

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 47/48 (1906)  
**Heft:** 7

**Artikel:** Berechnung von eingespannten Gewölben  
**Autor:** Mörsch, E.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-26057>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### Berechnung von eingespannten Gewölben.

Von Professor E. Morsch in Zürich.

Im nachstehenden soll eine für die praktischen Zwecke des Brückenbaues brauchbare Methode der Berechnung von Gewölben als eingespannte elastische Bögen vorgeführt werden.

Es handle sich zunächst um einen symmetrischen Bogen  $AB$  (Abb. 1); denken wir uns das linke Auflager bei  $A$

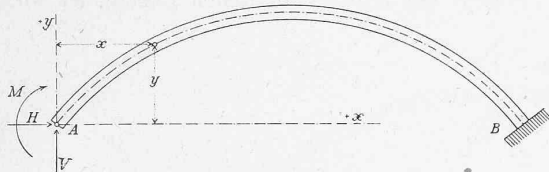


Abb. 1.

weggenommen, so entsteht ein bei  $B$  eingespannter, frei ausladender Balken. Soll an der Spannungsverteilung nichts geändert werden, dann müssen im linken Kämpferquerschnitt bei  $A$  die Reaktionen  $H, V$  und  $M$  angebracht werden, die vor Wegnahme des Widerlagers dort gewirkt haben. Aus der Bedingung, dass bei unveränderlichen Widerlagern der Kämpferquerschnitt  $A$  weder eine horizontale, noch eine vertikale Verschiebung, noch eine Drehung erfahren darf, lassen sich dann drei Gleichungen ableiten, aus welchen für einen bestimmten Belastungszustand die drei Unbekannten  $H, V$  und  $M$  durch Elimination bestimmt werden können.

Die Deformationsgleichungen ergeben sich wesentlich einfacher und die Arbeit der Elimination fällt ganz weg, wenn wir die drei Reaktionen  $H, V$  und  $M$  an einem gewissen

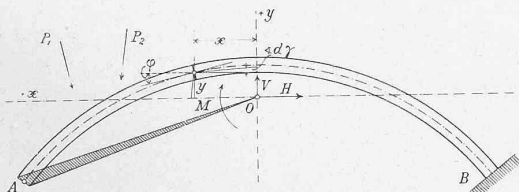


Abb. 2.

Punkt  $O$  angreifen lassen, der dann in starrer Verbindung mit dem linken Kämpferquerschnitt zu denken ist (Abb. 2). Wenn der Kämpferquerschnitt seine Lage nicht ändern soll, dann muss auch der Punkt  $O$  in Ruhe bleiben und der Kämpferquerschnitt darf keine Drehbewegung um ihn ausführen. Die Verschiebungen des Kämpferquerschnitts sind bedingt durch die Deformationen der einzelnen Bogenelemente. Auf jeden Bogenquerschnitt  $x$  wirkt ein Biegemoment  $M_x$ , eine Normalkraft  $N_x$  und eine Querkraft  $Q_x$ . Die letztere kann bei der Berechnung der Bögen unberücksichtigt bleiben, weil ihr Einfluss auf die Deformation verschwindend ist.

Die für den geraden Stab geltigen Biegeformeln können auch bei den Gewölben wegen der grossen Krümmungsradien und aus dem Grunde angewendet werden, weil die Proportionalität zwischen Spannungen und Dehnungen bei den Gewölbematerialien nicht genau zutrifft. Als dann ergibt sich infolge der Deformation:

durch das Moment  $M_x$  eine gegenseitige Drehung von zwei benachbarten Querschnitten um den Winkel

$$d\gamma = \frac{\sigma}{E} \cdot \frac{ds}{e} = \frac{M_x}{E \cdot J} \cdot ds \quad (\text{Abb. 3})$$

und durch die Normalkraft  $N_x$  (als Druck positiv) ein Nähherrücken dieser Querschnitte um

$$\Delta ds = \frac{N_x}{EF} \cdot ds.$$

Mit Rücksicht auf Abbildung 2 und das dort ange-deutete Koordinatensystem erhalten wir die folgenden Be-deutungen:

1. Verschiebung des Punktes  $O$  im Sinne der  $x$ -Achse. Die Spannweitevergrößerung infolge der Deformation eines Elementes ist  $dl = d\gamma \cdot y - \Delta ds \cdot \cos \varphi$ , also ergibt sich für den ganzen Bogen mit Berücksichtigung einer Wärme-zunahme um  $\tau^0$

$$0 = \int \frac{M_x}{E \cdot J} \cdot ds \cdot y - \int \frac{N_x \cdot ds}{E \cdot F} \cdot \cos \varphi + \alpha \tau \cdot l,$$

wo  $\alpha$  den Temperaturexpansionskoeffizienten bedeutet.

