**Zeitschrift:** Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft
**Herausgeber:** Schweizerische Astronomische Gesellschaft
**Band:** 36 (1978)
**Heft:** 165

**Artikel:** Zur numerischen Berechnung der Normalrefraktion
**Autor:** Beuchat, H.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-899481

wicklung. Dadurch wird die Trennung der Sterne verbreitert. Der KOSTINSKY-Effekt kann auch zur Verstärkung von feinen Absorptionslinien in Spektren führen. Deshalb braucht es sehr umfangreiche Eichungen, um Spektren photometrisch genau zu vermessen.

### *5. Hypersensibilisierung*

Unter Hypersensibilisierung versteht man die Empfindlichkeitssteigerung von Emulsionen durch Behandlung mit verschiedenen Chemikalien vor der Belichtung. Sie ist zu unterscheiden vom Baking-Prozess, wo Platten in einer Stickstoffatmosphäre für einige Stunden auf 65° C erwärmt werden. In beiden Fällen steigt die Empfindlichkeit und auch der Grauschleier. Für den Amateur kommt am ehesten die Hypersensibilisierung von rotempfindlichen Filmen in Betracht. Im Orion sind verschiedene Rezepte dafür angegeben worden[7]). Am einfachsten ist die Behandlung der spektroskopischen Emulsionen Kodak 103a-E und 103a-F mit destilliertem Wasser, das einige $cm^3$ Kodak Photo-Flo-Lösung enthält. Die Filme werden für 2 Minuten in der 5° C kalten Lösung gebadet und anschliessend in einem Strom möglichst kalter Luft getrocknet. Die Filme sind nach der Behandlung im Tiefkühlschrank bis zu 5 Wochen haltbar. Verglichen mit der Haltbarkeit von infrarotempfindlichem Material, das nach der Hypersensibilisierung nur noch wenige Tage aufbewahrt werden kann, ist das sehr praktisch. Für eine ausführliche Beschreibung der verschiedenen Methoden und der erzielbaren Ergebnisse sei auf die Literatur verweisen[8,9,10]).

*Literatur:*


1) E. Alt, E. Brodkorb, R. Mehrmann, K. Rihm, Weitere Farbaufnahmen von Objekten des Südhimmels, ORION 33. Jg. (1975) No. 151, Seite 201 ff.
2) E. Alt, E. Brodkorb, R. Mehrmann, K. Rihm, Astrofotografie am Südhimmel, ORION 33. Jg. (1975) No. 150, Seite 152 ff.
3) Max Lammerer, ORION 32. Jg. (1974) No. 143, Titelbild Seite 141.
4) E. Alt, ORION 32. Jg. (1974) No. 140, Titelbild Seite 1.
5) A. Heck, Une heureuse combinaison de filtre et d'émulsion astronomiques, ORION 34. Jg. (1976) No. 153, Seite 32 ff.
6) Dinsmore Alter, Lunar Atlas, Dover Publications, INC. New York 1968, Seite 122 und Seite 306.
7) E. Wiedemann, Empfindlichkeitssteigerungen bei Astro-Emulsionen, ORION 33. Jg. (1975) No. 150, Seite 147.
8) Kodak Plates and Films for Scientific Photography, Kodak Publication No. P-315, First Edition 1973, Seite 20.
9) Morrison, D., and Greenberg, E. H., 1968. Hypersensitization of infrared-sensitive photographic emulsions. Astronomical Journal, 73, 518—21.
10) Spinrad, H., and Wilder, J., 1972. Waterhypersensitization of Kodak special plates, type 098-02. AAS Photo-Bulletin, Nr. 1, 14.
11) Die Kurven entstammen der Publikation 8) Seite 15d.
12) Die Kurve ist Publikation 8) Seite 19 d entnommen.
13) Die Kurven entstammen der Publikation 8) Seite 16d und Seite 17d.
14) Die Zeichnung wurde nach einem Diagramm in Publikation 8) Seite 16 angefertigt.



*Adresse des Autors:*
Thomas Spahni, Alte Römerstrasse 23, CH-8404 Winterthur.


# Zur numerischen Berechnung der Normalrefraktion


von H. BEUCHAT


Als Normalrefraktion wird der von der scheinbaren Zenitdistanz z abhängige Winkel r bezeichnet, um den ein Lichtstrahl in der Normalatmosphäre der Erde von der wahren Zenitdistanz $\zeta$ abgelenkt wird.

