Zeitschrift: Revue de Théologie et de Philosophie

Herausgeber: Revue de Théologie et de Philosophie

Band: 30 (1942)

Heft: 124

Artikel: Sur les sentiers du savoir

Autor: Dumas, Gustave

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-380419

SUR LES SENTIERS DU SAVOIR

> Celui qui proclame l'existence de l'infini, et personne ne peut y échapper, accumule dans cette affirmation plus de surnaturel qu'il n'y en a dans tous les miracles de toutes les religions ; car la notion de l'infini a ce double caractère de s'imposer et d'être incompréhensible.
>
> PASTEUR.

Aucun adieu sans tristesse ! Volontiers, sa tâche terminée, le laboureur jette, à la fin du jour, un dernier regard sur la terre à laquelle il voua ses soins. Plein de confiance à l'aube, le soir venu, il se demande à quoi l'a conduit son labeur.

L'âme perd sa candeur en traversant la vie,

dit le poète. En est-il tout à fait ainsi, et celui qui s'en va n'a-t-il pas le droit d'espérer et sa confiance n'est-elle pas légitime ?

Que sont les mathématiques et que signifient-elles relativement à la vie ?

Aborder sous ce biais le problème de la connaissance, sans prétendre être ni complet ni d'une savante rigueur, peut avoir son prix. Une vue d'ensemble est utile. Au cours des siècles, les plus illustres et les plus humbles ont abordé ces inépuisables questions auxquelles

N. B. — Dernière leçon, en date du 8 juillet 1942, d'un enseignement de *Calcul différentiel et intégral* à la Faculté des Sciences et à l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne.

toujours on reviendra, tant est inextinguible le désir de quelque peu se reconnaître en ces domaines.

A dire vrai, il ne pourra s'agir que du savoir dans la manière dont il s'acquiert et dans son dynamisme.

Les indications de M. Fréchet aux Entretiens mathématiques de Zurich, en décembre 1938, celles de l'éminent et très regretté Henri Lebesgue à la même occasion, les unes et les autres en concordance avec des sentiments personnels, sont à la base de l'exposé (1). Celui-ci touchant au fonctionnement de la pensée exige, pour commencer, quelques explications sur les termes en lice.

Le terme intelligence sera pris dans son acception générale réunissant en elle, d'une part, la raison (raison raisonnante), source principale de ce qui correspond à l'esprit dit géométrique et, d'autre part, l'intuition, dont l'esprit de finesse est l'indiscutable attribut. Distinction plutôt artificielle, on le verra, mais nécessaire, à titre d'hypothèse de travail.

On aura, opposées entre elles, deux réalités différentes : la réalité que l'on regarde d'habitude comme telle, et l'autre ou les autres, celles qui, respectivement, sont spécifiques à chaque science particulière. Le terme, le réel, se prendra sans équivoque possible dans l'un et l'autre des deux sens.

On aura donc affaire à deux types de réels : le réel que l'on vit, concret, œuvrant, véritable, incoercible à toute définition fermée, insaisissable, naïf, ingénu, et l'autre ou les autres que l'esprit forge et qui, pour la clarté, peuvent sans inconvénient être taxés de fictifs (2).

Dès que sur les choses on s'incline pour en tirer quelque leçon, forcément et sans pour autant se piquer d'être philosophe, on côtoie la philosophie, celle de tous les temps, de toutes les contrées, celle,

(1) Voir : *Les Entretiens de Zurich sur les Fondements et la Méthode des Sciences mathématiques.* Publication du président des débats, F. GONSETH. Zurich, Leemann, 1941. Dans cet ouvrage, voir tout particulièrement les conférences de MM. Fréchet et Lebesgue auxquelles, très librement, de larges emprunts ont été faits. Consulter également MEYERSON, *Du cheminement de la pensée.* Paris, Alcan, 1931, où se trouve la plus riche des documentations, ainsi que ENRIQUÈS, *L'Evolution de la Logique* (traduction de Monod-Herzen). Paris, Chiron, 1926. — (2) « Il y a d'un côté les choses », dit M. Maurice Gex, « de l'autre les idées qu'on prend des choses : le monde des « choses » est le monde réel, le monde des idées est celui de la connaissance des choses. » Maurice GEX, « Orientations fondamentales en métaphysique », dans la *Revue de Théologie et de Philosophie*, 1940, p. 180.

en particulier, du territoire romand ; forcément, on recourt à ceux que la flèche toucha.

Le problème de la destinée met l'homme en face de la vie, c'est-à-dire du réel au sens le plus réaliste du mot, alors que la pensée, invariablement, transpose et défigure ce réel qui, sans fin, se dérobe.

Réel au sens réaliste ? Cercle vicieux ?

Sans aucun doute ! Mais, nos pensées ne sont-elles pas suspendues les unes aux autres, à la façon des astres qui gravitent dans l'espace ?

Pas de repère fixe ! Soit ! Défaitisme alors ? Non point !

Le problème de la vie se résout en vivant, comme par la marche, celui du mouvement. Pas d'antinomies pratiquement invincibles à un vouloir bien résolu.

Sur ce terrain, hors de notre sujet, comme sur tant d'autres, la perspicacité fulgurante d'un Pascal, la piété d'un Vinet, la saine robustesse d'un Péguy, leur charité, leur haine des compromissions, leur maîtrise de la raison, de la personne, mettent un frein à nos confusions.

La pensée, dans la nuit longue dont parle Poincaré, la pensée soustraite à l'air tonique des sommets, n'est pas tout. Un élément psychologique intervient dans la conviction. Audace et prudence sont de mise.

Fuyons la griserie du cadre vide. Ne nous laissons point égarer par le prestige de la forme.

La mathématique.

Au fait, qu'est-ce donc que la mathématique ?

L'être qui réfléchit, sans arrêt est aux prises avec la soif de connaître. Il doit également se soumettre aux exigences du milieu auquel il se trouve attaché et partant il est dans l'obligation de prévoir.

