

Zeitschrift: Pestalozzi-Kalender
Herausgeber: Pro Juventute
Band: 16 (1923)

Rubrik: Geometrie

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

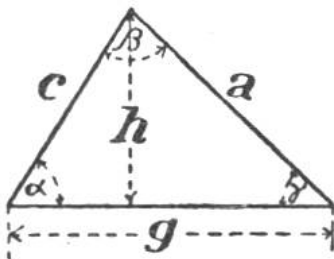
Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Geometrie

Tafel I

Formeln zur Inhaltsberechnung von Flächen u. Körpern

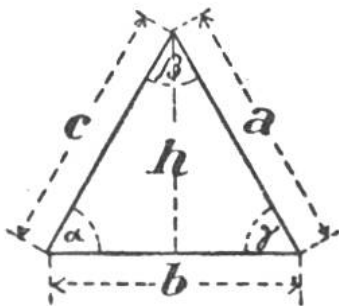


Dreieck:

Grundlinie = g , Höhe = h , Fläche = F ,

$$F = \frac{g \cdot h}{2}; \quad g = \frac{2F}{h}; \quad h = \frac{2F}{g};$$

$$\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta + \sphericalangle \gamma = 180^\circ = 2 \text{ rechte} \sphericalangle$$



Gleichseitiges Dreieck:

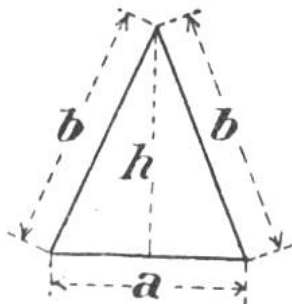
Seiten = $a = b = c$, $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta = \sphericalangle \gamma = 60^\circ$,

$$F = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 0,433 a^2; \quad \sqrt{3} = 1,73205.$$

genauer $0,4330125 \cdot a^2$

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}};$$

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{3} = a \cdot 0,866025.$$

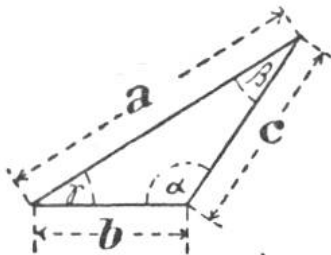


Gleichschenkliges Dreieck:

Grundlinie = a , gleiche Seiten = b

$$F = \frac{a}{4} \sqrt{(2b+a) \cdot (2b-a)} = \frac{a}{2} \sqrt{\left(b + \frac{a}{2}\right) \cdot \left(b - \frac{a}{2}\right)}$$

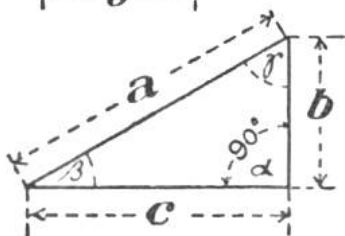
$$h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}; \quad h = \sqrt{\left(b + \frac{a}{2}\right) \cdot \left(b - \frac{a}{2}\right)};$$



Ungleichseitiges Dreieck:

Seiten a, b und c , $s = \frac{a+b+c}{2}$

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

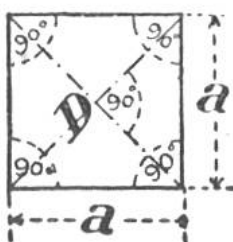


Rechtwinkliges Dreieck: $\sphericalangle a = 90^\circ$

Hypothense = a , Katheten = b, c ,

$$F = \frac{b \cdot c}{2}; \quad a^2 = b^2 + c^2; \quad a = \sqrt{b^2 + c^2};$$

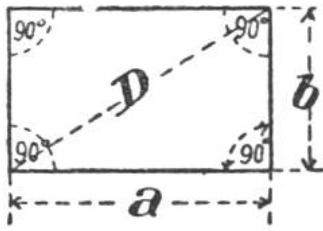
$$b = \sqrt{a^2 - c^2}; \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$