Das Aufkommen der (programmierbaren) Taschenrechner mit eingebauten mathematischen Funktionen (sin, tan, log usw.) hat den rechnenden Astro-Amateuren dadurch grosse Vorteile gebracht, dass bei Berechnungen die Verwendung von Tabellen dieser Funktionen entfällt.

Hingegen gibt es in der Astronomie manchmal benutzte empirische Standardfunktionen, welche tabelliert vorliegen. Es wäre dabei praktisch, Formeln für solche Funktionen anzugeben, welche an Stelle der Tabelle verwendet würden.

In dieser Form liegt eine durch R. Radau[1]) veröffentlichte Tabelle der Normalrefraktion vor.

Eine ältere Tafel der Refraktion ist etwa diejenige von F. W. Bessel[2]). Die Normalrefraktion spielt eine Rolle bei der Reduktion von beobachteten Zenitdistanzen oder Höhen über dem Horizont. Um bei Zenitdistanzen von ca. 90° die Auf- und Untergangszeiten von Gestirnen unter Berücksichtigung des topographisch gegebenen Horizontes zu bestimmen, benötigt man ebenfalls die Kenntnis der Refraktion, wenn die Zeiten einigermassen genau sein sollten. Die Umkehrfunktion, nämlich den Betrag der Refraktion als Funktion der wahren Zenitdistanz, benötigt man, wenn beispielsweise vorausgerechnete Örter eines Erdsatelliten am Himmel genauer korrigiert sein sollen.

### *Formeln zur Berechnung der Refraktion*

Es lässt sich zeigen, dass bei nicht zu grossen Zenitdistanzen die Refraktion proportional dem Tangens der scheinbaren Zenitdistanz ist

$$r = \alpha \tan z \tag{1}$$

$\alpha$ ist dabei die Refraktionskonstante.

Bei grösseren und sogar schon bei mässigen Zenitdistanzen weichen die mit dieser Formel berechneten Werte erheblich von den tabellierten ab. Daher besteht die Notwendigkeit, eine diesen Bereich grosser Zenitdistanzen abdeckende mathematische Formel anzugeben.

Hierzu hatte bereits Th. Simpson[3]) die folgende einfach gebaute Näherungsformel angegeben

$$r = \alpha \tan (z - \beta r) \tag{2}$$

Für den Koeffizienten $\beta$ schlug J. Bradley[4]) den Wert 3 vor. In Formel (2) geht die Refraktion r sowohl links wie rechts vom Gleichheitszeichen ein. Dies lädt geradezu ein, die Berechnung der Refraktion auf iterativem Wege zu versuchen, das heisst, etwa von $r_o = 0$ ausgehend in die rechte Seite der Formel einzusetzen bis der mit der

Formel erhaltene jeweilige Wert $r_{i+1}$ sich gegenüber dem vorhergehenden $r_i$ nicht mehr ändert.

Mit dieser Formel und diesem Ansatz entstehen aber bei Zenitdistanzen um 90° nach wie vor Schwierigkeiten wegen des Verlaufs des Tangens in diesem Argumentbereich.

Die auf die Formel (2) angewendete Iterationsvorschrift führt sogar zu Divergenz bei Zenitdistanzen um 90°, liefert also keine Werte der Refraktion.

Ausserdem ist die Formel mit dem Wert $\beta = 3$ gar nicht so genau, wie ein Blick in nachstehender Tabelle überzeugt. Diese wurde mit Refraktionskonstante $\alpha = 60.154''$, die dem zitierten Tabellenwerk[1]) entspricht berechnet.

Tabelle 1

| z | r(Taf.) | r(1) | r(2) | Anz. It. |
|---|---|---|---|---|
| 45° | 1'00.04" | 1'00.15" | 1'00.05" | 3 |
| 50° | 1'11.51" | 1'11.69" | 1'11.54" | 3 |
| 55° | 1'25.64" | 1'25.91" | 1'25.68" | 3 |
| 60° | 1'43.76" | 1'44.19" | 1'43.83" | 3 |
| 65° | 2'08.25" | 2'09.00" | 2'08.37" | 4 |
| 70° | 2'43.78" | 2'45.27" | 2'44.05" | 5 |
| 75° | 3'41.00" | 3'44.50" | 3'41.64" | 5 |
| 77° | 4'15.23" | 4'20.56" | 4'16.20" | 5 |
| 80° | 5'29.8 " | 5'41.2 " | 5'31.8 " | 6 |
| 85° | 10'13.5 " | 11'27.6 " | 10'22.6 " | 8 |
| 86° | 12'11.8 " | 14'20.2 " | 12'24.3 " | 9 |
| 87° | 14'58.8 " | 19'07.8 " | 15'14.8 " | 11 |
| 88° | 19'06.6 " | 28'42.6 " | 19'20.5 " | 14 |
| 89° | 25'37.0 " | 57'26.2 " | 25'19.8 " | 26 |
| 90° | 36'36.0 " | — | — | |
| 91° | 56'27.5 " | — | — | |