De l'inquiétude en face de l'inconnu est née l'impérieuse nécessité d'une prospection de celui-ci. Et peu à peu, à la longue, l'esprit est arrivé à fonder des corps de doctrines. Leur élaboration rentre dans la nuit des temps. Parfois, on a pu remonter plus ou moins jusqu'aux origines. On s'aperçut alors qu'à chaque pas ces corps de doctrines avaient été modifiés et revisés, car ils ne pouvaient se développer et essaimer que dans un accord parfait avec le monde sensible dont ils sont tributaires.

Parmi ces initiatives, la mathématique, dont les toutes premières opérations furent les premières mainmises sur les choses : la distinction entre le tien et le mien, par exemple. L'homme, le long de ses jours, ne cesse en quelque manière d'être géomètre.

La mathématique, telle qu'on la conçoit plutôt aujourd'hui, n'est pas la mathématique abstraite ou déductive, dont beaucoup se tiennent à respectueuse distance en la comblant de sourires quelque peu sardoniques. On ne voit trop en elle que du calcul ou, dans les cas les plus favorables, une extension très limitée de l'art du calcul.

La mathématique abstraite, il y aura lieu d'y revenir un peu plus loin.

La mathématique, telle qu'on va la considérer, émane d'un réel — réel du mathématicien ou réel des choses, cela dépend — plus ou moins circonscrit, plus ou moins nuancé, dans lequel au figuré :

Les parfums, les couleurs et les sons se répondent.

Elle part de ce réel, puis y revient pour confrontation, ce qui la conduit devant un autre réel, plus fouillé et mieux ébauché.

Toujours sollicitée par du nouveau, la mathématique, comme toute science, est ouverte. Perpétuellement, elle ne fait qu'entretenir et parachever ses voies, alors qu'en même temps elle en imagine de nouvelles.

En se faisant et dans son devenir, elle n'est que recommencements. Constituée par l'ensemble des méthodes, ou mieux, des *mécanismes mentaux* qu'élabore l'esprit en vue de son emprise sur le réel, la mathématique est la science de ces mécanismes.

Son programme comporte, d'une part, leur création et, de l'autre, leurs règles et les résultats auxquels ces dernières conduisent. Une certaine économie politique, la mécanique rationnelle, la physique théorique, la logistique, par exemple, rentrent dans son domaine.

La synthèse inductive.

La synthèse inductive n'a rien de commun avec une ordonnance quelconque ou des procédés méthodiques devant assurer sans trop de peine quelque découverte au chercheur. Le chercheur, personne n'en doute plus aujourd'hui, ne saurait que faire des tables baconiennes par le moyen desquelles, automatiquement et gratuitement pour ainsi dire, la vérité devait apparaître.

Au cours d'une synthèse inductive, l'esprit, dans un corps à corps poignant, agit à sa guise et de la manière qui lui semble la meilleure.

Le terme même est suggestif. Il fut introduit par M. Jean-Louis Destouches, dont nous reparlerons, et désigne, d'une manière générale, l'opération synthétique qu'effectue l'intelligence, lorsque, peu à peu, elle dégage d'une même classe d'objets certaines régularités, certaines permanences dont elle arrive à déduire des représentations abstraites, susceptibles d'adaptation aux pratiques de l'analyse discursive.

Aucune théorie ne s'établit sans qu'il y ait auparavant synthèse inductive. Durant la période de synthèse inductive, celui ou ceux qui l'exécutent font ainsi surgir d'éléments extérieurs ce que ces éléments, sous l'angle particulier où on les considère, peuvent receler ou sous-entendre d'intime et de caché. Des expériences effectives ou des rapprochements mentaux entrent par conséquent pour une grande part dans le travail de gestation inhérent à cette sorte de synthèse.

Newton s'étant laissé aller, dit-on, à de profondes réflexions au sujet de la chute d'une pomme, élaborait à ce moment un commencement de synthèse inductive. James Watt, de même, devant un couvercle de marmite sur le feu et que soulevait la vapeur. Poincaré en achevait une, lorsque, mettant le pied sur le marche-pied de son omnibus, l'idée lui vint, sans que rien dans ses pensées antérieures parût l'y avoir préparé, sur laquelle allait reposer toute la théorie des fonctions fuchsiennes (1).

Nulle synthèse inductive sans pénétrante observation !

Autre exemple digne d'attirer l'attention : l'établissement de l'avant-projet d'un type inusité de navire (2).

Des renseignements intéressants pourront d'abord avoir été fournis par la comparaison avec d'autres sortes de navires pris d'une manière indépendante ou choisis parmi ceux qui se rapprochent le plus du projet envisagé.

Des expériences sur modèles auront été faites et des croisements et recoupements de séries de comparaisons. Etc., etc.

Somme toute, une suite d'opérations très cohérentes se dissimulant sous l'apparence tout empirique des procédés ; opérations en l'espèce nullement déductives, mais au contraire suggestives.

(1) Henri Poincaré, *Science et Méthode*, Paris, 1912, p. 51. — (2) Basso, « Induction technique et science expérimentale », dans la *Revue philosophique*. Paris 1925 (janvier à juin), p. 65.

Synthèse inductive créatrice, d'où sortiront peut-être — qui pourrait le savoir ? — des données à toutes fins utiles.

Le champ est ainsi illimité des perspectives qu'ouvrent aux mathématiques des synthèses inductives greffées sur des problèmes posés par la technique.

Le nombre entier serait-il un être de raison, créé par la pure raison, indépendant de toute notion contingente, de toute synthèse inductive ?

Il y a, aujourd'hui, tendance marquée en faveur du contraire.

Le nombre entier serait né de la considération simultanée de plusieurs collections. Il serait pour celles-ci, représentation schématique d'une caractéristique commune. Trois cailloux, trois pommes forment deux collections distinctes ayant ceci de particulier d'être, chacune, composée de trois objets.

L'esprit, par synthèse inductive appliquée à ces deux collections, en extrait l'entité mentale commune : le nombre *trois*.