Quadrat: Seite = a , Diagonale = D ,

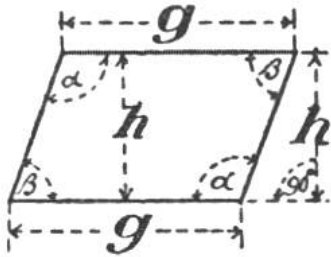
$$F = a \cdot a = a^2, \quad a = \sqrt{F}.$$

$$D = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a \sqrt{2} = a \cdot 1,4142.$$



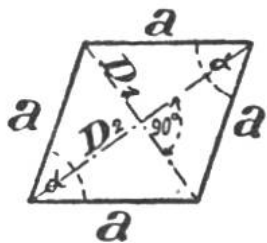
Rechteck:

Seiten a und b , Diagonale = D ,
 $F = a \cdot b$, $a = \frac{F}{b}$; $b = \frac{F}{a}$;
 $D = \sqrt{a^2 + b^2}$;



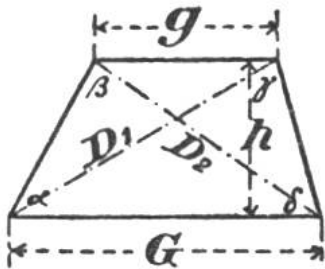
Parallelogramm:

Grundlinie = g , Höhe rechtwinklig
 auf Grundlinie = h ,
 $F = g \cdot h$, $g = \frac{F}{h}$; $h = \frac{F}{g}$.



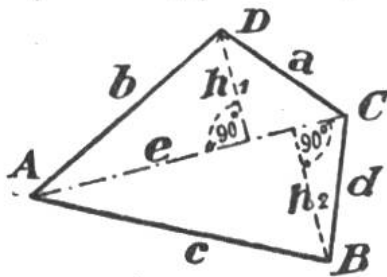
Rhombus:

Gleiche Seiten = a , Diagonalen D_1 u. D_2
 $F = a^2 \cdot \sin \alpha$; $F = \frac{D_1 \cdot D_2}{2}$;
 $D_1 = \frac{2F}{D_2}$; $D_2 = \frac{2F}{D_1}$.



Trapez:

Paralleelseiten = G und g , Höhe = h ,
 Diagonalen = D_1 und D_2 ,
 $F = \frac{G+g}{2} \cdot h$, $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4R$;



Trapezoid:

Diagonale AC , rechtwinklig darauf
 die Höhen h_1 und h_2
 $F = \frac{AC}{2} \cdot h_1 + h_2$; $= \frac{e}{2} \cdot h_1 + h_2$.

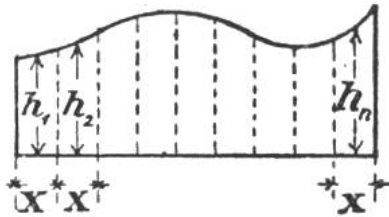
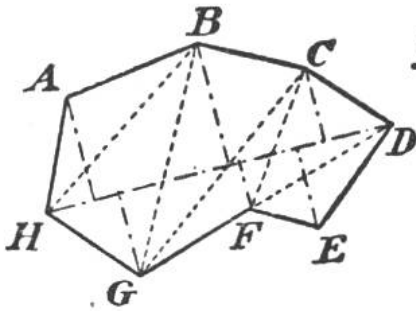


Reguläre Vielecke (Polygone):

Seite = S ,
 Radius des umschriebenen Kreises = R ,
 Radius d. eingeschriebenen Kreises = r .