Das Ziel der Bemühungen soll somit sein, einfach gebaute Formeln anzugeben, um die Normalfraktion r insbesondere des Tabellenwerks[1]) bei gegebener scheinbarer Zenitdistanz z oder bei gegebener wahrer Zenitdistanz $\zeta = z + r$ auf einige Zehntel Bogensekunden genau darzustellen bis hinunter zur Zenitdistanz $z = 91°$, wo die Tabelle 1 nicht ausreicht, muss eben versucht werden, die Algorithmus so zu gestalten, dass in jedem Falle dessen Konvergenz sichersteht und zugleich immer rasch ist, wobei auch der Fall $z \geqslant 90°$ bzw. $\zeta \geqslant 90°$ zu keinerlei numerischen Schwierigkeiten führen soll, indem der iterative Algorithmus mit einer guten Einstiegsfunktion begonnen wird.

*Zur Formelgenauigkeit*

Da eine Konstante $\beta = 3$ zur guten Darstellung der Tabelle 1 nicht ausreicht, muss eben versucht werden, die Formel (2) auszubauen, indem zuerst

$$r = \alpha \tan(z - f) \qquad (3)$$

gesetzt wird, und anschliessend

$$f(z) = r(z)\beta(z) \qquad (4)$$

mit variablem $\beta$.

Führt man dies aus, so erhält man, ausgehend von Tabellenwerk [1]) die folgende Zusammenstellung

Tabelle 2

| z | r | f | β |
|---|---|---|---|
| 65° | 2'08.25" | 0.128317° | 3.60187 |
| 70° | 2'43.78" | 0.167546° | 3.68277 |
| 75° | 3'41.00" | 0.226465° | 3.68902 |
| 77° | 4'15.23" | 0.261764° | 3.69216 |
| 80° | 5'29.8 " | 0.336857° | 3.67703 |
| 85° | 10'13.5 " | 0.599981° | 3.52067 |
| 86° | 12'11.8 " | 0.699151° | 3.43939 |
| 87° | 14'58.8 " | 0.828925° | 3.32013 |
| 88° | 19'06.6 " | 1.003151° | 3.14961 |
| 89° | 25'37.0 " | 1.241257° | 2.90731 |
| 90° | 36'36.0 " | 1.569084° | 2.57227 |
| 90° 30' | 45'00.0 " | 1.776296° | 2.36840 |
| 91° | 56'27.5 " | 2.017331° | 2.14388 |

Es stellt sich heraus, dass im Bereich grosser Zenitdistanzen eine gute Näherung des Verlaufs der Funktion $\beta(z)$ erzielt wird, wenn man setzt

$$\beta = A + B\,F(z) \qquad (5)$$

A und B sind zwei empirisch zu bestimmende Konstanten. Die neue Funktion F (z) soll gegen 1 streben für kleinere Zenitdistanzen. Im gesamten Argumentbereich von z soll sie stets positiv kleiner als 1 sein. Im Zusammenhang mit der Formel (5) zeigt es sich, dass folgender Ansatz für F (z) befriedigende Ergebnisse liefert

$$F(z) = e^{-(z/z_o)^m} \qquad (6)$$

Auch die Konstanten $z_o$ und $m$ sind empirisch zu bestimmen. Die insgesamt eingeführten vier Konstanten A, B, $z_o$, $m$ werden etwa dadurch festgelegt, dass die Darstellung der Normalrefraktion für die Argumente $z = 91, 90, 89, 88$ exakt sein soll.