Il ne semble pas que, d'un autre côté, la démarcation entre l'arithmétique et la géométrie soit franche, le nombre entier pouvant s'être détaché par synthèse inductive de configurations matérielles. L'examen de celles-ci ayant eu son apport, l'initiative de l'esprit, de l'intelligence en aurait tiré cette abstraction : le nombre entier.

Et, comme suite à la synthèse inductive, une théorie appropriée, l'expérience s'achevant ainsi dans une orchestration.

Les quatre temps.

Une synthèse inductive ! N'y parvient pas qui veut ! Souvent, elle est une résultante, résultante parfois du penser de bien des générations. Qui dira le temps qu'il fallut pour élaborer la géométrie euclidienne dans sa perfection, et le temps qui se surajouta pour parvenir à ses sœurs, les géométries non euclidiennes ?

Le temps n'importe pas ! Sans lui, d'ailleurs, peu d'assises définitives !

Un exemple intéressant et palpitant tout à la fois est à tirer des résultats obtenus par M. Destouches en physique quantique. A lire la préface de l'un de ses derniers ouvrages [1], « M. Destouches, par un développement d'idées exigeant un appareil logique et mathéma-

(1) J.-L. Destouches, *Corpuscules et systèmes de corpuscules.* Paris, Gauthier-Villars, 1941.

tique assez abstrait, a réussi » à mettre en évidence « des principes intuitifs sur lesquels on peut bâtir la théorie complète, en tenant un compte exact des possibilités expérimentales et de leur signification profonde ». « L'intérêt d'une telle méthode est qu'elle n'est pas limitée à la découverte de faits connus, mais qu'elle peut aussi conduire plus loin et permettre des généralisations. »

C'est là en raccourci, par quelques phrases empruntées à M. Brillouin, ce qu'entraîne avec elle une synthèse inductive bien conduite.

Chacun n'est pas à même de suivre dans le détail la pensée de M. Destouches avec l'œuvre duquel on est assurément en pleine mathématique, mais en une mathématique si mâtinée de physique ou réciproquement, qu'on se demanderait en vain comment faire la disjonction.

Question fallacieuse, à tout prendre ! Passons en conséquence à du plus simple, du plus simple pour nous, mais qui, à l'époque, c'est-à-dire à l'aurore des civilisations, a dû paraître chose aussi hardie que la synthèse dont on vient de parler.

Comment s'est déroulée l'arithmétique dans son devenir ?

L'arithmétique du nombre entier positif, en gros et sans tenir compte des sinuosités du cheminement, a progressé peut-être de la façon suivante ou d'une autre, analogues à celle que caractérise le schème que voici.

Etant parvenu synthétiquement, c'est-à-dire par généralisations intellectuelles, à l'addition, on a pu, sur celle-ci, venir greffer la soustraction, la multiplication, la division.

Ce fut, *premier temps*, le passage du nombre perçu dans la nature au nombre conçu par l'intellect et obéissant à des lois. Passage donc, par synthèse inductive, de phénomènes naturels à des postulats relatifs à ceux-ci.

D'où, sur ces postulats, *second temps*, édification d'une théorie.

Troisième temps, application déductive de la théorie, c'est-à-dire par la raison raisonnante afin d'obtenir, par ce moyen-là, de nouveaux éléments.

Quatrième temps, enfin, confrontation, par vérification ou par expérience, de ces nouveaux éléments avec ceux — les nombres entiers — sur lesquels, tout au début, la synthèse inductive fut opérante.

D'où, d'une part, confirmation partielle de la légitimité du procédé déductif employé et, dans ce cas, retour au réel dont on était parti, la racine carrée de l'entier 25, par exemple, se trouvant être un entier également, l'entier 5 ; et, d'autre part, infirmation partielle, la racine de l'entier 13, par exemple, ne rentrant pas dans les entiers.

Dans le premier cas : un cycle fermé. Dans le second, un cycle ouvert conduisant l'esprit à un nouveau réel, sur lequel il se jette aussitôt et sur lequel — généralement après de longs tâtonnements et de grandes hésitations — la réflexion, une synthèse inductive aidant, se rouvrira un nouveau cycle.

Ainsi de suite !

Les théories confirmées par des vérifications ou des expériences se trouvent ainsi, d'un côté, enrichies et, de l'autre, renforcées et mieux délimitées.

Dans l'exemple précité, la racine carrée de 13, au moment où vint se poser la question de son existence, dut paraître une étrangeté. Elle dut même être un sujet de scandale parmi ceux qui ne voulaient connaître que le nombre entier.

Dans d'autres domaines, des fonctions sans dérivées ou des surfaces sans plans tangents ont provoqué — le fait est historique et très peu éloigné de nous — des sentiments d'horreur chez certains mathématiciens rencontrant ces êtres nouveaux pour la première fois (1).

En résumé et en se souvenant que ce qui précède ne fournit qu'une vue très schématique et singulièrement écourtée de ce qui se passe en fait, tout progrès mathématique se réalise en quatre temps : le premier de synthèse inductive, le second d'élaboration axiomatique, le troisième d'activité déductive, le dernier, enfin, consacré à la vérification. Parti de la conception d'un certain réel, le cycle, d'une part, reconduit au même réel, en même temps qu'il en démasque généralement d'autres ; autres réels auxquels viennent s'attacher de nouveaux cycles, l'intelligence dans ces processus se manifestant tantôt sous les espèces de l'esprit de finesse, tantôt sous celles de l'esprit de géométrie.

A n'en pas douter, il en est bien ainsi. La considération de l'histoire de la science l'établit. Mais l'explication fournie de ces déroulements porte atteinte peut-être à la succession vivante des choses. L'alternance de l'action des deux esprits serait dans bien des

(1) Voir, à ce propos, les premières pages de la *Notice sur les Travaux scientifiques* de M. Henri Lebesgue. Toulouse, Privat, 1922.

cas plus rapide, leurs rôles respectifs plus fondus qu'on ne l'a fait voir [1].

La distinction entre la mathématique dans son devenir et la mathématique achevée et déjà bâtie n'est point aisée à percevoir !