Polygon	R	r	S	F
Dreieck	0.577 S	0.289 S	1.732 R od. 3.463 r	0.433 S ² od. 1.299 R ²
Quadrat	0.707 S	0.500 S	1.414 R, 2.000 r	1.000 S ² „ 2.000 R ²
Fünfeck	0.851 S	0.688 S	1.176 R, 1.453 r	1.721 S ² „ 2.378 R ²
Sechseck	1.000 S	0.866 S	1.000 R, 1.155 r	2.598 S ² „ 2.598 R ²
Siebeneck	1.152 S	1.038 S	0.868 R, 0.963 r	3.634 S ² „ 2.736 R ²
Achteck	1.307 S	1.208 S	0.765 R, 0.828 r	4.828 S ² „ 2.828 R ²
Neuneck	1.462 S	1.374 S	0.684 R, 0.728 r	6.182 S ² „ 2.892 R ²
Zehneck	1.618 S	1.540 S	0.618 R, 0.649 r	7.694 S ² „ 2.939 R ²
Elfleck	1.775 S	1.704 S	0.563 R, 0.587 r	9.366 S ² „ 2.973 R ²
Zwölfleck	1.932 S	1.866 S	0.518 R, 0.536 r	11.196 S ² „ 3.000 R ²

Unregelmässige Vielecke od. Flächen:



Die Fläche kann berechnet werden durch Zerlegung des Vielecks in Dreiecke mittels Diagonalen u. Summierung der ermittelten Dreiecksflächen, oder auch durch Einteilung in Trapeze u. Dreiecke vermittels einer passend gewählten Abscisse und rechtwinklig auf diese errichteten Koordinaten der Eckpunkte, Summierung des ermittelten Inhalts dieser Trapeze u. Dreiecke.

Durch Zerlegung in parallele Streifen von gleicher Breite x und mittl. Höhen h_1, h_2, \dots, h_n .

$$F = x \cdot (h_1 + h_2 + \dots + h_n).$$

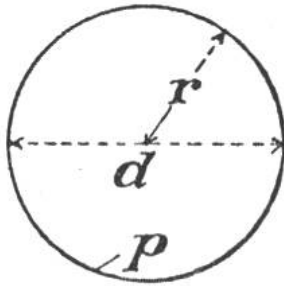
Kreis: Durchmesser = d , Radius = r ,
Umfang = p , Inhalt = F .

$$p = 2r\pi = d\pi = d \cdot 3,14159,$$

$$F = r^2\pi = \frac{d^2\pi}{4} = 0,785 \cdot d^2.$$

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 0,564 \cdot \sqrt{F}.$$

$$d = 2 \cdot \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 1,128 \sqrt{F}.$$



Kreissektor: (ABC)

Radius = r , Bogen = b Zentriwinkel = n

$$F = \frac{r^2\pi \cdot n}{360} = \frac{b \cdot r}{2}$$

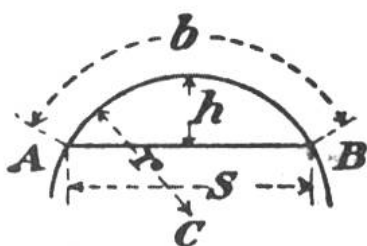
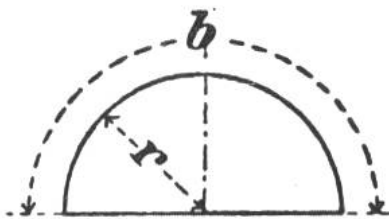
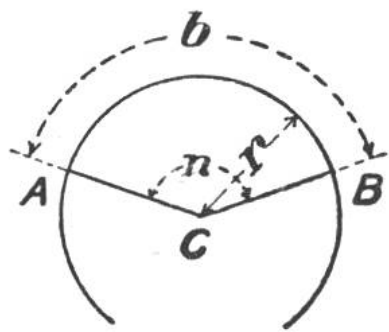
$$r = \sqrt{\frac{F \cdot 360}{\pi \cdot n}} = \frac{b}{\pi} \cdot \frac{180}{n};$$

$$n = \frac{360 \cdot F}{r^2 \pi} = \frac{b}{r \cdot \pi} \cdot 180;$$

$$b = 2r\pi \cdot \frac{n}{360} = r\pi \cdot \frac{n}{180};$$

Halbkreis: Bogen = $b = \pi r$, Fläche = $F = \frac{\pi r^2}{2}$.

