Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 17/18 (1891)

Heft: 3

Inhaltsverzeichnis

INHALT: Die inneren Kräfte eines belasteten Stabringes. Von Prof. W. Ritter. — Abänderung des Längenprofils der Seilbahn Territet-Glion. — Das neue eidg. Post- und Telegraphengebäude in St. Gallen (Schluss). — Preisausschreiben. — Miscellanea: Die Abänderungen der Eisenbahnfahrpreise. Die Kosten der Berliner Stadtbahn. Der Rauchverhütungsapparat. — Nekrologie: † Karl Pestalozzi. — Concurrenzen: Marktplatz in Basel. Wirthschaftsgebäude in den neuen Anlagen am Zürichhorn. — Vereinsnachrichten: Erklärung des st. gall. Ingenieur- und Architektenvereins. Stellenvermittelung. — Hiezu eine Lichtdruck-Tafel: Neues eidg. Post- und Telegraphen-Gebäude in St. Gallen. Schalterhalle.

Die inneren Kräfte eines belasteten Stabringes.

Von Prof. *W. Ritter.*

In der Statik der Bauconstructionen stösst man dann und wann auf die Aufgabe, die Spannungen und elastischen Formänderungen zu bestimmen, welche ein geschlossener Ring von Stäben unter dem Einflusse beliebiger äusserer Kräfte erleidet. Abgesehen von den allereinfachsten Fällen lässt sich diese Aufgabe bekanntlich nur dadurch lösen, dass man die elastischen Formänderungen der einzelnen Stäbe berücksichtigt. Nachstehend soll eine allgemeine Lösung der Aufgabe erklärt werden.

Die Gesetze des Gleichgewichts kann man bei einem belasteten Stabringe auf unendlich viele Arten befriedigen. Am übersichtlichsten geschieht dies im Allgemeinen dadurch, dass man die gegebenen Kräfte zu einem geschlossenen Kräftepolygon vereinigt und in das Stabgebilde ein geschlossenes Seilpolygon einzeichnet; dann entspricht jedem durch einen Stab gelegten Querschnitte eine bestimmte Seilpolygonseite, das heisst eine bestimmte Kraft, aus der sich die im Stabinneren herrschenden Zug-, Druck- und Scherspannungen nach bekannten Regeln leicht ermitteln lassen.

Unter den unendlich vielen Seilpolygonen, die sich zeichnen lassen, ist jedoch nur eins das richtige, und um dieses zu finden, müssen die Formänderungen der Stäbe berücksichtigt werden. Zu diesem Zwecke machen wir von den „Elasticitätsellipsen" der Stäbe Gebrauch.

Im ersten Theile meiner „Anwendungen der Graphischen Statik" *) (Nr. 31—34) ist gezeigt worden, dass sich für jeden geradlinigen oder gekrümmten Stab eine Ellipse zeichnen lässt, welche die unter dem Einfluss einer äusseren Kraft eintretende Formänderung auf einfache Weise anzugeben gestattet. Ist der Stab geradlinig, so fällt die grosse Achse dieser Ellipse mit der Stabachse zusammen. Ist ferner der Querschnitt des Stabes constant, so wird die halbe kleine Achse der Ellipse gleich i, gleich dem Trägheitshalbmesser des Querschnittes und die halbe grosse Achse gleich:

$$\sqrt{{}^1/_{12}\, s^2 + \frac{k\,E\,i^2}{G}},$$

worin s die Stablänge, E und G die Elasticitätscoefficienten für Zug und Schub und k einen von der Querschnittsform abhängigen Coefficienten bedeutet. Meistentheils darf der Einfluss der scherenden Spannungen auf die Formänderungen vernachlässigt, das heisst $G = \infty$ gesetzt werden; dann wird die halbe grosse Achse einfach gleich:

$$\sqrt{{}^1/_{12}}\; s = 0{,}289\; s.$$

Bei veränderlichem Querschnitte, sowie bei gekrümmter Stabachse hat man die Elasticitätsellipse ähnlich wie die Centralellipse unregelmässiger Figuren zu ermitteln; doch reichen auch häufig Annäherungswege aus.

Neben der Elasticitätsellipse muss für den Stab noch das sogenannte „elastische Gewicht" bestimmt werden. Es ist bei constantem Stabquerschnitte gleich $\frac{s}{E\,J}$, bei veränderlichem Querschnitte gleich der Summe der „Gewichte" der einzelnen Stabelemente.