Le réel mathématique.

Sur le réel mathématique et sur la manière dont il se constitue et peu à peu se complète dans ses perpétuels prolongements, il y aurait beaucoup à dire.

Un exemple suffira : celui du nombre complexe ou imaginaire. Bâtis sur le symbole i dont le carré, par définition, serait égal à -1, ce qui ne peut rien signifier pour qui ne veut s'en tenir qu'au réel fourni par les entiers, ces nombres ont une histoire équivalente à une épopée sans pareille. Disons seulement qu'ils surgirent confusément devant l'esprit, au XV^e^ et XVI^e^ siècles déjà, au moment des premières résolutions de l'équation du troisième degré, mais ce ne fut qu'au début du XIX^e^ que les mathématiciens, contraints par les faits, consentirent, non sans réticence, à leur donner droit de cité.

Laissons la parole au journaliste qui interrogea M. Emile Borel et reproduisit sinon la lettre, du moins le fond de la pensée de celui-ci [2].

« Entre 1820 et 1830, selon M. Borel, Cauchy publia les travaux sur les variables imaginaires qui lui ont valu, à la fois, tant de gloire et tant d'insultes. Parce qu'il a eu l'audace de baser ses recherches sur le signe $\sqrt{-1}$, on a écrit de Cauchy qu'il ne devait pas avoir conscience de ce qu'il faisait ; que ses intégrales singulières étaient de singulières intégrales ; que ses inventions étaient des niaiseries intégrales et des absurdités ; et, enfin, que de telles folies étaient capables de faire dérailler les esprits.

Or, ce sont justement ces travaux de Cauchy si cruellement bafoués qui ont servi plus tard à Maxwell pour sa théorie sur l'identité de transmission entre l'électricité, la lumière et la chaleur ; ce sont les travaux de Maxwell et de Cauchy qui ont amené les expériences de Hertz sur les ondulations électriques. »

Ce texte se passe de commentaires. On voit qu'une suggestion de l'expérience en entraîne une nouvelle et qu'en définitive l'esprit,

(1) Pour plus de détails sur la façon dont un cycle s'élabore, voir la conférence même de M. Fréchet, *Entretiens...*, p. 53 s. — (2) *Le Temps*, 7 septembre 1909.

d'un réel à un autre réel, avance de cette façon en direction du faîte de la connaissance, de la connaissance du vrai réel, de celui qui touche nos sens.

En ce qui concerne les quantités imaginaires auxquelles il y a lieu de rattacher, à côté du nom de Cauchy, ceux de bon nombre de mathématiciens, les noms de Moivre, d'Euler et de Gauss notamment, on remarquera que l'esprit se faisant violence introduisit peu à peu un nouvel élément. Non par simple décret et de façon arbitraire, mais, au contraire, en obéissant aux invites de manipulations d'ordre pratique. Qu'on veuille bien, à ce propos, consulter le passé. La lutte interne fut vive, l'esprit ne voyant pas clair dans ce qu'il faisait et se regimbant contre un prolongement de ses domaines, prolongement qui, au premier abord et bien à tort, lui paraissait contradictoire. L'esprit, perpétuellement, trébuche en face de ce qui dans les nuages lui semble, au moment même, inintelligible.

Est-il nécessaire de rappeler une réflexion de Poincaré : « Il est très difficile, pour les mathématiciens contemporains, de comprendre les contradictions que nos devanciers croyaient découvrir dans les principes du Calcul infinitésimal (1) ». Et, dans un ordre d'idées un peu différent, se représente-t-on les préjugés qu'il fallut vaincre avant que fût admis le fait de la terre sphérique ?

L'esprit, facilement, se fait des fétiches de ses conceptions du réel à un instant donné. Est-il, par exemple, certain que le nombre entier réel ait dans l'ensemble de la pensée mathématique un rôle aussi prépondérant que volontiers l'on s'imagine? M. Weyl paraît en douter (2).

Le réel mathématique va se multipliant au cours de ses métamorphoses.

La logique.

L'effort que nécessite l'adoption d'un nouveau réel provient surtout du fait qu'à son propos il y a lieu de mettre sur pied de nouvelles techniques en vue du maniement de celui-ci.

Si l'on veut un exemple, plus tangible pour certains que celui du

(1) Henri Poincaré, *Dernières pensées*. Paris, 1933, p. 300. — (2) Cf. Hermann Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. Leipzig 1928. Préface, p. VI, ainsi que Lautman, *Essai sur l'unité des sciences mathématiques dans leur développement actuel*. Actualités scientifiques et industrielles, n° 589, Paris, Hermann, 1938, p. 5.

nombre imaginaire, que l'on considère l'introduction, dans la vie courante, d'une marque distinctive pour le zéro. C'est de l'Inde que doit être venue l'idée de faire correspondre au néant, à la négation absolue, au vide, en un mot, une notation qui, elle, n'est pas le néant, mais au contraire quelque chose en soi, et d'incorporer ce nouveau signe dans la gamme des autres chiffres qui, eux, sont des indices de la réalité palpable.

Que l'on songe aussi à ce que pouvait bien signifier pour l'intellect, après que le calcul infinitésimal eut pris naissance, l'introduction d'une notation fixe et permanente en correspondance avec une quantité variable qui tend vers zéro — l'infiniment petit au sens mathématique du terme —, en correspondance, nous le disons, avec de l'impalpable qui s'évanouit !

On comprend les résistances des Eléates qui ne pouvaient dans leurs spéculations admettre qu'Achille pourrait rattraper la tortue.

A chaque accession d'un nouveau réel, élaboration nécessaire, par conséquent, d'une logique nouvelle, si par logiques on désigne, comme nous le faisons ici, les codes respectifs auxquels doit s'assujettir l'intellect dans chacun de ses domaines spéciaux.

Un de ces codes est ainsi l'ordonnateur du mode de penser et des pratiques, c'est-à-dire la logique du cycle issu du réel considéré, la logique du système envisagé, selon l'expression introduite par M. Enriquès [1].