Viertelkreis: „ = $b = \frac{\pi r}{2}$; $F = \frac{\pi r^2}{4}$;

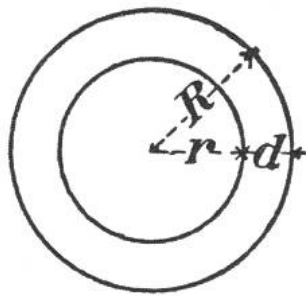


Kreisabschnitt:

Sehne = s , Höhe = h , $F = \frac{2}{3} s \cdot h$.

$$\text{genau } F = \frac{r^2\pi \cdot n}{360} - \frac{1}{2} s \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2} = \frac{br - s(r-h)}{2}$$

$$s = 2\sqrt{h(2r-h)}; \quad r = \frac{s^2}{8h} + \frac{h}{2}.$$

Kreisring:

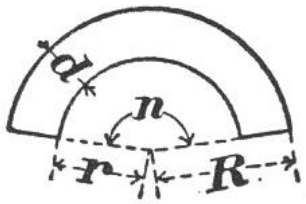
Äusserer Radius = R ,

Innere Radius = r ,

$$F = R^2\pi - r^2\pi = \pi(R+r)(R-r).$$

wenn d = radiale Breite des Kreisrings

$$\text{so ist } F = \pi(2r+d) \cdot d;$$

Kreisringstück (Konzentrisch)

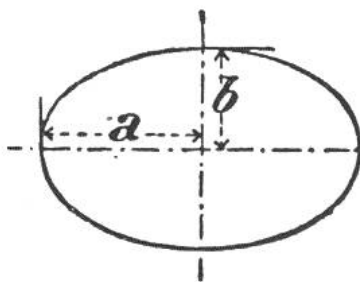
Äusserer Radius = R ,

Innere Radius = r ,

Zentriwinkel = n , radiale Breite = d ,

$$F = (R^2\pi - r^2\pi) \frac{n}{360} = (R^2 - r^2) \frac{\pi n}{360};$$

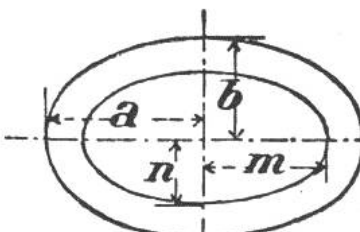
$$= (R+r)d \frac{\pi n}{360} = (R+r)d \cdot n \cdot 0.0087;$$



Ellipse: Halbe grosse Axe = a ,

Halbe kleine Axe = b ,

$$\text{Fläche } F = a \cdot b \cdot \pi;$$

Elliptischer Ring:

Halbe Axen der äusseren Ellipse = a, b ,

Halbe Axen der inneren Ellipse = m, n ,

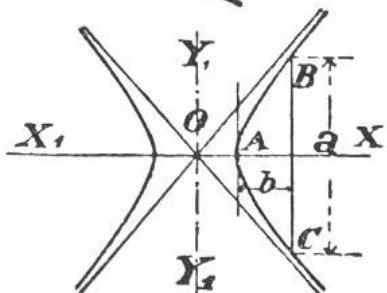
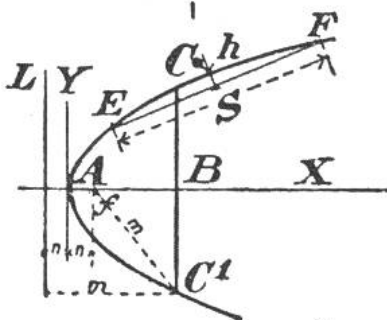
$$\text{Fläche: } F = \pi(ab - mn).$$

Parabelsegment ECF:

$$F = \frac{2}{3} s \cdot h, \quad s = \overline{EF};$$

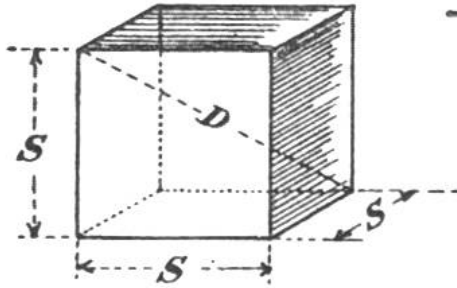
Parabelfläche CAC':

$$F = \frac{2}{3} \overline{CC'} \cdot \overline{AB};$$

Hyperbelsegment ABC:

Sehne = a ; Höhe = b ,

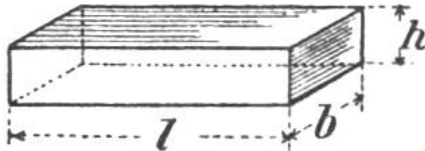
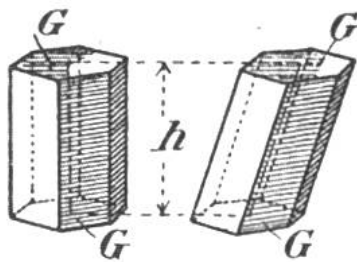
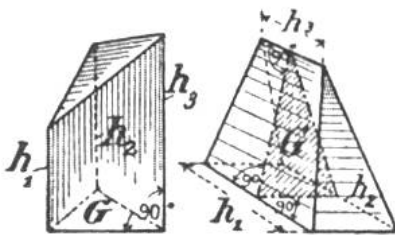
$$F \text{ (annähernd) } = \frac{3}{5} a \cdot b;$$

Würfel:Seite = s , Inhalt = K , Oberfläche = O

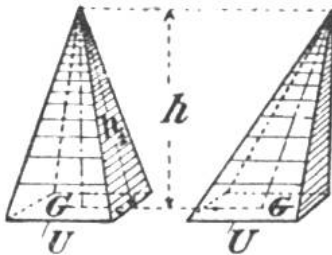
$$K = s^3, \quad O = 6s^2;$$

$$s = \sqrt[3]{K}$$

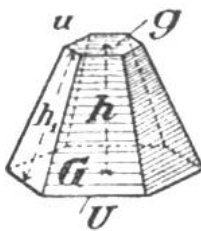
$$\text{Diagonale} = D = \sqrt{3s^2} = s\sqrt{3} = s \cdot 1,732050.$$

Parallelelflach:Länge = l , Breite = b , Höhe = h ,Inhalt = $K = l \cdot b \cdot h$.Oberfläche = $O = 2 \cdot (l \cdot b + l \cdot h + b \cdot h)$ Prisma:Grundfläche = G , Höhe = h ;Inhalt = $K = G \cdot h$.Oberfläche $O =$ Umfang der Grundfläche $U \cdot h + 2G$.Schiefabgeschnittenes Prisma:Flächeninhalt des senkrechten Querschnittes = G ,Länge der Kanten = $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$,Inhalt $K = G \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n}{n}$.

Bei mehr als 3 Kanten ist das Prisma regelmässig oder hat dasselbe wenigstens Axensymmetrie.

Pyramide:Grundfläche = G , Höhe = h ,

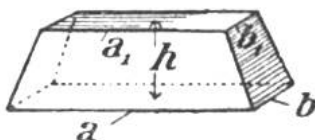
$$K = \frac{G \cdot h}{3}; \quad h = \frac{3K}{G}, \quad G = \frac{3K}{h};$$

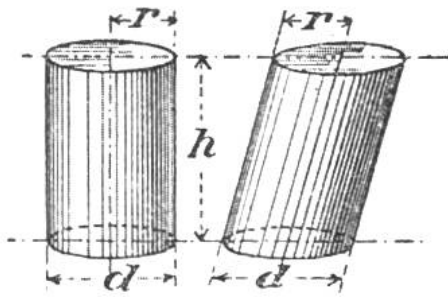
Mantel $M =$ Umfang der Grundfläche $U \cdot \frac{h_1}{2}$;Oberfläche $O = M + G$.Abgestumpfte Pyramide:Parallele Endflächen = G, g , ihr Abstand = h ,ihre Umfänge U, u , Mantel $M = \frac{U+u}{2} \cdot h$,

$$K = \frac{h}{3} (G + g + \sqrt{Gg}); \quad O = M + G + g.$$

Obelisk, Wall, (regelmässig aufgeschütteter Haufen)

$$K = \frac{1}{6} h [(2a + a_1) b + (2a_1 + a) b].$$





Cylinder (Walze)