2. Verschiebung im Sinne der  $y$  Achse

$$0 = - \int \frac{M_x}{EJ} \cdot ds \cdot x + \int \frac{N_x \cdot ds}{E \cdot F} \cdot \sin \varphi.$$

3. Drehung des Kämpferquerschnitts um den Punkt  $O$

$$0 = \int \frac{M_x}{EJ} \cdot ds.$$

Bezeichnet man mit  $M_o$  das Moment der äussern Kräfte  $P$  links vom Schnitt  $x$  in bezug auf dessen Schwerpunkt oder das Biegemoment, das dort im Falle des rechts eingespannten, links frei ausladenden Balkens vorhanden ist, dann ergibt sich für  $M_x$  der Ausdruck

$$M_x = M_o + M - H \cdot y - V \cdot x.$$

Für  $N_x \cdot \cos \varphi$  kann ohne praktische Fehler der Horizontalschub  $H$  gesetzt werden, weil der Einfluss der Deformation durch die Normalkräfte bei grossem Pfeilverhältnis überhaupt zurücktritt und erst bei kleinem Pfeilverhältnis oder flachen Bögen an Bedeutung gewinnt, bei diesen aber mit  $H$  verwechselt werden darf. Für die Anwendung auf Brückengewölbe ist noch zu beachten, dass für die Eigengewichtsbelastung später eine besondere Rechnung vorgeführt wird, in welcher der genaue Wert von  $N_x$  berücksichtigt ist, sodass nur für die Verkehrs-lasten die angegebene Vereinfachung zutrifft, wo sie die Genauigkeit nur in verschwindendem Masse beeinträchtigen kann. Aus dem gleichen Grunde wird  $N_x \sin \varphi$  vernachlässigt.

Setzt man die Werte für  $M_x$  und  $N_x \cos \varphi$  in die obigen drei Gleichungen ein, so erhält man

$$0 = \int \frac{M_o \cdot y}{J} \cdot ds + M \int \frac{y \cdot ds}{J} - H \int \frac{y^2 \cdot ds}{J} - V \cdot \int \frac{x \cdot y \cdot ds}{J} - H \int \frac{ds}{F} + E \cdot \alpha \cdot \tau \cdot l$$

$$0 = - \int \frac{M_o \cdot x}{J} \cdot ds - M \int \frac{x \cdot ds}{J} + H \int \frac{x \cdot y}{J} \cdot ds + V \int \frac{x^2 \cdot ds}{J}$$

$$0 = \int \frac{M_o \cdot ds}{J} + M \int \frac{ds}{J} - H \int \frac{y \cdot ds}{J} - V \int \frac{x \cdot ds}{J}.$$

Ueber die Lage des Punktes  $O$  ist bis jetzt nichts vorausgesetzt, wir können ihn daher so wählen, dass

$$\int \frac{x \cdot ds}{J} = 0, \quad \int \frac{y \cdot ds}{J} = 0, \quad \int \frac{x \cdot y \cdot ds}{J} = 0 \text{ wird.}$$

Denkt man sich die Bogenachse mit (elastischen) Gewichten  $dw = \frac{ds}{J}$  behaftet, so heissen die drei letzten Gleichungen

$$\int dw \cdot x = 0, \quad \int dw \cdot y = 0, \quad \int dw \cdot x \cdot y = 0$$

und das Koordinatensystem ist dann so zu wählen, dass

1. der Ursprung  $O$  mit dem Schwerpunkt des mit den Gewichten  $dw$  behafteten Bogens zusammenfällt,

2. die Achsen der  $x$  und der  $y$  so liegen, dass das Zentrifugalmoment der Gewichte  $dw = 0$  ist. Beim vorausgesetzten symmetrischen Bogen ist die letztere Bedingung ohne weiteres erfüllt, wenn die  $y$ -Achse mit der Symmetrieachse zusammenfällt und die  $x$ -Achse senkrecht auf ihr steht. Die drei Deformationsgleichungen enthalten dann je nur eine der unbekannteren Auflagerreaktionen, sodass man der Reihe nach erhält:

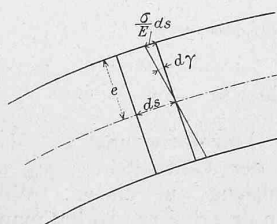


Abb. 3.

$$H = \frac{\int \frac{M_0 \cdot y}{J} \cdot ds + E \cdot \alpha \cdot \tau \cdot l}{\int \frac{y^2 \cdot ds}{J} + \int \frac{ds}{F}} = \frac{\int M_0 \cdot dw \cdot y + E \cdot \alpha \cdot \tau \cdot l}{\int dw \cdot y^2 + \int \frac{ds}{F}}$$

$$V = \frac{\int \frac{M_0 \cdot ds}{J} \cdot x}{\int \frac{x^2 \cdot ds}{J}} = \frac{\int M_0 \cdot dw \cdot x}{\int dw \cdot x^2}$$

$$M = - \frac{\int \frac{M_0 \cdot ds}{J}}{\int \frac{ds}{J}} = - \frac{\int M_0 \cdot dw}{\int dw}$$

Hat man es nicht mit veränderlicher Verkehrsbelastung, sondern nur mit wenigen bestimmten Belastungsfällen zu tun, so kann man nach diesen Formeln die Berechnung durchführen. Die Integrale können bei beliebiger Bogenform nicht aufgelöst werden und sind näherungsweise zu bestimmen. Zu diesem Zweck kann man entweder den Bogen in eine gerade Anzahl gleicher Teile einteilen, für die Teilpunkte die Werte unter dem Integralzeichen ausrechnen und sie nach der Simpsonschen Regel addieren. Oder man teilt in beliebige Teile ein von der Länge  $s$ , wobei die Angriffspunkte konzentrierter Lasten mit Teilpunkten zusammenfallen, rechnet dann die Gewichte  $w = \frac{s}{J}$  für die Mitten der Teile aus und addiert dann einfach die Produkte  $M_0 \cdot w \cdot y$ ,  $M_0 \cdot w \cdot x$ ,  $w \cdot y^2$ ,  $w \cdot x^2$  und so weiter, wobei sich dann alle Grössen auf die Mitten der Bogenstücke beziehen.

Bei bogenförmigen Dachbindern mit beliebig gerichteten Lasten und bei Vorprojekten von Brücken, wo man sich mit dem Fall der einseitigen Belastung begnügt, kann die Verwendung dieser Formeln angezeigt sein.

Bezeichnet man die Grössen  $w \cdot y$  mit  $w_y$ ;  $w \cdot x$  mit  $w_x$ , dann erhalten wir die Gleichung

$$H = \frac{\sum M_0 \cdot w_y}{\sum y \cdot w_y + \sum \frac{s}{F}} \quad V = \frac{\sum M_0 \cdot w_x}{\sum x \cdot w_x} \quad M = - \frac{\sum M_0 \cdot w}{\sum w}$$

wobei vorausgesetzt ist, dass die Integrale nach der zweiten Methode ausgerechnet werden. Handelt es sich bei vertikaler Belastung um die Ermittlung der Einflusslinien der Grössen  $H, V$  und  $M$ , so ist nur eine einzige Last  $P = 1$  mit der Abszisse  $a$  am Bogen zu denken (Abb. 4).

Alsdann ist für alle Bogenquerschnitte, deren

$x > a \quad M_0 = 0$   
 $x < a \quad M_0 = -1 \cdot (a - x)$ ; somit werden für diesen Belastungsfall die Summen

$$\sum M_0 \cdot w_y = - \sum_a^{-l/2} w_y \cdot (a - x)$$

$$\sum M_0 \cdot w_x = - \sum_a^{-l/2} w_x \cdot (a - x)$$

$$\sum M_0 \cdot w = - \sum_a^{-l/2} w \cdot (a - x)$$

d. h. die Summen sind für die Einzelbelastung  $P = 1$  gleich den statischen Momenten der Gewichte  $w_y, w_x, w$  rechts vom Lastangriffspunkt in bezug auf diesen. Will man also die Einflusslinien vollständig erhalten, so hat man, von rechts beginnend, der Einzellast  $P = 1$  eine Reihe

