein wird, das Vorzeichen der Raumkrümmung aus Beobachtungen zu ermitteln. Dies hat einen physikalischen Grund: Das Licht, welches uns ja die Information über die Struktur der Welt überbringt, ist dann zu kurze Distanzen unterwegs, um eine even-

tuell vorhandene Raumkrümmung genügend zu verspüren und uns mitteilen zu können. Damit werden wir fast automatisch auf die Frage gelenkt, ob es heute möglich ist, sich für eines der drei Modelle zu entscheiden und wie dieser Entscheid aufgrund von Beobachtungen gefällt werden könnte.

Die HUBBLE-Konstante allein reicht nicht aus zur Beantwortung dieser Frage. Neue Information erhalten wir, wenn wir berücksichtigen, dass die Expansion dieser drei Weltmodelle unterschiedlich stark gebremst ist. Das Vorhandensein einer Bremsung können wir im NEWTON'schen Modell einfach verstehen, da die Gravitationskräfte der Expansion dauernd entgegenwirken. Man sieht übrigens auch aus der Bewegungsgleichung, dass \ddot{R} immer negativ ist. Diese Bremsung wird erfasst durch den sogenannten *Bremsparameter* q :

$$q = -\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} > 0.$$

q lässt sich auch in einer etwas anderen Form darstellen, wenn man μ/R aus dem Energieintegral und der Bewegungsgleichung eliminiert:

$$q = \frac{1}{2} + \frac{k}{2\dot{R}^2}.$$

Hieraus zeigt sich, dass sich unsere drei Modelle auch durch verschiedene q -Werte unterscheiden lassen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} q &> \frac{1}{2} \quad \text{für } k > 0, \\ q &= \frac{1}{2} \quad \text{für } k = 0, \\ q &< \frac{1}{2} \quad \text{für } k < 0. \end{aligned}$$

Auf den ersten Blick scheint dadurch für die Entscheidung über das tatsächlich realisierte Weltmodell nichts gewonnen zu sein. Umso überraschender klingt es, dass damit ein prinzipieller Weg gefunden ist, über die Dichte im Universum auf die Raumkrümmung zu schliessen. Man muss zu diesem Zweck q mit Hilfe der Bewegungsgleichung so darstellen, dass es die Massendichte enthält. Dann ist, wenn wir uns an die Bedeutung für μ erinnern,

$$q = \frac{(1/2)\mu}{R\dot{R}^2} = \frac{(4\pi/3)\gamma\varrho_0}{R\dot{R}^2}.$$

Beziehen wir alles auf den Zeitpunkt $t_0 = \text{«heute»}$, so ist $R(t_0) = 1$ und $\dot{R}(t_0) = H_0$ und das Kriterium lautet

$$q_0 = \frac{(4\pi/3)\gamma\varrho_0}{H_0^2} \stackrel{?}{\geq} \frac{1}{2}.$$

Es lässt sich nun noch nach der Dichte auflösen:

$$\rho_0 \begin{cases} > \frac{3 H_0^2}{8\pi\gamma} \\ < \frac{3 H_0^2}{8\pi\gamma} \end{cases} .$$

Durch unabhängige Messung der beiden Grössen ρ_0 und H_0 sollte sich also entscheiden lassen, welches Vorzeichen gilt, mit anderen Worten, ob der Raum positiv oder negativ gekrümmt ist oder ob er euklidisch ist. Wenn wir als heutige Werte für $\rho_0 = 10^{-30} \text{g/cm}^3$ und für $H_0 = 10^{-10} \text{Jahre}^{-1}$ nehmen, so würden diese Werte für das $<$ -Zeichen, also ein hyperbolisches Universum sprechen. Leider sind die Messungen aber noch zu ungenau, um hier mit einiger Sicherheit eine Entscheidung treffen zu können.