Et d'abord, pour que cette logique particulière puisse être bien fondée, il faut que le réel auquel elle se rattache soit bien organisé, bien délimité, bien précisé. Une fois cette condition remplie — condition indispensable et qui garantit d'ailleurs que les opérations afférentes ne chevauchent point en l'air —, le réel en cause se trouvera, par le fait même et pour ainsi dire, doté de la logique qui lui convient.

Que d'obstacles à vaincre jusque-là !

L'arithmétique, nous l'avons vu, est issue de permanences constatées dans des collections finies. Or, dit Lebesgue, si dans une cage on met un animal et un autre animal, cela ne fait pas toujours deux animaux, car s'il s'agissait d'un lion et d'un lapin, le lion mangerait le lapin.

C'est dire, ajoute Lebesgue, que l'arithmétique s'applique quand

(1) Enriquès, *ouvr. cité*, p. 182, XLI. *Logique des systèmes.*

elle s'applique, ce qui peut se traduire en disant que l'arithmétique s'applique au réel dont elle est issue, sans que toutefois on sache toujours bien si l'on est en présence de celui-ci.

Mais prenons les ensembles infinis que Georg Cantor (1845-1918) introduisit dans la science dès 1870. La logique du fini permanent n'y trouve plus son compte.

Soit, sur une ligne, un nombre fini d'hommes, soixante, pour fixer les idées.

Mettons ces hommes sur deux rangs ; on aura de la sorte trente files. Le nombre des hommes dans le premier ou le second rang n'étant pas le même que celui de ceux qui étaient en ligne dans la première position, on voit que la partie ne saurait être égale au tout.

Mais, ici, le nombre des hommes, soixante, est fini.

Supposons, au contraire, les hommes en nombre infini.

Par la pensée, plaçons-les aussi en ligne, puis, ordonnons-les par files de deux. Les files resteront en nombre infini et se prolongeront, sans arrêt, tout le long de la ligne de première position.

En introduisant une convention précise, on en conclura que la partie se trouve, ici, égale au tout.

Cela suffit pour que la logique attachée à des collections finies ne puisse être la même que pour des collections infinies, la notion d'égalité étant à modifier en passant de l'un de ces types de collections à l'autre.

On s'en convaincra aussi en se demandant ce que peut bien être pour l'esprit une infinité d'individus pris en bloc, non pas en nombre de plus en plus grand, c'est-à-dire un infini en devenir, mais un « infini actuel » selon le terme consacré.

Cette notion de l'infini actuel est aussi difficile à accepter pour l'esprit que le zéro ou l'infiniment petit de tout à l'heure.

Et dire que, parmi les collections infinies, celle qui vient d'être prise en exemple est du genre le plus simple de tous. Ses éléments peuvent se numéroter.

Que sera-ce si l'on en considère d'autres, les ensembles de points situés sur un segment de droite, à l'intérieur d'un carré, d'un cube, ou ceux encore qui, par déchiqueture et morcellement à l'envi, se détachent des dits.

Or, ces exemples sont simples encore à côté de ceux qui peuvent se révéler à l'esprit. Des ensembles infinis, on en imagine de toutes les espèces, de sorte que leur discrimination et leur intronisation dans l'activité mentale n'est point facile. Leur logique, en un mot, leur codification, objet encore de sérieuses controverses jusqu'ici, est loin d'avoir été menée à chef.

On avait eu raison de paradoxes qui furent âprement discutés et qui firent dire à M. Emile Borel, dans l'abandon de l'interview signalée, qu'il n'y avait pas de casse-tête comparables à ceux que la théorie des ensembles soulève. Trente ans plus tard, Lebesgue rappelle qu'il se forma deux partis « réduits à s'invectiver longuement comme les héros d'Homère (1) ».

Querelles qu'on ne saurait taxer de vaines. Le progrès de la science, dans une large mesure, naît d'antinomies victorieusement surmontées. En correspondance avec chaque nouveau dicastère bien fondé de la science mathématique, une nouvelle technique du penser s'établit.

Il est dès lors utile, sinon indispensable, qu'au moment de l'initiation à des disciplines telles que l'Analyse infinitésimale ou la Géométrie moderne, par exemple, ou tant d'autres encore, le débutant soit expressément averti qu'il va se trouver en face d'une économie de pensée qu'il ignore et qu'il doit se tenir pour dit que le mot célèbre et si souvent répété : « Allez toujours et la foi viendra » est, à ce point de vue aussi, tout à fait justifié. La parole, de son côté, a le devoir de féconder l'enseignement du livre.

Quant à une logique immuable — notion peut-être contradictoire en soi — régulatrice de la raison et préposée à la totalité des phénomènes mentaux sains, on en est loin. Il y a progrès sur Aristote, dont il faut se garder de médire ; mais la logique, arbitre suprême du vrai, gît sans doute en dehors des limitations de l'homme auquel, à chaque jour, la peine du jour doit suffire.

Le dualisme.

Il y a dans la manière d'envisager le réel un dualisme manifeste rappelant celui qu'accuserait l'intelligence, si vraiment s'opposaient en elle l'activité de la raison et celle de l'intuition.

(1) On ne saurait assez recommander une lecture approfondie de la belle conférence de Lebesgue à Zurich. La citation est empruntée à celle-ci où, dans une langue facile et courante, légèrement teintée de bienveillante ironie, Lebesgue analyse la nature des oppositions, pour lui d'essence plutôt psychologique, que les ensembles infinis ont fait surgir. *Entretiens...*, p. 109 s.

Le réel fictif que crée la raison raisonnante et le réel véritable, dont il est l'image, ne sont pas à confondre. Marchant toujours côte à côte, ces deux réels sont à bien distinguer, faute de quoi l'esprit risque de rester enclin à des malaises qu'en face de la mathématique enseignée on est souvent près d'éprouver. Le continu mathématique, tel que le définissent les géomètres, n'est pas celui que la nature nous offre. Sans la connaissance de pareilles séparations, peu de confiance serait possible, l'esprit ignorant où il va.