In diesem Falle sind diese Konstanten einer iterativen Berechnung zugänglich, die von näherungsweise bekannten Werten für $z_o$ und $m$ ausgeht. Die Formel hierzu sind die folgenden

$$F_1 = F(z_1) \qquad F_2 = F(z_2) \qquad (7.1)$$

F (z) gemäss Formel (6)

$$B = \frac{\beta_2 - \beta_1}{F_2 - F_1} \qquad A = \beta_1 - F_1 B \qquad (7.2)$$

$$F_3 = \frac{\beta_3 - A}{B} \qquad F_4 = \frac{\beta_4 - A}{B} \qquad (7.3)$$

$$m = \frac{\log(-\ln F_4) - \log(-\ln F_3)}{\log z_4 - \log z_3} \qquad (7.4)$$

$$\log z_o = \log z_3 - \frac{1}{m} \log(-\ln F_3) \qquad (7.5)$$

Die obigen Formeln sind so lange zu wiederholen (iterieren), bis keine Änderung in den Werten der $z_o$, $m$, A, B auftritt.

*Zur Sicherstellung der Konvergenz*
Sind neben der Refraktionskonstanten $\alpha$ die Werte der A, B, $z_o$, m bekannt, so führt folgender Algorithmus (Kette von Rechenoperationen) zur Berechnung von r.

Bei gegebenem z und einer ersten Nährung $r_o$ berechnet man F (z) und $\beta$ (z) nach den Formeln (6) und (5), und sodann jeweils

$$f_o = \beta r_o \qquad r_1 = \alpha \tan(z - f_o)$$
$$f_1 = \beta r_1 \qquad r_2 = \alpha \tan(z - f_1) \text{ usw.} \tag{8}$$

bis etwa $| r_{i+1} - r_i | < 10^{-6}$ wird.

Die numerische Erprobung dieses Algorithmus (8) zeigt aber, dass für Werte von z um die 90° auch jetzt keine Konvergenz der $r_i$ gegen einen Grenzwert erfolgt, indem die Differenzen aufeinanderfolgender r grösser werden statt kleiner.

Das Verfahren, um auch in diesen Fällen Konvergenz zu erzwingen besteht darin, bei der Berechnung von $r_{i+1}$ nur einen Bruchteil von $\alpha \tan(z - f_i)$ mitzunehmen, also den Algorithmus (8) abzuändern in

$$f_i = \beta r_i \qquad r_i' = \alpha \tan(z - f_i)$$
$$r_{i+1} = r_i + H(r_i' - r_i) \tag{9}$$

Mit einem geeigneten Bruchteil, der zwischen 0 und 1 liegt, zeigt es sich, dass dann in jedem Falle Konvergenz der Refraktion gegen einen Grenzwert erzielt wird. Führt man jedoch einen festen Bruchteil H für alle Berechnungen ein, so zeigt sich, dass man dabei die Schnelligkeit der Konvergenz für kleine Zenitdistanzen erheblich verschlechtert, was als Nachteil des konvergenzerzwingenden Verfahrens in obiger Form zu werten ist.

Das Ziel der nun folgenden Bemühungen wird es sein, das Verfahren zur Konvergenzerzwingung derart abzuändern, dass im gesamten Argumentbereich der Zenitdistanzen z schnelle Konvergenz erreicht wird.

*Zur Beschleunigung der Konvergenz*
Ansatzpunkt ist die Tatsache, dass für kleine z aus der Tabelle 1 ersichtlich ist, dass der normale Algorithmus (8), der einem Faktor H = 1 entspricht, mit 3 bis 4 Iterationen konvergiert, also relativ schnell ist. Für grosse z kann man jeweils den besten Bruchteil H ermitteln, der zur schnellsten Konvergenz führt.

Nun hat genau der früher mit Formel (6) eingeführte Faktor F(z) die Eigenschaft, für kleine z gegen 1 zu streben und für grosse z einen Wert zwischen 0 und 1 anzunehmen. Setzt man einfach H = F(z), so erzwingt man im kritischen Bereich zwar die Konvergenz, doch bleibt sie dabei so langsam, dass man sehr lange Rechenzeiten in Kauf nehmen müsste. Stellt man die besten Bruchteile H(z) der Funktion F(z) gegenüber, so findet man, dass der folgende Ansatz im kritischen Bereich zu einer erheblichen Verbesserung der Konvergenz führt

$$H(z) = [F(z)]^L \tag{10}$$

Der Faktor, um welchen die Differenz der Refraktionswerte von Iteration zu Iteration zurückgeht, ist damit ständig grösser als 5, so dass bei Vorliegen einer guten Ausgangsnäherung die Genauigkeit von $10^{-6}$ Grad nach 5—6 Iterationen mit dem Algorithmus (9) erreicht wird.

