

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 27/28 (1896)
Heft: 8

Artikel: Das Beil-Planimeter
Autor: Gentilli, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-82382>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Das Beil-Planimeter. — XXIV. Generalversammlung der Gesellschaft ehemaliger Polytechniker. II. (Schluss.) — Die Hochbauten der Schweiz. Landesausstellung von 1896 in Genf. III. — Zur Generalversammlung der G. e. P. in Genf, Festbericht. I. — Miscellanea: Umbau des Bahnhofes Zürich. Eidg. Polytechnikum, Diplom-Erteilung. — Konkurrenzen:

Vereinshaus in Prag. Kunstgewerbe-Museum in Köln. — Berichtigung. — Exposition nationale à Genève.

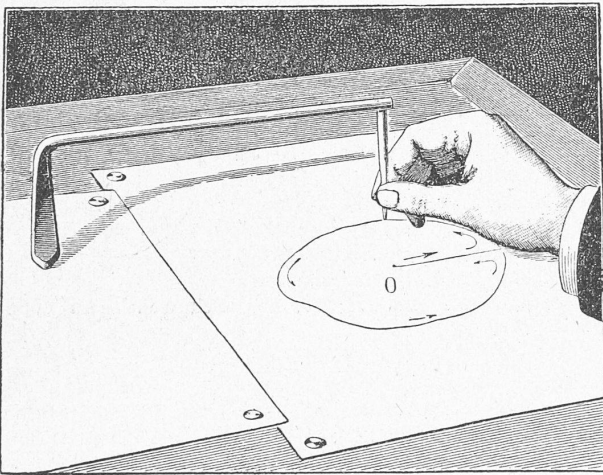
Hiezu eine Tafel: Schweiz. Landesausstellung in Genf 1896: Palast der Schönen Künste. Uhrturm.

Das Beil-Planimeter.*)

Von Oberingenieur A. Gentilli, Docent am eidg. Polytechnikum.

Ein Kapitän des dänischen General-Stabes Namens Prytz hat vor einiger Zeit in Kopenhagen ein neues Planimeter der Oeffentlichkeit übergeben, welches durch seine Einfachheit ebenso sehr überrascht, wie durch seine Leistung. Es besteht nämlich nur aus einem Stäbchen von 0,30 m Länge, welches an einem Ende zu einer Spitze, am anderen Ende zu einer beilförmigen Schneide umgebogen ist (s. Fig. 1). Umfährt man eine beliebige Figur mit der Spitze

Fig. 1.



und markiert man die Berührungspunkte der Schneide mit dem Papier vor und nach der Umfahrung, so gibt die Distanz dieser beiden Punkte mit der Länge des Stabes multipliziert den Flächen-Inhalt der Figur. Man hat dabei nur darauf zu achten, dass die grösste Dimension der Figur die halbe Länge des Stabes nicht übertreffe, dass also zu grosse Figuren in Partien zerlegt werden und dass die Umfahrung in einer bestimmten Weise vor sich gehe, die wir noch näher beschreiben werden.

So einfach aber die Konstruktion dieses Planimeters auch ist, so schwerverständlich erscheint dessen Theorie, wenn man die dem Instrumente beigegebene kleine Schrift des Kapitän Prytz durchliest. Ein Herr Poulain von der Universität Angers hat sich hierdurch veranlasst gefunden, die von Prytz übergangenen Zwischenstufen des Calculs nachzuholen, allein auch seine Darstellung geht von unbewiesenen Voraussetzungen aus und gelangt zu einem vorher angekündigten Resultate auf rein analytischem Wege mit einem grossen Aufwand rechnerischer Transformationen, ohne die eigentliche Natur der Sache im mindesten zu erklären, wie dies leider so häufig geschieht. Ein rechnungsmässiger Beweis ist eben noch keine Erklärung, freilich ist auch eine Erklärung noch kein Beweis; bei einem so interessanten und verwickelten Problem möchte man aber vor Allem eine Erklärung haben und will ich daher versuchen, in Folgendem eine solche in möglichst anschaulicher Weise zu geben:

Die Schneide des Planimeters kann sich nur in der Richtung des Stabes verschieben, oder sich um ihren Berührungspunkt mit dem Papier drehen; durch den Umstand,

dass ein seitliches Gleiten wegen der scharfen Schneide ausgeschlossen ist, unterscheidet sich dieses Instrument wesentlich von den mit Rollen versehenen Planimetern, bei welchen auch ein seitliches Gleiten stattfindet. Befährt man mit der Spitze des Beil-Planimeters eine beliebige gerade oder krumme Linie, so beschreibt das Beil eine Traktorie oder Zug-Curve, zu welcher die einzelnen Lagen des Stabes stets Tangenten bilden. Die bei einer solchen Befahrung von den einzelnen Lagen des Stabes bestrichene Fläche kann man sich daher aus einer Reihe von Sektoren zusammengesetzt denken, deren Bögen unendlich klein und deren Scheitel um unendlich kleine Strecken längs eines Schenkels verschoben sind (s. Fig. 2); die Dreieckchen a, a , können als unendlich klein der II. Ordnung vernachlässigt werden. Denkt man sich alle diese Sektoren wieder in einen gemeinschaftlichen Scheitel C vereinigt, so wird der Sektor CAB gleiche Fläche mit der Figur $CDEFA$ haben.

Wählt man zunächst zur Grund-Figur einen Kreis und wiederholt man die Umfahrung mehreremale, so erhält man eine ganze Serie von Traktorien, die sämtlich symmetrisch um den Kreis gelagert sind. Bei jeder Umfahrung kommt der Stab zweimal in eine zum Kreise normale Lage und zwar einmal zur konvexen, das anderemal zur konkaven Seite; der ersteren Lage entspricht der äussere, der zweiten der innere Wendepunkt der Traktorie.

Nennt man den Teil der Traktorie, welcher einer vollen Umfahrung der Grundfigur entspricht, eine Phase und versinnlicht man sich die einzelnen Lagen des Stabes bei einer Umfahrung, so findet man, dass je nach der Anfangslage des Stabes die einzelnen Phasen, selbst bei symmetrischen Figuren, verschiedene Ausdehnung und bei unsymmetrischen Figuren auch verschiedene Formen annehmen; ja bei konkaven Contouren und einspringenden Ecken ergeben sich sogar mehr als zwei Wendepunkte oder Spitzkehren für ein und dieselbe Phase, da jeder normalen Lage des Stabes zur Leitkurve ein Wendepunkt der Traktorie entspricht.

Beginnt man die Umfahrung z. B. mit einer tangentiellen Lage des Stabes an der linken Seite der Figur und markiert man mehrere einzelne Stellungen desselben, bis man wieder zum Anfangspunkt zurückgekehrt ist (s. Fig. 3), so wird man finden, dass der Stab von links nach rechts fortschreitend zunächst den ausserhalb der Figur liegenden Raum bestreicht, bis er bei der tangentiellen Lage an der rechten Seite der Figur angelangt ist und dass er von da an seine Richtung wechselt und von rechts nach links fortschreitend den teils ausserhalb, teils innerhalb der Figur liegenden Raum bestreicht. Schiebt man die in verschiedenem Sinne befahrenen Sektoren-Gruppen wieder alle in einen gemeinschaftlichen Scheitel C zusammen, indem man

Fig. 2.

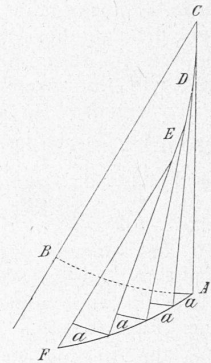
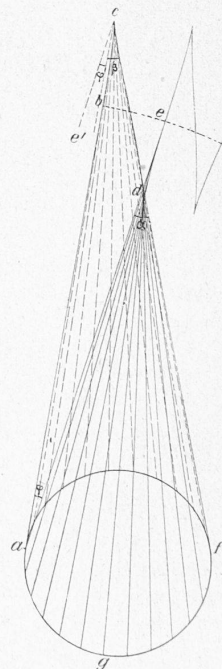


Fig. 3.



* Auf dänisch «Stang-Planimeter».