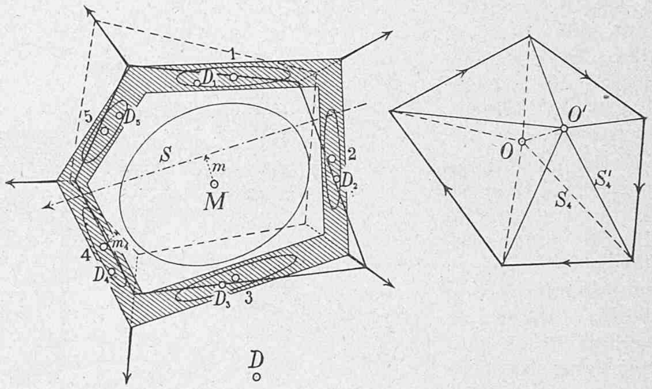
Sind Ellipse und Gewichte bekannt, so gilt der Satz: Steht ein Stab unter dem Einflusse einer äusseren Kraft, so dreht sich das eine Stabende gegenüber dem andern um den Antipol der Kraftrichtung bezüglich der Elasticitätsellipse des Stabes, und der Drehungswinkel ist gleich dem elastischen Gewichte des Stabes multiplicirt mit dem statischen Momente der Kraft bezogen auf den Ellipsenmittelpunkt.

*) Verlag von Meyer & Zeller in Zürich, 1888.

Auf Grund dieses Satzes ergibt sich für die gestellte Aufgabe folgende allgemeine Lösung.

Es werde ein aus fünf Stäben zusammengesetztes Polygon von fünf an den Ecken angreifenden, unter sich im Gleichgewicht stehenden Kräften belastet. Diese Kräfte seien mit Hülfe eines Kräftepolygons und eines willkürlich gewählten Poles O zu einem geschlossenen Seilpolygone verbunden worden.

Verschiebt man im Kräftepolygon den Pol O nach O' und zeichnet mit Hülfe von O' ein zweites Seilpolygon, so



haben die beiden Polygone bekanntlich eine gerade Linie als Collineationsachse gemein, das heisst je zwei entsprechende Seilpolygonseiten schneiden sich auf ein und derselben Geraden, und diese Gerade läuft parallel zur Verbindungslinie beider Pole.

Es ist klar, dass das zweite Seilpolygon aus dem ersten auch dadurch hervorgeht, dass man zu jeder der fünf Seilkräfte des ersten Polygons die Kraft $OO' = S$ hinzufügt.

Um nun unter den unendlich vielen möglichen Seilpolygonen das richtige zu finden, zeichnen wir zunächst mit Hülfe des willkürlichen Poles O ein beliebiges (in der Figur gestrichtes) Seilpolygon. Dann denken wir uns das Stabpolygon an einer Ecke, beispielsweise am Zusammenstosspunkte der Stäbe 1 und 5, durchschnitten, halten den Anfangspunkt des ersten Stabes fest und verfolgen die Bewegung, welche der Endpunkt des fünften Stabes unter der Wirkung der fünf Stabkräfte ausführt.

Denkt man sich hierbei zunächst bloss einen einzigen Stab, sagen wir den vierten, elastisch, so erfährt das bewegliche Ende des fünften Stabes eine Drehung um den Antipol D_4 der vierten (gestrichten) Seilpolygonseite hinsichtlich der Ellipse des vierten Stabes, und der Drehungswinkel δ_4 ist gleich $G_4\, S_4\, m_4$, wenn G_4 das elastische Gewicht dieses Stabes bedeutet.

In gleicher Weise bestimmen wir für jeden der andern Stäbe den Drehpunkt und den Drehwinkel und summiren hierauf sämmtliche Einzelbewegungen. Diese Summation gestaltet sich am einfachsten dadurch, dass man jedem der Drehpunkte den Werth des Drehwinkels als Belastung beilegt und den Schwerpunkt dieser belasteten Punkte bestimmt. Bei zahlreichen Punkten wird man sich hiebei am besten zweier Seilpolygone bedienen. Es sei D der gesuchte Schwerpunkt und $\delta = \Sigma_1^5\, (G\, S\, m)$ der gesammte Drehwinkel.

Das richtige Seilpolygon wird nun erhalten, wenn man zu den Stabkräften eine Kraft S hinzufügt, welche so gewählt wird, dass sie die besprochene Bewegung wieder rückgängig macht. Da die Kraft S sämmtliche Stäbe des Polygons beeinflusst, so müssen wir noch durch Vereinigung der fünf Stabellipsen die Elasticitätsellipse des ganzen Polygons zeichnen. Dann liegt die Kraft S in der Antipolaren des