Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 9/10 (1887)

Heft: 20

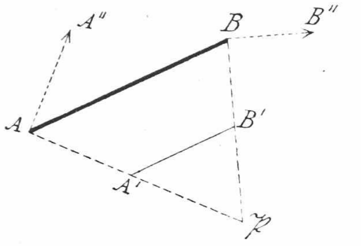
Inhaltsverzeichnis

Beitrag zur Theorie des ebenen Fachwerks.

Von *Heinr. Müller-Breslau*, Professor an der Technischen Hochschule in Hannover.

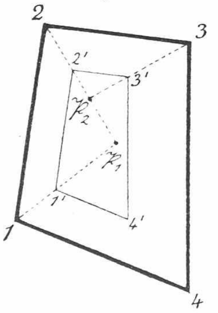
§ 1. Die vorliegende Abhandlung über das ebene Fachwerk stützt sich auf den bekannten Satz, dass die Bewegung einer starren Figur in einer festen Ebene in jedem Augenblicke auf eine Drehbewegung um einen festen Pol $\mathfrak{P}$ zurückgeführt werden kann. Die Lage dieses Poles ist bestimmt, sobald die augenblicklichen Bewegungsrichtungen AA'' und BB'' zweier Punkte A und B der Figur gegeben sind. Man hat nur nöthig, in jenen Punkten auf deren Bewegungsrichtungen Lothe zu errichten, und findet dann den Pol als den Durchschnittspunkt dieser Lothe. Fig. 1. Bedeutet ω die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung um $\mathfrak{P}$, so sind die Geschwindigkeiten irgend welcher Punkte A und B beziehungsweise: $\overline{AA''} = \omega \overline{\mathfrak{P}A}$ und $\overline{BB''} = \omega \overline{\mathfrak{P}B}$. Denkt man sich diese Geschwindigkeiten in gleichem Sinne um einen rechten Winkel gedreht, trägt also auf den Polstrahlen $A\mathfrak{P}$ und $B\mathfrak{P}$ die Strecken $\overline{AA'} = \overline{AA''}$ und $\overline{BB'} = \overline{BB''}$ auf, so ist $A'B' \parallel AB$, weil sich verhält $\overline{AA''} : \overline{BB''} = \overline{AA'} : \overline{BB'} = \overline{\mathfrak{P}A} : \overline{\mathfrak{P}B}$. Die Strecken AA' und BB' heissen die *senkrechten Geschwindigkeiten* der Punkte A und B.

Fig. 1.



§ 2. Wir betrachten jetzt eine ebene Stabverbindung (F), deren Knotenpunkte die Ziffern 1, 2, 3, ... n tragen sollen, und denken uns irgend eine Figur (F') gezeichnet, bestehend aus geraden Linien, durch welche die den Fachwerksknoten entsprechenden Punkte 1', 2', 3' .... n' mit einander verbunden werden, so zwar dass die Anzahl dieser Geraden mit der Anzahl der Stäbe des Fachwerks übereinstimmt und jedem Stabe mn eine ihm parallele Gerade $m'n'$ der Figur F' entspricht. Werden dann die Strecken mm' und nn' als die augenblicklichen senkrechten Geschwindigkeiten der Knoten m und n aufgefasst, so ist der Durchschnittspunkt $\mathfrak{P}$ der Geraden mm' und nn' der augenblickliche Pol des Stabes mn. Ist es nun möglich, zu der Fachwerksfigur F eine Figur F' zu zeichnen, welche der Figur F nicht ähnlich ist, so ergeben sich verschiedene augenblickliche Drehpunkte, und hieraus folgt, dass die gegenseitige Lage der Stäbe durch (endliche oder unendlich kleine) Drehungen der Stäbe um jene verschiedenen Pole geändert werden kann; das Fachwerk ist mithin kein starres.

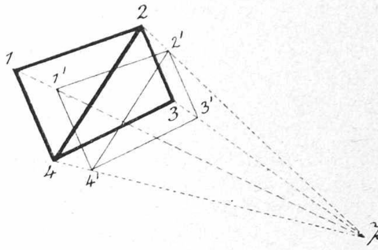
Fig. 2.



In den Figuren 2 und 3 sind zwei einfache Beispiele vorgeführt worden. Das erste Beispiel betrifft ein verschiebbares Viereck 1 2 3 4. Die Figur F' ist ebenfalls ein Viereck, dessen Seiten 1'2', 2'3', 3'4', 4'1' den Fachwerksstäben 1 2, 2 3, 3 4, 4 1 beziehungsweise parallel sind. Es lassen sich unendlich viele Vierecke 1'2'3'4' zeichnen, welche dem Vierecke 1 2 3 4 nicht ähnlich sind. Der Schnittpunkt $\mathfrak{P}_1$ der Geraden 1 1' und 2 2' ist (für den durch die Figur F' bestimmten augenblicklichen Bewegungszustand) der augenblickliche Pol des Stabes 1 2; der Schnittpunkt $\mathfrak{P}_2$ der Geraden 2 2' und 3 3' ist der augenblickliche Pol des Stabes 2 3 u. s. f.