Entfernung der beiden markierten Punkte mit der Länge des Stabes multipliziert, giebt die gesuchte Fläche, vorausgesetzt, dass man den Schwerpunkt richtig getroffen hat, um aber den etwaigen Fehler bei der Wahl des Punktes *S*

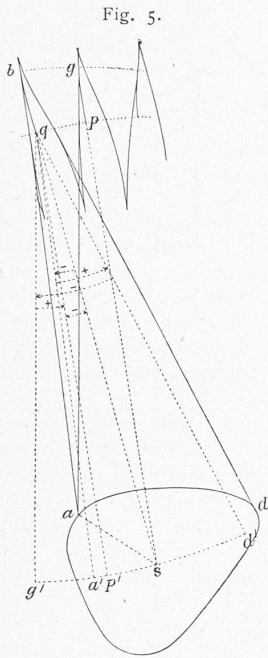


Fig. 5.

zu korrigieren, dreht man die Zeichnung um 180° , wiederholt die ganze Operation auf's neue im entgegengesetzten Sinne und nimmt das Mittel der beiden Resultate. Auf diese Weise wird auf dem Schwerpunktskreise ein konstanter Bogen $l\varphi$ abgeschritten, da die Hülfsstraktorien, welche bei der Bestreichung der Geraden *aS* entstehen, nur ein zeichnerischer Behelf für die Ziehung der Radien sind, mit welchen sie bei einem günstigen Verhältnis von $\frac{l}{2R}$ sehr nahe zusammenfallen. Dass durch die Radien die variablen Phasenbilder aber wirklich auf ein konstantes Mass reduziert werden, geht daraus hervor, dass die Differenzen der Phasenlängen auf dem Kreise aus dem Anfangspunkte und auf dem Schwerpunkts-Kreise sich wie die Distanzen dieser beiden Kreise *v* erhalten.

Verfolgt man in Fig. 6 wieder die einzelnen Lagen des Stabes, so findet man, dass nun nicht mehr der variable Sektor, der seine Spitze im Anfangspunkte, sondern ein konstanter Sektor, welcher seine Spitze im Schwerpunkte hat, die algebraische Summe der zusammengesetzten Einzel-Sektoren repräsentiert, während sich für die algebraische Summe der auseinandergezogenen Einzel-Sektoren die Fläche *sbefgs* aber mit negativem Vorzeichen und die Grundfigur mit positivem Vorzeichen ergibt. Bezeichnet man nämlich die von rechts nach links (positiv) bestrichenen Flächen durch vertikale Schraffierung, die von links nach rechts (negativ) bestrichenen durch horizontale Schraffierung, so findet man, dass die Fläche *sab* positiv; *acd* negativ, *edbf* positiv, *gia* negativ und *gas* negativ bestrichen werden. Es werden demnach *mbk*, *ond* und *iaw* einmal positiv und einmal negativ bestrichen, fallen daher weg; *awkm* wird zweimal positiv und zweimal negativ bestrichen, fällt daher weg; *ams* wird zweimal positiv und einmal negativ bestrichen, bleibt daher einmal positiv stehen; *mngs* wird einmal positiv und zweimal negativ bestrichen, bleibt daher einmal negativ stehen; *smn* wird als positiv zur Figur und als negativ zu *scfgs* gerechnet; *kef* und *lgo* endlich sind jedes bloss einmal negativ bestrichen.

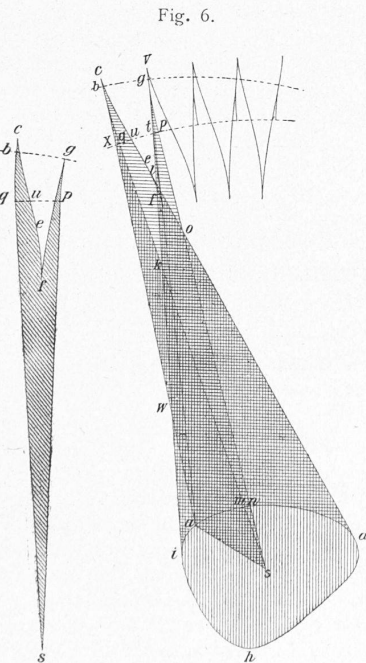


Fig. 6.

Die algebraische Summe sämtlicher bestrichener Flächen reduziert sich daher auf die positiv bestrichene Grundfigur und auf die negativ bestrichene Fläche *sbefgs*. Diese

letztere kann aber gleich dem Sektor *sqp* gesetzt werden da $ult = xcu$ und $bxq = tgp$, also $ult = cqu + tgp$. Die Fläche *sbefgs*, die denselben Centriwinkel mit dem Sektor *sqp* hat, kann also gleich $-\frac{l^2\varphi}{2}$ gesetzt werden und man hat wieder die Relation $\frac{l^2\varphi}{2} = -\frac{l^2\varphi}{2} + f$ oder $f = l^2\varphi$.