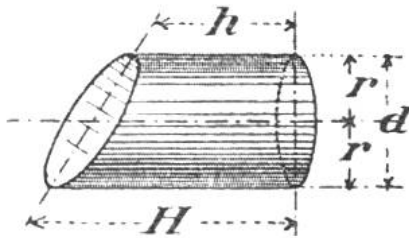
Radius = r , Durchmesser = d , Höhe = h

Inhalt $K = r^2 \pi \cdot h$ oder $\frac{d^2 \pi \cdot h}{4}$

$$r = \sqrt{\frac{K}{\pi h}}; \quad h = \frac{K}{r^2 \pi}$$

Mantel = $2r\pi \cdot h$ oder $d\pi \cdot h$.

Oberfläche = $2r\pi \cdot (r+h)$ oder $d\pi \cdot (\frac{d}{2} + h)$.

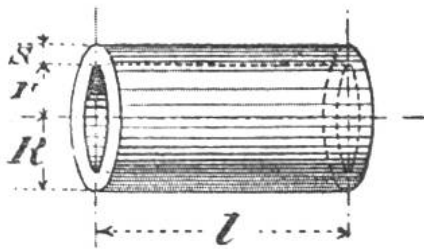


Schiefabgeschnittener Cylinder:

Grösste Höhe = H , kleinste Höhe = h ,

Inhalt $K = r^2 \pi \cdot \frac{H+h}{2}$ oder $\frac{d^2 \pi \cdot (H+h)}{4}$

Mantel = $r\pi(H+h)$



Hohlzylinder (Rohr):

Innerer Radius = r ,

Aüsserer Radius = R , Länge = l ,

Wandstärke = $s = R - r$,

Inhalt $K = \pi \cdot l \cdot (R^2 - r^2)$, oder

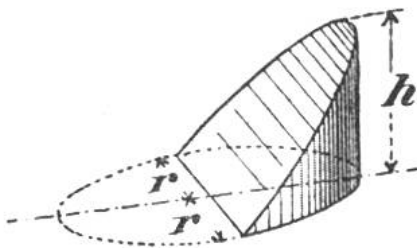
$K = \pi \cdot l \cdot s (2R - s)$ oder $\pi \cdot l \cdot s (2r + s)$.

Cylinderhuf:

Radius der Grundfläche = r ,

Höhe des Hufes = h , Mantel = $2rh$.

Inhalt: $K = \frac{2}{3} \cdot r^2 \cdot h$.



Kegel:

Radius der Grundfläche = r .

Höhe = h , Seite = $s = \sqrt{r^2 + h^2}$,

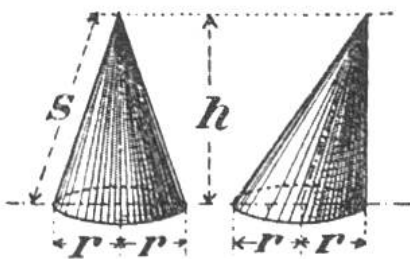
Mantel $M = \pi r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$ oder $\pi r \cdot s$,

Oberfläche = $\pi r^2 + r\pi \cdot s$ oder $r\pi(r+s)$

oder = $\pi r \cdot (r + \sqrt{r^2 + h^2})$.

Inhalt $K = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot h$;

$$r = \sqrt{\frac{3K}{\pi \cdot h}}; \quad h = \frac{3K}{r^2 \pi}$$



Abgestumpfter Kegel:

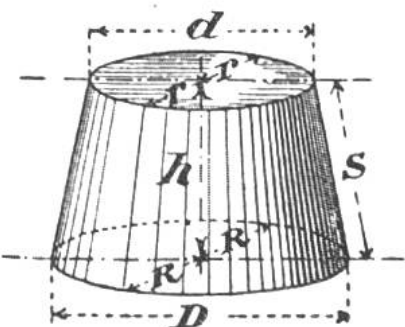
Radien der parallelen Endflächen = R und r ,

Durchmesser = D und d , Höhe = h , Seite = s ,

Inhalt $K = \frac{1}{3} \pi \cdot h \cdot (R^2 + Rr + r^2)$

Mantel $M = \pi s \cdot (R + r)$.