von Angriffspunkten zu geben, die am besten mit den Teilpunkten der Bogenstücke  $s$  zusammenfallen, und jedesmal die Momente aller Gewichte  $w_y, w_x, w$  rechts vom Angriffspunkte in bezug auf diesen zu berechnen. Hierbei kann in bekannter Weise jedes folgende Moment unter Benützung des vorhergehenden berechnet werden. Die Einflussordinaten ergeben sich dann, wenn man diese Momente durch die Summe in den Nennern der Ausdrücke für  $H, V$  und  $M$  dividiert.

Ausser der rein rechnerischen Lösung ist auch eine

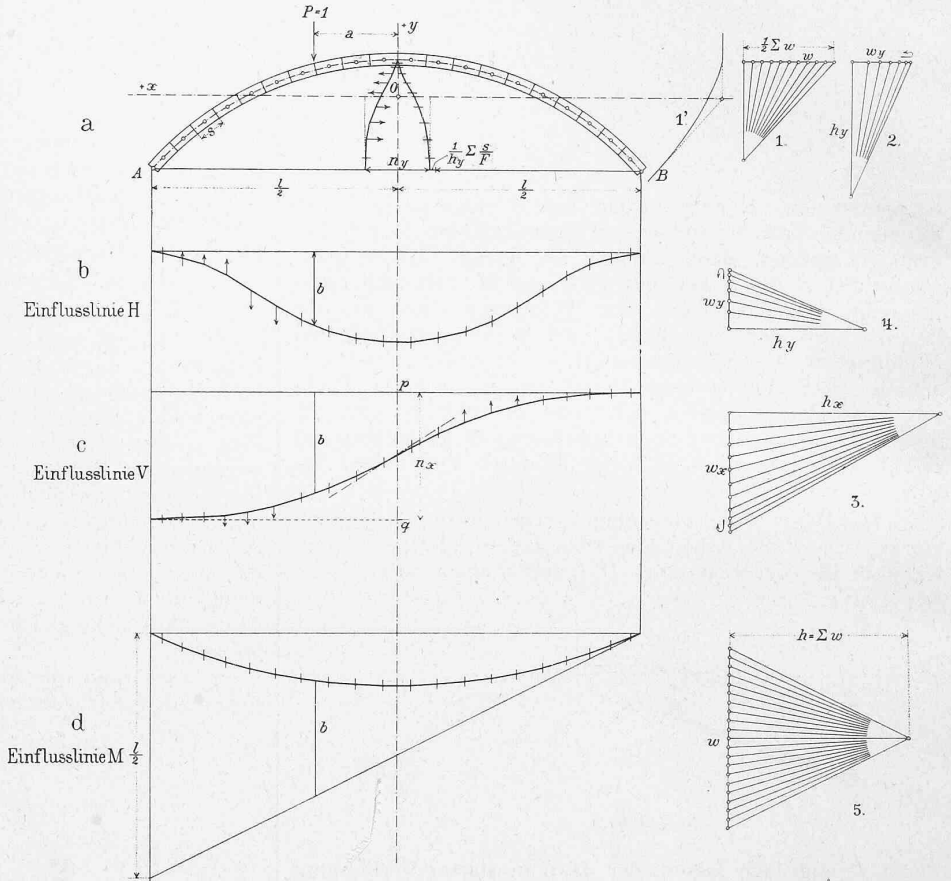


Abb. 4.

graphische Behandlung der Aufgabe möglich. Die graphische Ermittlung des Schwerpunkts  $o$  der elastischen Gewichte  $w$  bedarf keiner Erläuterung, ihr dient in Abb. 4 das Kräftepolygon  $i$  und das Seilpolygon  $i'$ . Mit Beachtung des Satzes aus der graphischen Statik, dass (Abb. 5) die Summe der statischen Momente paralleler Kräfte in bezug auf eine ihnen parallele Gerade gleich ist dem zwischen die beiden letzten Seilpolygoneiten hineinfallenden Stück  $m$  der Geraden, multipliziert mit der Polweite  $h$ , lassen sich alle vorkommenden Summen, die als statische Momente gedeutet werden können, mit Hilfe von Seilpolygonen darstellen.