Auch in diesem Falle lässt sich der Beweis der allgemeinen Gültigkeit direkt nur auf analytischem Wege führen; doch kann man auch hier wieder die Richtigkeit der Relation an den zwei extremen typischen Fällen mit der normalen Anfangslage des Stabes darlegen, woraus sich dann das Zutreffen derselben auch für alle intermediären Fälle von selbst ergibt. Die Konstanz des Bogens $l\varphi$ auf dem Schwerpunktskreise für jede Anfangslage bei einer noch so unregelmässigen Figur, worauf die ganze Methode beruht, hat für den ersten Anblick etwas überraschendes. Algebraisch erklärt sich die Sache wohl dadurch, dass die beiden Summanden in dem obigen Ausdruck für die Fläche, wegen der Halbierung der Traktorie durch den Schwerpunktskreis einander gleich sind und da die Summe konstant ist, so müssen auch die Summanden d. h. die Sektoren und mithin auch ihre Bögen konstant sein; will man aber eine anschauliche Erklärung, so bedenke man, dass bei Figuren von sehr ungleichen Achsen (s. Fig. 7), die

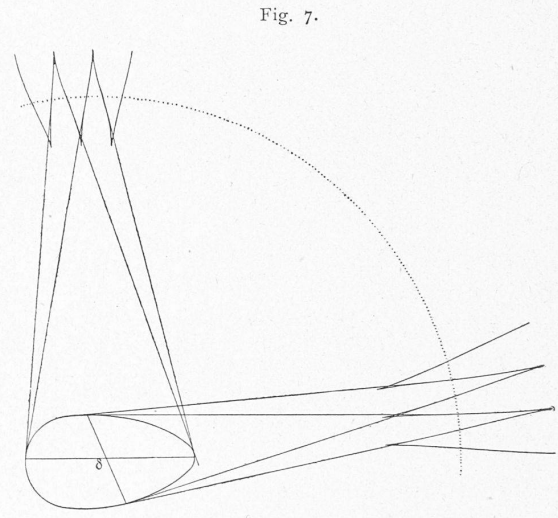


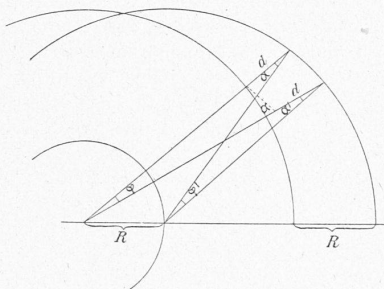
Fig. 7.

in der Richtung der kleineren Achse gelegene Traktorie grössere Oeffnungen hat d. h. mit ihren tangentiellen Randstrahlen grössere Winkel einschliesst, als die in der Richtung der grösseren Achse gelegene, weil im ersteren Falle die Schenkel der betreffenden Winkel eine grössere Dimension der Figur umspannen und ihre Scheitel ausserdem noch näher zur Figur liegen, als im zweiten Falle: man sieht aber auch dass die Traktorie mit den grösseren Oeffnungen kürzere Zweige hat, als jene mit den kleineren Oeffnungen, weil ja der Abstand der äusseren von den inneren Spitzkehren bei ein und derselben Phase gleich ist der Achse der Figur, welche in der Richtung der betreffenden Normalen liegt. Die Oeffnungen der Traktorien sind also proportional derjenigen Achse der Figur, welche von ihren Randstrahlen umspannt wird, die Länge der Zweige aber sind derjenigen Achse der Figur proportional, welche in der Richtung der betreffenden Normalen liegt. Es kompensieren sich daher die längeren Zweige mit den kleineren Oeffnungen und die kürzeren Zweige mit den grösseren Oeffnungen derart, dass die Phasenlängen auf dem Schwerpunktskreise alle einander gleich werden. Bei allen diesen Betrachtungen ist immer stillschweigend vorausgesetzt worden, dass $l > 4R$ wobei unter *R* eine Halbachse der Figur verstanden ist; denn nur unter dieser Voraussetzung können die Zweige der Traktorie als nahezu geradlinig und ihre äusseren und inneren Abschnitte als gleich gelten. Wirklich gleich sind diese Abschnitte nicht, wie selbst bei regelmässigen Figuren aus