Un désir de M. Fréchet est donc bien justifié. A cause de la distance, en apparence, — mais en apparence seulement — si grande entre le réel de nos sens et celui de l'esprit, M. Fréchet demande qu'en toute occasion opportune, à l'école surtout, on veuille bien s'astreindre à faire chaque fois nettement le départ entre l'objet dans sa réalité proprement dite et les vues ou les conceptions qu'impose à son propos la théorie.

Cette nécessité, à l'heure actuelle, chacun la ressent de plus en plus. De là, dans les dictionnaires, un nombre toujours croissant d'images et, dans les cours, toujours plus d'expériences effectives pour confirmer les affirmations de l'intelligence et dissiper si possible le brouillard dans lequel trop souvent elles baignent.

Mais, ce dualisme s'affirme encore de bien d'autres manières.

La phase déductive du penser mathématique dans l'établissement d'une conclusion se résume, on l'a vu, en un donné soumis à l'activité déductive et se retrouvant après cette action le même en son essence, mais transformé. Rien d'hétérogène ne s'insinue durant le processsus. Que la mathématique procède ou non de la raison raisonnante ou qu'elle procède partiellement de l'intuition, le réel auquel elle applique au départ son fonctionnement est le même que celui que, seul, elle retient à l'arrivée.

Les conclusions mathématiques n'ont donc, abstraitement parlant, rien à voir avec le réel véritable et, quand Poincaré vient proclamer que « dans notre monde relatif toute certitude est un mensonge (1) », il n'y a rien en cela qui puisse déconcerter. Une certitude relie en effet dans notre intellect toujours un donné abstrait à un autre de même nature. Notre intellect ne peut nous conduire au réel véritable.

Mais, prenons garde. A ce taux-là, tout théorème serait un mensonge. Le théorème de Pythagore en serait un.

(1) Henri POINCARÉ, *Savants et écrivains*, p. VII.

Voyons un peu. Le réel abstrait, sur lequel repose la conformité de la proposition, est si près du réel véritable, du réel concret, qu'on peut être certain que, sur le terrain des applications courantes où on le fait intervenir, le théorème du carré de l'hypothénuse n'a pas à craindre de démentis.

Il y a là un probabilisme, le même à certains égards que celui de Cournot, qui étayait sa conviction sur l'enchaînement du théorème avec tout un système de propositions parfaitement liées et sur le fait des innombrables démonstrations qu'on en donne.

Meyerson signale une remarque analogue à celle de Poincaré, mais plus éloignée en date.

Le poète russe Tutchef, en un vers, s'est un jour écrié : « La pensée exprimée est un mensonge (1) ».

Prise à la lettre et sans son contexte, cette sentence inquiète. Mais, si l'on se souvient que le langage est un symbolisme, proche parent assurément du symbolisme par signes et chiffres qu'utilise la mathématique, symbolisme qui, comme tel, ne s'applique qu'à de l'abstrait, à de l'inerte par conséquent, l'assurance renaît.

Les choses, a dit quelque part Félix Klein à propos de mathématiques, « les choses parfois paraissent plus raisonnables que les hommes (2) ». C'est le cas, en effet. Elles remettent au point ce que maladroitement l'homme traduit ou exprime.

Emile Picard, un jour, se plut à dire que « la rigueur mathématique varie avec l'époque ». Eh ! quoi ? La mathématique ne serait pas le château-fort inébranlable de la connaissance ? Inutile de s'agiter, Picard a raison. La mathématique progresse, son réel et, par suite, ses exigences avec elle.

Quand, enfin, Bertrand Russell, en pince-sans-rire, veut nous persuader que « les mathématiques sont la seule science où l'on ne sait jamais de quoi l'on parle ni si ce que l'on dit est vrai », sa boutade nous laisse froid. On se convainc bien vite qu'il ne peut s'agir que de mathématique déductive et que, peu fixé sur la nature du donné en commençant, on ne l'est pas mieux à la fin.

La science n'en progresse pas moins. Si indispensable à son établissement que soit le formalisme, le formalisme ne saurait la paralyser.

L'esprit, cependant, paraît moins dicter ses règles que les choses

(1) MEYERSON, *Ouvr. cité*, t. II, p. 535. — (2) Félix KLEIN, *Elementarmathematik...* p. 64.

mener l'esprit. Ce sont les choses, semble-t-il, qui l'orientent et l'initient aux lois (logiques) auxquelles l'astreint la connaissance (1).

Kant proclame le contraire : « L'entendement ne reçoit pas ses lois de la nature, mais il les prescrit à celle-ci (2) ».

La question est subtile et, pour autant qu'elle admet une réponse, n'est pas de celles qu'on épuise en un tournemain. L'essentiel est que, soit d'un côté, soit de l'autre, le pouvoir constructif de la pensée reste hors de cause. La réflexion mathématique, par exemple, prête une aide efficace à la physique, tandis que, réciproquement, la physique, par ses directives, ne laisse pas d'être pour les mathématiques un sérieux appui.

La mathématique abstraite.

Mathématique abstraite, mathématique déductive, il faut un nom pour mettre à part ce royaume dans un royaume. On pourrait dire aussi : mathématique classique ou pure, ce qui serait trop restrictif, ces termes, depuis longtemps adoptés, délimitant par trop le champ de la mathématique que l'on vise.

Des quatre phases que traverse l'esprit à chaque pas de sa conquête du savoir mathématique, on peut vouloir isoler la troisième, celle durant laquelle se manifeste l'activité déductive. Pour beaucoup, la mathématique ne serait par définition que la science correspondante et n'aurait trait ainsi qu'aux règles auxquelles obéissent les mécanismes mentaux dont il fut question au début et à l'ensemble des résultats que l'on obtient par l'intermédiaire de ceux-ci. Cette mathématique serait celle que nous qualifions d'abstraite. Sans entrer dans cette manière de voir, M. Fréchet reconnaît qu'elle est soutenable. Moins soutenable qu'il ne le semble ; M. Fréchet paraît le penser aussi.