Nenner von  $H$  oder  $\sum y \cdot w_y$ . Um das statische Moment der Gewichte  $w_y$  in bezug auf die  $x$ -Achse zu finden, wird das Kräftepolygon  $2$  mit beliebigem Polabstand  $h$ , gezeichnet.

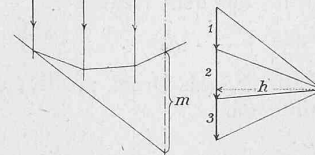


Abb. 5.

Da  $\sum w_y = \sum w \cdot y$  für den halben Bogen  $= 0$ , so nimmt das zugehörige Seilpolygon für horizontal wirkende  $w_y$ , die in Abb. 4 mit  $a$  bezeichnete Form an. Für den halben Bogen wird die

erste und letzte Seite vertikal, für die rechte Hälfte wird ein symmetrisches Polygon erhalten, sodass, wenn die



zwischen den beiden Anfangspunkten liegende Strecke mit  $n_y$  bezeichnet wird

$$\Sigma y \cdot w_y = n_y \cdot h_y \text{ ist.}$$

Hiezu kommt noch die rechnerisch zu ermittelnde Grösse  $\Sigma s/F$ .

Nenner von  $V$  oder  $\Sigma x \cdot w_x$ . Zur Bestimmung dieser Summe der statischen Momente der Gewichte  $w_x$  in bezug auf die  $y$ -Achse ist in Abbildung 4 das Kräftepolygon 3 gezeichnet mit einer Poldistanz  $h_x$ , das entsprechende Seilpolygon ist in  $c$  dargestellt, und es folgt mit  $p q = n_x$

$$\Sigma x \cdot w_x = n_x \cdot h_x.$$

Die Nenner von  $H$  und  $V$  werden immer positiv, da sie ja  $= \Sigma w \cdot y^2$  bzw.  $= \Sigma w \cdot x^2$  sind.

Zähler von  $H$  oder  $\Sigma M_o \cdot w_y = - \Sigma_{a-x}^{-l/2} w_y (a-x)$  für

eine Einzelbelastung  $P = 1$ .

Hiezu ist mit dem Kräftepolygon 4, dessen Polweite wieder  $h_y$  ist, das in Abbildung 4 ersichtliche Seilpolygon  $b$  gezeichnet, alsdann ist das Moment aller Gewichte  $w_y$  in bezug auf die Last  $P = 1$  dargestellt durch die unter  $P$  liegende Ordinate  $b$ , multipliziert mit  $h_y$ , und der Horizontalschub wird

$$H = \frac{b \cdot h_y}{n_y \cdot h_y + \Sigma \frac{s}{F}} = \frac{b}{n_y + \frac{1}{h_y} \Sigma \frac{s}{F}}$$

Fügt man also zur Strecke  $n_y$  noch das rechnerisch zu ermittelnde Stückchen  $\frac{1}{h_y} \Sigma \frac{s}{F}$ , das den Einfluss der Deformation durch die Normalkräfte vorstellt, hinzu, so ergibt sich der Nenner des letzten Ausdrucks für  $H$ , oder man kann das zuletzt gezeichnete Seilpolygon als Einflusslinie des Horizontalschubes  $H$  auffassen, wobei die Einheit des Masstabes der Ordinaten  $b$  durch die Strecke  $n_y + \frac{1}{h_y} \Sigma \frac{s}{F}$  dargestellt ist.  $n_y$  ist als eine Länge aufzufassen, ebenso  $\frac{1}{h_y} \Sigma \frac{s}{F}$ .

Zähler von  $V$  oder  $\Sigma M_o \cdot w_x = - \Sigma_{a-x}^{-l/2} w_x (a-x)$  für

eine Einzelbelastung  $P = 1$ .

Aus dem Seilpolygon  $c$  in Abbildung 4 folgt das Moment aller Gewichte  $w_x$  in bezug auf den Angriffspunkt der Last  $P = 1$  gleich der unter  $P$  gelegenen Ordinate  $b$ , multipliziert mit  $h_x$ ; also ist

$$V = \frac{b \cdot h_x}{n_x \cdot h_x} = \frac{b}{n_x}$$

oder das gezeichnete Seilpolygon kann als Einflusslinie für  $V$  betrachtet werden, wobei die Einheit des Masstabes der Ordinaten durch die Strecke  $n_x$  dargestellt ist.