der Beobachtung hervorgeht, dass selbe bei der Umfahrung in positivem und negativem Sinne in *ungleiche* Hälften geteilt werden und daher auch die Bögen, welche die entsprechenden Traktorien-Abschnitte auf dem Schwerpunktskreise interceptieren, nicht gleich sein können. Man kann sich übrigens von dem Maximalunterschiede dieser Abschnitte leicht Rechenschaft geben, wenn man als Grundfigur einen Kreis wählt und die ungünstigste Annahme von $l = 4R$ macht. Die Flächen-Inhalte der Traktorienabschnitte verhalten sich dann wie die Winkel ihrer tangentiellen Randstrahlen d. h. wie $\alpha : \beta$ oder da $\beta = \varphi + \alpha$ wie $\alpha : \alpha + \varphi$. Für $l = 4R$ ist aber $l^2 \varphi = 16R^2 \varphi = R^2 \pi$ und also $\varphi = \frac{\pi}{16} = 11^\circ 15'$. Der Fehler, den man begeht, indem man beide Abschnitte gleich setzt beträgt also im Verhältnis zur ganzen zu messenden Figur $11^\circ 15' : 360$ oder 0,031.

Ein weiterer Fehler wird dadurch begangen, dass der durch die Hilfs-Traktorien auf dem Schwerpunktskreise interceptierte Bogen dem durch die Haupt-Traktorien

Fig. 8.



interceptierten Bogen gleich gesetzt werden, während diese Bögen nicht genau gleich sind. Mit dem Abstände der beiden Kreise (s. Fig. 8) wächst nämlich die längere Kathete des Abschnittes der Hilfsstraktorie (wenn man diesen Abschnitt mit einem rechtwinkligen Dreieck assimiliert) und infolge dessen (den Winkel α als gleichbleibend angenommen) auch die kürzere Kathete. Bezeichnet man den Abstand der beiden Kreise an einem Schenkel des Winkels φ mit d , so wird unter der Voraussetzung $l = 4R$ und $\varphi = \frac{\pi}{16}$ der Abstand am anderen Schenkel $d + \frac{R}{8}$ sein. Die kürzere Kathete ist im ersten Falle $d \cdot \operatorname{tg} \alpha$ und im zweiten Falle $(d + \frac{R}{8}) \operatorname{tg} \alpha$. Die Flächen der beiden Abschnitte sind also $d^2 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$ und $(d + \frac{R}{8})^2 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$ und die Differenz der Flächen ist $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} (\frac{R^2}{64} + \frac{dR}{4})$. Im ungünstigsten Falle für $d = R$ wird dieselbe $\frac{17}{128} R^2 \operatorname{tg} \alpha$ oder 0,133 des grösseren Abschnittes. Für $d = R$ wo der Abschnitt der Hilfs-Traktorien zugleich sein Maximum erreicht, wird derselbe gleich dem halben Abschnitte der Haupt-Traktorie, das ist (immer unter der vorigen Voraussetzung $l = 4R$) $\frac{R^2}{4} 34^\circ 35'$ oder 0,024 der Hauptfigur; die grösste Differenz der Abschnitte der Hilfsstraktorien ist also $0,133 \cdot 0,024 = 0,0032$ der Grundfigur und der Gesamtfehler $0,0032 + 0,0310 = 0,0342$ der Grundfigur im ungünstigsten Falle! Die Fehler werden aber bedeutend kleiner, wenn das Verhältnis $\frac{l}{4R}$ ein günstigeres wird, auch kann sich der Fehler wegen der Hilfsstraktorien unter Umständen mit jenem der Haupt-Traktorien teilweise kompensieren anstatt sich zu summieren.