Es bietet sich aber noch ein anderer Weg. Er hängt mit einem Effekt zusammen, der sich erst bei den entferntesten Nebeln bemerkbar macht, nämlich mit der Laufzeit des Lichts. Wir sehen ja jeden Nebel in dem Zustand, den er bei der Aussendung des Lichts hatte, welches uns heute erreicht. Je weiter wir also in den Raum hinausblicken, umso weiter blicken wir in die Vergangenheit zurück. Ist die Expansion gebremst, so müssen die beobachteten Geschwindigkeiten der fernen Galaxien grösser sein als ihre heutigen. Das bedeutet, dass die beobachteten Geschwindigkeiten der fernsten Objekte etwas grösser sein sollten, als es dem HUBBLE-Gesetz entspricht. Eine relativistische Überlegung ergibt eine Korrektur des HUBBLE-Gesetzes, welche den Bremsparameter q enthält. Man findet für die Rotverschiebung in Abhängigkeit der Distanz d

$$c \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = H_0 d + \frac{1}{2} (1 + q_0) (H_0 d)^2 + \dots$$

In Figur 6 ist $z = c(\Delta\lambda/\lambda)$ für ein festes H_0 und verschiedene q_0 -Werte dargestellt. Die Punkte stellen Beobachtungen von SANDAGE dar; anstelle der Di-

stanz ist in der Figur die scheinbare Helligkeit angegeben. Auch hier sprechen die Beobachtungen nicht eindeutig zugunsten des einen oder anderen Modells. Dass wir so in Entscheidungsschwierigkeiten stecken, deutet eben doch darauf hin, dass unsere Welt soweit wir sie kennen, noch zu jung ist, uns ihre Struktur zu verraten.

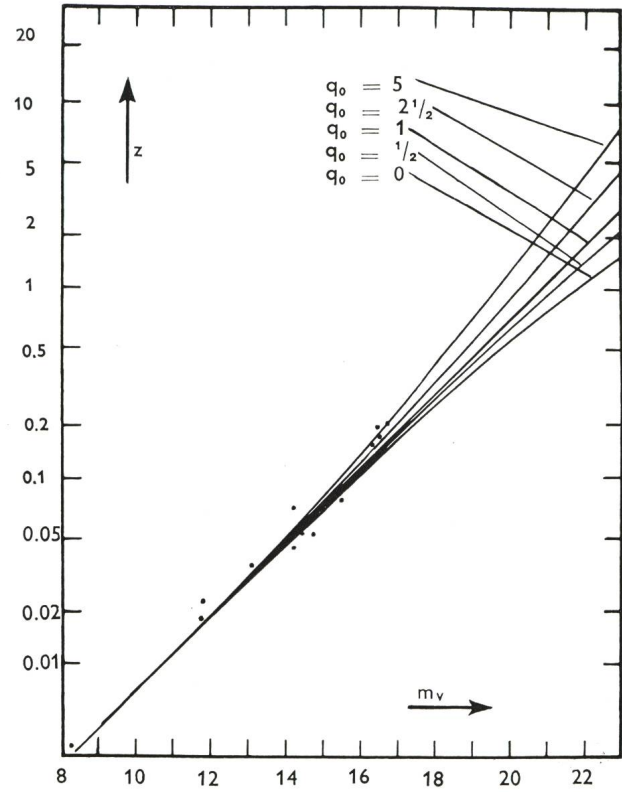


Fig. 6: Theoretische und beobachtete Rotverschiebung in Funktion der scheinbaren Helligkeit nach A. SANDAGE

Literatur:

- HECKMANN, O. und SCHÜCKING, E. Newton'sche und Einstein'sche Kosmologie. Handbuch der Physik, Band: Astrophysik IV, S. 492-498, Berlin-Göttingen 1961.
- MEYER'S Handbuch über das Weltall, Mannheim 1972
- C. W. MISNER, KIP S. THORNE und J. A. WHEELER, Gravitation, San Francisco 1973.
- SCIAMA, D. W. Modern Cosmology, Cambridge 1971.

Adresse der Autorin: DORIS WIEDEMANN, Astronomisches Institut der Universität Basel, Venusstrasse 7, CH-4102 Binningen.

Nachtrag der Redaktion

Beim Titelbild von ORION 139, das Farbaufnahmen der Planeten Erde, Mars, Jupiter und Saturn zeigt, ist versehentlich der Copyright-Vermerk für die Aufnahmen der drei letztgenannten Planeten unterblieben, was hiermit nachgeholt sei. Er lautet:

«Copyright by the California Institute of Technology and Carnegie Institution of Washington».