*Zur Ermittlung der Einstiegsfunktion*
Als Einstiegsfunktion wird hier die Ausgangsnäherung bezeichnet, mit welcher der Algorithmus (9) begonnen wird.

Aus der Tabelle 2 ersieht man, dass f(z) für zunehmende z monoton zunimmt, wogegen F(z) monoton abnimmt.

Will man somit auf bereits ermittelte Funktionen von z zurückgreifen, um eine Einstiegsfunktion anzugeben, empfiehlt es sich, den Wert $f_0(z)$ etwa anzusetzen als

$$f_0(z) = K(1 - F^k) \tag{11}$$

Als Einstiegsfunktion $r_0(z)$ hat man dann einfach zu definieren

$$r_0(z) = \alpha \tan(z - f_0) \tag{12}$$

Die beiden neu eingeführten Konstanten K und k sind wie die andern in den Formeln (5)—(10) eingeführten empirisch festzulegen.

Es wäre denkbar, für z = 91 und 90° den Wert von f jeweils genau darzustellen, so dass damit die Refraktion durch $r_0(z)$ für diese Argumente genau dargestellt wäre.

Eine weitere brauchbare Vorschrift wäre die, nur den äussersten Wert der Refraktionstafel exakt darzustellen, und dabei denjenigen Exponenten k zu ermitteln, für den die folgende, weitere Wertpaare $z_i$ $r_i$ berücksichtigende Summe zu einem Minimum wird

$$\sigma_N = \sum_{i=2}^{N} (\log r_i - \log r_0[z_i])^2$$

Grosse Genauigkeit ist für die Einstiegsfunktion ohnehin von untergeordneter Bedeutung; wesentlich ist nur dabei, dass ein Iterieren bei Verwendung des Algorithmus (9) nach Möglichkeit abgekürzt wird.

*Die «Umkehrfunktion»*
Bei den üblichen mathematischen Funktionen wird diese kurz gesagt darin gesehen, dass sie, bei Vorgabe des Funktionswertes, der zu einem (zulässigen) Argument gehört, wieder dieses Argument als Hauptwert liefert; in diesem Sinne ist etwa $\sqrt{x}$ die Umkehrfunktion von $x^2$, wenn positive x zugelassen sind.

Die Ermittlung der Normalrefraktion r(z) läuft im wesentlichen darauf hinaus, die wahre Zenitdistanz $\zeta$ bei gegebener scheinbarer Zenitdistanz z zu bestimmen. Die «Umkehrfunktion» ist in diesem Sinne eine Funktion, welche bei vorgegebener wahrer Zenitdistanz $\zeta$ gestattet, die scheinbare Zenitdistanz z zu ermitteln. Genauso wie man aus $\zeta = z + r(z)$ die wahre Zenitdistanz ermittelt, kann man aus $z = \zeta - r(\zeta)$ die scheinbare Zenitdistanz erhalten, wenn man, wie im Falle von r(z) eine «Umkehrfunktion» $r(\zeta)$ bereitstellt.

Nun kann die Formel (2) wegen $z = \zeta - r$ geschrieben werden

$$r = \alpha \tan(\zeta - \beta r - r) = \alpha \tan(\zeta - \gamma r) \tag{14}$$

Dieser Aufbau der Formel (14) legt nahe, die «Umkehrfunktion» analog anzusetzen wie die Funktion der Normalrefraktion bei gegebener scheinbarer Zenitdistanz. Man setzt daher