Was die Korrektur wegen des unrichtigen Schwerpunktes betrifft, so erhellt die Richtigkeit der angegebenen Methode aus folgendem: Angenommen man habe die zweimalige Umfahrung in entgegengesetztem Sinne von einem Punkte s' aus vorgenommen, welcher nicht der richtige Schwerpunkt ist und man habe dabei einmal den Bogen $l\varphi'$ das

anderemal den Bogen $l\varphi''$ erhalten, während $l\varphi$ der Bogen wäre, den man erhalten hätte, wenn man vom richtigen Schwerpunkte s ausgegangen wäre; so wird $l\varphi'$ gerade um so viel zu klein sein, als $l\varphi''$ zu gross ist, oder umgekehrt, sodass also $l\varphi' = \frac{l\varphi' + l\varphi''}{2}$.

Warum Kapitän Prytz überhaupt den Schwerpunkt anstatt des Halbierungspunktes der jeweilig in der verlängerten Normalen liegenden Achse der Figur wählt, hat vermutlich nur den Zweck, einen einzigen Ausgangspunkt für alle möglichen Anfangslagen zu gewinnen; während der Halbierungspunkt der Achse für jede Anfangslage ein anderer wäre.

Genaugenommen ist aber weder die Methode des Schwerpunktes, noch jene des Halbierungspunktes die richtige; denn die Traktorien Abschnitte können nur dann gleich werden, wenn sich ihre Höhen umgekehrt verhalten, wie ihre Winkel und da der Winkel der inneren Spitzkehre stets der grössere ist, weil sein Scheitel näher zur Figur liegt und beide Winkel nahezu dieselbe Achse der Figur umspannen, so müsste der Kreis, welcher die Traktorien in gleiche Abschnitte teilen soll, näher zur inneren Spitzkehre geführt werden als zur äusseren. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist also weder der Halbierungspunkt der in der Normalen liegenden Achse, noch auch der Schwerpunkt, da die Lage des letzteren von obiger Bedingung ganz unabhängig ist.

Der Fehler wegen der Substitution der Sehne für den Bogen bei der Messung der Distanz zwischen den beiden End-Stellungen des Beils beträgt bei dem Maximalwinkel von $11^\circ 15'$ und bei einer Länge des Stabes von 300 mm, wie sie sich für die Praxis empfiehlt, nicht ganz 0,2 mm. Man sieht also, dass die im Prinzipie begründeten Fehler in sehr vielen Fällen der Praxis unerheblich sind und dass das Instrument wegen seiner grossen Einfachheit und Billigkeit gewiss verdient verbreitet zu werden. Zur Verhütung von grösseren Fehlern, wie sie sich leicht bei ungenauer Umfahrung ergeben können, namentlich zur Vermeidung des seitlichen Gleitens empfiehlt sich eine horizontale Lage des Zeichenblattes, ein faltenloses dünnes Papier auf weicher Unterlage, eine Beschwerung des Stabes durch Aufsetzung kleiner Gewichte und ein öfteres Wiederholen der Operation. Das Blatt, auf welchem das Beil seine Traktorien verzeichnet, kann selbstverständlich von dem Blatte, welches die Grundfigur enthält, getrennt sein; man braucht es nur auf demselben Brette zu befestigen. Bei Beobachtung dieser Vorsichten und bei Einhaltung der Regel $l > 4R$ wird man gute Resultate erlangen.

XXIV. Generalversammlung der Gesellschaft ehemaliger Studierender

der eidgenössischen polytechnischen Schule in Zürich.

Samstag den 7. August 1896 bei Anlass der

Schweizerischen Landesausstellung

in der „Brasserie Handwerk“ zu Genf.

II. (Schluss.)

3. Die Herren Bundesrat Ruffy und Schulratspräsident Bleuler danken schriftlich für die an sie ergangene Einladung zur Teilnahme an der Versammlung und bedauern, derselben infolge geschäftlicher Verhinderung nicht beiwohnen zu können. An der Versammlung ist die Regierung des Kantons Genf durch den Vorsteher des Baudepartements, Herrn Boissonnaz, und der Stadtrat, sowie das Central-Komitee der Landes-Ausstellung durch Herrn Turrettini vertreten. Vom Central-Komitee des Schweiz. Ingenieur- und Architekten-Vereins ist Herr Professor Ritter anwesend.

4. Bevor er zu den Verhandlungen der Traktandenliste übergeht, gedenkt der Präsident in erster Linie derjenigen Ehrenmitglieder und Mitglieder, welche seit unserer letzten Generalversammlung dahingegangen sind. Das Mitgliederverzeichnis giebt deren Namen. Manche hoffnungsvoll stre-