Dans son domaine, la mathématique abstraite est parente de l'ancienne scolastique dont les déductions se déroulaient à partir de principes considérés comme accordés, mais dont l'infrastructure était incomparablement plus étroite que ne l'est celle de la pensée moderne. Cette mathématique a, par conséquent, ses racines dans

(1) Cf. Lautman. *Les schémas de structure.* Act. sc. et ind., n° 590, Paris, Hermann, 1938, p. 39 : « La véritable logique n'est pas *a priori* par rapport aux mathématiques, mais il faut à la logique une mathématique pour exister ». — (2) Kant, *Prolegomena*, § 36.

un monde mieux exploré ; connaissant celui-ci et s'inspirant de ses singularités, elle arrive en retour à le munir de moyens d'action.

La mathématique abstraite est-elle, d'autre part, aussi déductive qu'on a voulu l'admettre dans une entente assez factice qu'explique historiquement l'emballement sans précédent auquel ses résultats superbes, chaque fois, donnèrent lieu ?

On dit que la mathématique — la mathématique abstraite — ramène l'identique à l'identique.

Cela est vrai, sans doute, par un artifice de langage ou de philosophe. Mais l'élément qualitatif, le *quid proprium* d'une démonstration mathématique n'est-il pas constructif et, dans son essence propre, le raisonnement mathématique n'a-t-il pas sa saveur ? En face d'une démonstration bien construite et bien faite, l'esprit répond par des résonances que n'éveillerait pas l'identique identifié avec de l'identique. L'âme vibre, au contraire.

Et, « ces longues chaînes de raisons du *Discours de la Méthode*, toutes simples et faciles dont les géomètres ont coutume de se servir » n'empêchent point l'émotion de gagner l'être intime.

La mathématique achevée — achevée et pourtant toujours en éveil — provoque chez ses adeptes un frisson de beauté !

Cette mathématique abstraite, celle des Gauss, des Weierstrass, des Hermite, où toutes les virgules sont en place sans qu'un iota soit à changer, ou celle d'un Euler, d'un Riemann ou d'un Poincaré, aujourd'hui encore ruisselante de sève, n'est pas fille exclusive de l'esprit déductif. Seul, son vêtement donne le change.

Le mathématicien dans sa chaire parle souvent bien autrement que devant ses intimes, auxquels il ne redoute pas de faire part des raisons de tel ou tel de ses succès ou insuccès, des causes de la puissance ou de l'impuissance de telle ou telle idée. Lebesgue voudrait que l'on osât formuler explicitement ces examens critiques si utiles au chercheur et que, pour cela, on prît l'habitude de les faire plus complètement et plus nettement.

La mathématique abstraite enrichit, à sa façon, de moyens d'une puissance inappréciable, le patrimoine de la pensée constructive.

Ses théories toujours mieux établies et de portée toujours moins limitée s'adaptent à des domaines de plus en plus étendus. Elle préside au fusionnement de conceptions qui, par leurs origines, ressortissent à de multiples compartiments dont chaque jour le nombre augmente.

Ces fusionnements sont, par exemple, la raison d'être du Calcul vectoriel ou de l'Analyse générale, comme ils le furent un jour de la Mécanique rationnelle.

Pour qu'un chapitre quelconque de la mathématique abstraite puisse reposer sur une base solide, il faut, nous l'avons dit, que le réel auquel appartient ce chapitre ait été bien organisé, bien délimité, bien précisé, ce qui suppose une « axiomatique » en rapport, groupant et coordonnant, sous formes d'axiomes et de postulats, un certain nombre de données d'où tout ce qui rentre dans le dicastère puisse s'obtenir déductivement (1). Ce tout constitue alors la division de mathématique abstraite correspondante.

Comme la division peut être plus ou moins étendue, l'axiomatique qui en constitue le fondement peut être d'une abstraction plus ou moins grande. M. Hilbert a pris soin de le faire voir.

Pour lui, qui cependant n'ignore pas la valeur de la vision directe et le parti que l'on en peut tirer (2), l'idéal serait, de parvenir, pour chaque discipline mathématique spéciale, à une axiomatique particulière de laquelle tout découlerait en quelque sorte mécaniquement.

Lebesgue, dans cet ordre d'idées, ayant fait remarquer que « c'est peut-être une infirmité de vouloir savoir à chaque instant ce que l'on fait, et de remonter toujours à une signification intuitive », objecte qu'il est des personnes qui ne savent se servir d'outils et qui, à chaque instant, ont besoin de se rendre compte du point de tricot qu'elles font pour arriver jusqu'à la fin. Lui, Lebesgue, se considère comme faisant partie de cette catégorie de « tricoteurs (3) ».

Une mathématique abstraite, plus exclusive encore que celle dont M. Hilbert s'est fait le mandataire, se rencontre et se rattache à cette branche récente et importante de la logique — la logique symbolique ou logistique — dont Leibniz, le premier, entrevit le rôle qu'elle pourrait jouer et qui comprend la « pasigraphie » de Peano.

Poincaré, ayant fait allusion à cette dernière, à cette « sorte d'al-

(1) Voir Hilbert, *Axiomatisches Denken.* La matière de cet important mémoire avait fait l'objet d'une conférence à Zurich en septembre 1917. On la trouve, en français, sous la plume de M. Arnold Reymond dans l'*Enseignement mathématique*, XX[e] année, p. 122 ; dans la langue originale au tome 78 des *Mathematische Annalen* et dans le tome III des *Gesammelte Abhandlungen*, p. 146, de M. Hilbert. — (2) Voir D. Hilbert und S. Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie.* Berlin, Springer, 1932. — (3) *Entretiens...*, p. 104.

gèbre universelle où tous les raisonnements sont remplacés par des symboles et des formules », termine en faisant observer combien « cette préoccupation peut sembler funeste et puérile et... combien elle serait desséchante pour les chercheurs dont elle tarirait promptement l'originalité [1] ».