Die Figur 3 stellt ein starres Viereck vor; hier ist es nicht möglich, eine Figur F' zu zeichnen, welche der Figur F nicht ähnlich ist. Die Geraden 1 1', 2 2', 3 3', 4 4' schneiden sich in dem gemeinschaftlichen Pole $\mathfrak{P}$; eine gleichzeitige Drehung der einzelnen Stäbe um verschiedene Pole ist nicht ausführbar.

Fig. 3.

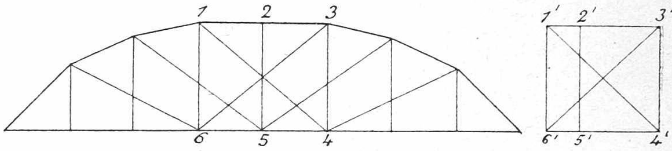


Die vorstehenden Betrachtungen sind von Nutzen, wenn die Frage nach der Starrheit eines Fachwerkes beantwortet werden soll. Es ist bekannt, dass die Anzahl r der Stäbe eines starren Fachwerks bei n Knotenpunkten mindestens $= 2n - 3$ sein muss, dass aber die Bedingung $r = 2n - 3$ keineswegs eine ausreichende ist. Wir können nun aussprechen:

Ist es möglich, zu der Fachwerksfigur F eine Figur F' zu zeichnen, welche der Figur F nicht ähnlich ist, so ist das Fachwerk kein starres, selbst wenn es 2n—3 Stäbe besitzt.

Ein beachtenswerthes Beispiel für die Anwendung dieses Satzes bildet der in der Fig. 4 dargestellte Träger, welcher vor einiger Zeit Gegenstand eines lebhaften Streites war. Die Gleichung $r = 2k - 3$ wird hier erfüllt; trotzdem

Fig. 4.

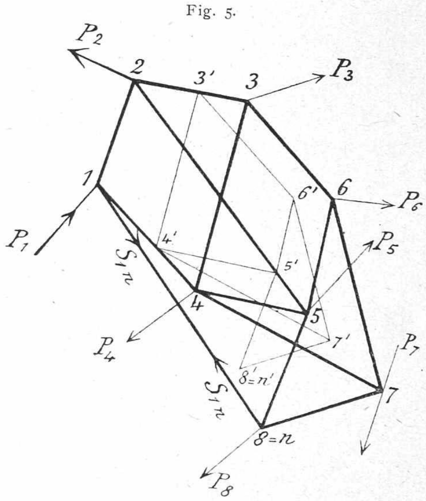


ist der Träger kein starrer, weil sich zu dem Sechseck 1 2 3 4 5 6, an welches die übrigen Knotenpunkte durch je zwei Stäbe angeschlossen werden, beliebig viele Figuren 1'2'3'4'5'6' zeichnen lassen, welche dem Sechseck nicht ähnlich sind.

§ 3. Die folgende, durch ein Beispiel eingeleitete Untersuchung soll nun zeigen, in welcher Weise die Figur F' auch zur *Berechnung der Spannkräfte des Fachwerks* benützt werden kann.

Wir betrachten ein Fachwerk, welches wir uns auf die folgende Weise entstanden denken. Es seien n Knotenpunkte in der Ebene gegeben; sie seien in beliebiger Reihenfolge mit den Ziffern 1, 2, 3, ... n versehen. Die Knoten 1, 2, 3, 4 seien durch die Stäbe 1 2, 2 3, 3 4, 4 1 verbunden, und an das so entstandene Gelenkviereck seien die übrigen Knoten durch je zwei Stäbe in der Weise angeschlossen, dass 5 verbunden wird mit 4 und 2, 6 mit 5 und 3 u. s. w., n mit $n-1$ und $n-3$.

Fig. 5.



Vergl. Fig. 5, in welcher $n = 8$ ist. Da das Viereck 1 2 3 4, *dessen Seite 1 2 wir als festliegend voraussetzen wollen*, nicht starr ist, so können die Knotenpunkte 2, 3, 4, ... n gegen einander verschoben werden. Alle diese Punkte sind aber *zwangläufig*, d. h. sie sind gezwungen, beim Eintreten von Verrückungen,