$$\gamma(\zeta) = C + D\, G(\zeta) \tag{15}$$

$$G(\zeta) = e^{-(\zeta/\zeta_0)\mu} \tag{16}$$

und als konvergenzerzeugender Faktor H

$$H(\zeta) = [G(\zeta)[^{\lambda} \quad (17)$$

Die Einstiegsfunktion wird hier angesetzt als

$$g_0(\zeta) = K(1—G^{\varkappa}) \quad (18)$$

$$r_0(\zeta) = \alpha \tan(\zeta—g_0) \quad (19)$$

*Ergebnisse*

A. Berechnung der Refraktion bei gegebener scheinbarer Zenitdistanz z

| | |
|---|---|
| $F$ | $= e^{—(z/z_0)^m}$ |
| $\beta$ | $= A + BF$ |
| $z_0$ | $= 91.85400°$ |
| $m$ | $= 41.38486$ |
| $A$ | $= 0.631076$ |
| $B$ | $= 2.984247$ |
| $f_0$ | $= K(1—F^k)$ |
| $r_0$ | $= \alpha \tan(z—f_0)$ |
| $\alpha$ | $= 60.154''$ |
| $K$ | $= 2.7150°$ |
| $k$ | $= 2.0$ |
| $r_{i+1}$ | $= r_i + F^L(r_i'—r_i)$ |
| $r_i'$ | $= \alpha \tan(z—\beta r_i)$ $i = 0,1,\ldots$ |
| | so lange bis $\mid r_{i+1}—r_i \mid < 10^{-6}$ (Gradmass) wird |
| $L$ | $= 1.5$ |

B. Berechnung der Refraktion bei gegebener wahrer Zenitdistanz $\zeta$

| | |
|---|---|
| $G$ | $= e^{—(\zeta/\zeta_0)^{\mu}}$ |
| $\gamma$ | $= C + DG$ |
| $\zeta_0$ | $= 91.47948°$ |
| $\mu$ | $= 37.85656$ |
| $C$ | $= 2.505161$ |
| $D$ | $= 2.141612$ |
| $g_0$ | $= K(1—G^{\varkappa})$ |
| $r_0$ | $= \alpha \tan(\zeta—g_0)$ |
| $\alpha$ | $= 60.154''$ |
| $K$ | $= 3.8971°$ |
| $\varkappa$ | $= 1/.85$ |
| $r_{i+1}$ | $= r_i + G^{\lambda}(r_i'—r_i)$ |
| $r_i'$ | $= \alpha \tan(\zeta—\gamma r_i)$ $i = 0,1,\ldots$ |
| | so lange bis $\mid r_{i+1}—r_i \mid < 10^{-6}$ (Gradmass) wird |
| $\lambda$ | $= 1.0$ |

*Darstellung der Normalrefraktion der Tabelle*[1])

Obige Formeln und Zahlenwerte der eingeführten Konstanten ergeben gegenüber dem Tabellenwerk[1]) folgende Abweichungen $\Delta r$ in Bogensekunden; in der Tabelle 3 ist die Differenz Tabelle minus Formelwert angeführt.

Tabelle 3

| $z = \zeta—r$ | $\Delta r$ Formeln A | $\Delta r$ Formeln B |
|---|---|---|
| 91° | 0 | 0 |
| 90° 30' | +.2 | —.3 |
| 90° | 0 | 0 |
| 89° 30' | —.1 | 0 |
| 89° | 0 | 0 |
| 88° 30' | 0 | 0 |
| 88° | 0 | 0 |
| 87° 30' | —.1 | 0 |
| 87° | —.2 | —.1 |
| 86° 30' | —.3 | —.1 |
| 86° | —.3 | —.1 |
| 85° 30' | —.3 | —.2 |
| 85° | —.4 | —.2 |
| 80° | —.2 | —.1 |
| 77° | —.11 | —.07 |
| 75° | —.07 | —.04 |
| 70° | —.03 | —.01 |
| 65° | 0 | +.01 |

Im restlichen Tabellenwerk[1]) weicht die formelmässige Darstellung höchstens um .01'' von dem Tafelwert ab.

*Literaturnachweis:*


1) R. Radau, Annales de l'Observatoire de Paris, Vol. XIX, Mémoires (1889); abgeändert gemäss Connaissances des Temps pour 1932, Paris (1930), Ed. Gauthiers-Villars, p. 682, 584, 585.
2) Landolt-Börnstein, Zahlenwerte und Funktionen, Bd. III Astronomie und Geophysik (1952), S. 30, 31.
3) Th. Simpson, Mathematical dissertations, London (1743).
4) J. Bradley, Astronomical Observations made at the Royal Observatory at Greenwich, Oxford (1798).
5) H. Wolf, Handbuch der Astronomie (1877), Bd. II, S. 176, 179.


NB.: Ein Programmpaket zur Durchführung der rechnerischen Arbeiten liegt beim Verfasser vor. Benötigt wird ein Taschenrechner Typ TI-59 oder TI-58.


*Adresse des Verfassers:*
Dr. H. J. Beuchat, Neufeldstrasse 134, CH-3012 Bern.