En face donc de

... la tâche si dure
Qu'impose le mutisme ingrat de la nature,

les mathématiciens se répartissent en équipes diverses.

Parmi elles, celle des extrémistes à outrance qui, opposant une fin brutale de non-recevoir à la psychologie, ne rêvent que d'une science où seuls l'automatique et l'abstrait auraient part.

Il y a loin de la coupe aux lèvres. L'hypothèse que fit miroiter Laplace s'avère maintenant chimérique. La mathématique, vaille que vaille, est œuvre de valeur humaine et l'on ne pense en définitive avec fruit que par images nettement substantielles.

La science, parfois, a ses anthropomorphismes. Au moment où Copernic et Galilée arrivent à concevoir le mouvement de la terre autour du soleil, ils « pensent visiblement à l'effort à faire pour mouvoir l'Univers, on les croirait attelés au manège chargé de le faire tourner ». « Si Poincaré avait été contraint de se rétracter, il l'aurait fait de bonne grâce ; ... au contraire, pour Galilée la rétractation est d'importance [2]. » De Galilée à Poincaré la science avait avancé, les concepts s'étaient précisés.

Quoiqu'il soit incontestable que « la matière n'est saisie que par des déterminations idéelles de plus en plus subtiles [3] », on ne peut dénier que « notre connaissance se fonde non sur ce qui pourrait être vrai dans l'abstrait, mais sur ce qui est posé dans le concret [4] » et que, comme le dit Lebesgue en entrant dans quelques détails, la logique ne crée pas la confiance.

Notre confiance résulte du fait « que le principe de toute certitude est la foi de la pensée en elle-même [5] », du fait aussi qu'un inflexible besoin de cohérence interne auquel nous ne pouvons que nous soumettre existe en nous.

(1) Henri POINCARÉ, *Dernières pensées...*, p. 268. — (2) Henri LEBESGUE, « Les Professeurs de Mathématiques du Collège de France », *Revue scientifique*, 60e année, avril 1922. — (3) GEX, *art. cité*, p. 180. — (4) *Itinéraire philosophique* de MAURICE BLONDEL. Propos recueillis par Frédéric Lefèvre. 1928, p. 52 (en note). — (5) Henri-L. MIÉVILLE, *Vers une philosophie de l'esprit ou de la totalité*. Lausanne, 1937, p. 29.

Il serait vain de vouloir « sauter hors de son ombre ». On ne peut s'évader d'un certain probabilisme.

Le mathématicien, malgré cela, accomplit une œuvre magnifique. Hardi navigateur, il découvre de nouveaux mondes. A l'orée de la forêt vierge, l'appel de l'invisible le subjugue. Il a toujours en chantier devant lui comme une toile de Pénélope. Ce que le matin il tisse n'est que du provisoire. Le soir, il s'en prend à l'ouvrage du matin, se proposant de faire mieux le lendemain.

*
* *

Un point final en cet endroit nous laisserait dans l'incomplet, les questions soulevées mettant en branle, somme toute, l'appareil entier du penser. Une acquisition d'ordre intellectuel dans un domaine quelconque ne semble pouvoir se réaliser que suivant des rythmes semblables à ceux que l'on a rencontrés.

Quel que soit l'objet sur lequel doit porter le jugement, l'esprit, au préalable et par disjonction du divers, doit le façonner, en faire une image simplifiée, un être de raison, un abstrait.

Alors, seulement, il peut y appliquer sa réflexion.

Typique, à ce propos, un texte de 1503, antérieur par conséquent à Kepler et à Newton.

« Notre intelligence », écrivait Lefèvre d'Etaples, « notre intelligence, qui s'efforce d'imiter l'Intelligence dont elle tient l'existence, compose elle-même des cieux fictifs et des mouvements fictifs ; ce sont des simulacres des vrais cieux et des vrais mouvements, et, dans ces simulacres, elle saisit la vérité comme s'ils étaient des traces laissées par l'intelligence divine du Créateur [1] ».

Sur le terrain juridique, on distingue, nous dit M. François Guisan, le droit positif — un réel fictif, dirons-nous, — issu de conceptions humaines, le droit positif dont on s'efforce de mettre en concordance le contenu avec « une valeur ou une justice supérieure que, traditionnellement, on appelle le Droit naturel [2] ».

Sous des auspices analogues, se présente la théologie.

« Partie du certain et de l'immuable », c'est-à-dire d'un réel qu'avant toute démarche elle a dû circonscrire, la théologie, a-t-on dit,

(1) Texte introductif à LECOMTE DU NOÜY, *L'Avenir de l'Esprit.* Paris, Gallimard, 1941. — (2) François GUISAN, « Note sur le Droit naturel », dans la *Revue de Théologie et de Philosophie.* 1940, p. 216.

« propose des interprétations et organise un système de démonstrations qui, sans être absolument clos, demeure acquis [1] ».

Similitude n'est pas identité. Aussi, laissons à de mieux informés le soin de poursuivre ces incursions lointaines et ne retenons que le divorce irréductible entre le mot et la chose, entre la pensée et la vie.

« Deux excès : exclure la raison, n'admettre que la raison » lit-on chez Pascal.

Avertissement décisif, prime au bon sens ! Il faut, en regardant en nous et hors de nous, ne pas négliger de tenir les deux bouts et de remplir en même temps tout l'entre-deux.

L'intelligence sans l'intuition n'est qu'une infirme ; l'intelligence sans la raison que mutilation !

Avec l'intuition, la joie de connaître ! Par l'intuition, les échappées sur les terres promises, les terres promises à la raison !

Vicié par l'abstraction, le formulé trop arrêté déçoit. L'intelligence, derrière le voile, pressent un ciel ouvert !

L'homme passe infiniment l'homme !

A ce nouvel impératif de Pascal, le laboureur plein de confiance s'éloigne, songeant à la moisson qui lève lourde des promesses de demain.

Gustave DUMAS.

(1) Voir : Th. CREMER, *Le problème religieux dans la philosophie de l'action.* Paris, Alcan, 1912, p. 15.