Oberfläche $O = \pi \cdot [R^2 + r^2 + (R+r)s]$.



Kugel:

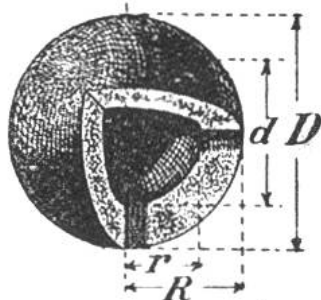
Radius = r , Durchmesser = d ,

Oberfläche $O = 4r^2\pi = 12,566r^2$, oder $d^2\pi$.

Inhalt $K = \frac{4}{3}r^3\pi = 4,189r^3$, $K = \frac{O \cdot r}{3}$,

„ $K = \frac{d^3\pi}{6} = 0,5236 \cdot d^3$,

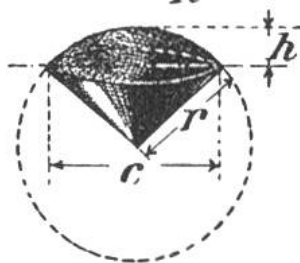
Radius $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}}$; $r = \sqrt[3]{\frac{3K}{4\pi}}$

Hohlkugel:

Aeusserer Radius = R , innerer = r ,

Aeusserer Durchmesser = D , innerer = d ,

Inhalt $K = \frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3) = \frac{\pi}{6}(D^3 - d^3)$

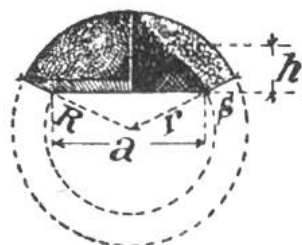
Kugelsektor:

Radius der Kugel = r

Begrenzende Kalotte, Höhe = h , Durchm. = c ,

Oberfläche $O = \frac{\pi r}{2}(4h + c)$

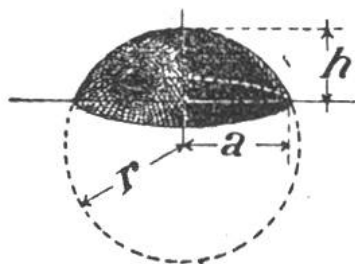
Inhalt $K = \frac{2}{3}r^2\pi \cdot h = 2,0944r^2h$.

Hohlkugelsektor:

Aeusserer Radius = R innerer = r

Wanddicke = $R - r = s$, $r = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}$

Inhalt $K = 2,094 \frac{h}{r}(R^3 - r^3)$.

Kugelsegment (Kugelkalotte):

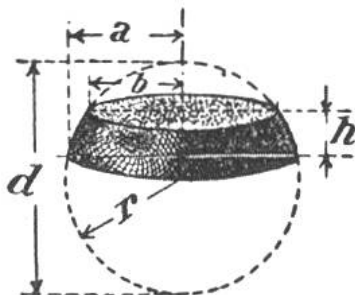
Radius der Kugel = r ,

Radius der Grundfläche = a ,

Höhe der Kalotte = h ,

Oberfläche = $O = 2\pi rh = \pi(a^2 + h^2)$

Inhalt $K = \frac{1}{6}\pi \cdot h(3a^2 + h^2)$ oder
 $= \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$

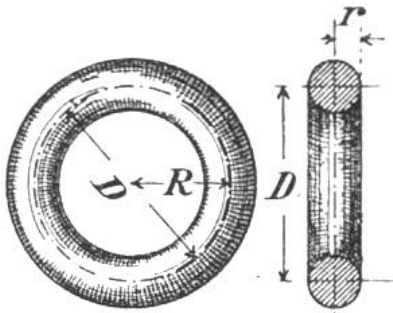
Kugelzone:

Höhe der Zone = h , Radius der Kugel = r

Radius der Endflächen = a und b ,

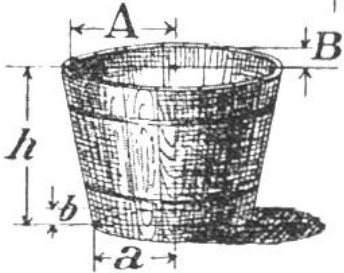
Mantel $M = 2r\pi h$, Oberfläche $O = M + a^2\pi + b^2\pi$;

Inhalt $K = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2)$.



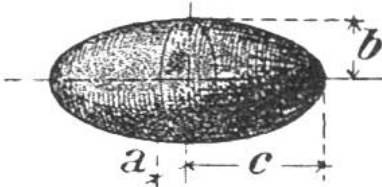
Cylindrischer Ring:

Radius des kreisförmigen Querschnittes = r ,
 Durchmesser des Ringes = D , Radius = R ,
 Inhalt $K = 2\pi^2 Rr^2 = 2,467 Dd^2$.
 Oberfläche $O = 4\pi^2 Rr = 9,87 Dd$.



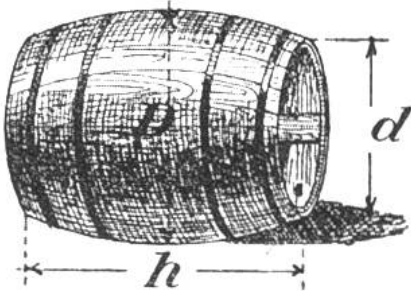
Kübel:

Die unter sich parallelen Endflächen sind
 Ellipsen mit den Halbachsen A, B und a, b ,
 Höhe zwischen den Endflächen = h .
 Inhalt $K = \frac{1}{6}\pi h [2(AB + ab) + Ab + aB]$.



Ellipsoid:

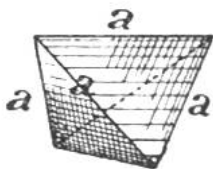
Bezeichnung der 3 Halbachsen = a, b, c ,
 Inhalt $K = \frac{4}{3}\pi \cdot a \cdot b \cdot c = 4,189 abc$.



Fass:

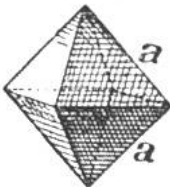
Spunddurchmesser = D , Bodendurchmesser = d ,
 Höhe (resp. Länge) = h ,
 Inhalt $K = \frac{1}{12}\pi h (2D^2 + d^2)$,
 $K = \frac{1}{15}\pi h (2D^2 + Dd + \frac{3}{4}d^2)$.

Reguläre Polyeder:



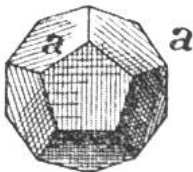
Tetraeder: (4 gleichseitige Dreiecksflächen)

Länge der Kante = a , Oberfl. $O = a^2\sqrt{3} = 1,732 a^2$.
 Inhalt $K = \frac{1}{12} a^3\sqrt{2} = 0,11785 a^3$.



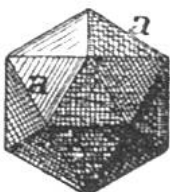
Oktaeder: (8 gleichseitige Dreiecksflächen)

Kante = a , Oberfl. $O = 2a^2\sqrt{3} = 3,464116 a^2$.
 Inhalt $K = \frac{a^3}{3}\sqrt{2} = 0,4714045 a^3$.



Dodekaeder: (12 regelmässige Fünfecke)

Kante = a , $O = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 20,645729 a^2$.
 Inhalt $K = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5}) = 7,663119 a^3$.



Ikosaeder: (20 gleichseitige Dreiecksflächen)

Kante = a , $O = 5a^2\sqrt{3} = 8,6602545 a^2$.
 Inhalt $K = \frac{5a^3}{12}(3 + \sqrt{5}) = 2,181695 a^3$.