Zähler von  $M$  oder  $-\Sigma M_o w = + \Sigma_{a-x}^{-l/2} w (a-x)$ .

Hiezu ist in Abbildung 4 das Kräftepolygon 5 und das Seilpolygon  $d$  gezeichnet. Die Summe der statischen Momente aller Gewichte  $w$  rechts vom Lastangriffspunkt in bezug auf diesen ist dann gleich der zwischen die beiden letzten Seilpolygoneiten fallenden Ordinate  $b$  multipliziert mit der Polweite  $h$ ; macht man  $h = \Sigma w$ , so ist

$$M = \frac{b \cdot \Sigma w}{\Sigma w} = b,$$

d. h. es stellen dann diese Ordinaten, als Längen gemessen, unmittelbar den Einfluss der Last  $P = 1$  zum Moment  $M$  vor. Unter dem linken Bogenende wird  $M = \frac{l}{2}$ .

Alle Einflusslinien der  $H, V$  und  $M$  enthalten nur positive Beiträge. Die Einflusslinien von  $H$  und  $V$ , als der Komponenten der Kämpferreaktion  $R$ , sind unabhängig von der Lage des Punktes  $O$ , würden also in der gleichen Form erhalten werden, wenn man die statisch unbekanntes Reaktionen im Kämpferquerschnitt selbst annehmen würde.

Die Einflussordinaten von  $H, V$  und  $M$  dienen zur Bestimmung der Einflusslinien der Kernpunktsmomente beliebiger Querschnitte, denn die Grenzwerte der Randspannungen, um deren Berechnung es sich in praktischen Fällen handelt,

treten gleichzeitig mit den Grenzwerten der Kernpunktsmomente ein. Die Berechnung der Einflussordinaten der letztern erfolgt für einen bestimmten Schnitt  $xy$  nach der Gleichung

$$M_k = M_o + M - H \cdot y_k - V \cdot x,$$

wo  $M_o$  das Moment der äusseren Kräfte (hier  $P = 1$ ) links vom Schnitt in Bezug auf diesen bedeutet. Die Wahl senkrechter Schnitte (Abb. 6) erleichtert die Arbeit insofern, als dann  $M_o$  und  $V \cdot x$  für den obern und untern Kernpunkt jeweils gleich gross sind. Für jeden Kernpunkt, bzw. jeden Schnitt erhält man eine

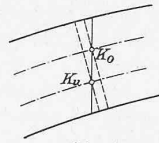


Abb. 6.

Tabelle zur Berechnung der Einflussordinaten der  $M_k$ , indem man nacheinander die Last  $P = 1$  alle Lagen von 0 bis  $l$  annehmen lässt. Die Werte  $M, H$  und  $V$  sind aus den entsprechenden Einflusslinien zu entnehmen, und für jede Lage der Last sind die entsprechenden Werte auf der rechten Seite obenstehender Gleichung unter Berücksichtigung des Vorzeichens zu addieren. Da die unendlich kleinen Gewichte  $dw$ , durch endliche Gewichte  $w$  ersetzt werden, erhält man zutreffende Einflussordinaten der gesuchten Reaktionen nur für solche Stellungen der Last  $P = 1$ , welche mit den Teilpunkten der Bogenstücke  $s$  zusammenfallen. Oder in den Seilpolygone, welche Momentenpolygone vorstellen, sind richtige Ordinaten nur in den Trennungslinien der Bogenelemente vorhanden, und die richtigen Einflusslinien sind die jenen Polygonen einbeschriebenen Kurven, welche die Seiten des Polygons senkrecht unter den Bogenteilpunkten berühren.

Wird die Verkehrslast durch Pfeiler nur in bestimmten Punkten auf das Gewölbe übertragen, so verläuft die Einflusslinie für diese Lasten zwischen je zwei Pfeilern geradlinig. Um sie also genau zu erhalten, sind unter den Pfeilern Teilpunkte der Bogenstücke  $s$  anzunehmen, wobei die Stücke zwischen den Pfeilern nötigenfalls noch weiter geteilt werden können.

Die Einflusslinien der Kernpunktsmomente haben im allgemeinen die in

Abbildung 7 dargestellte Form mit einer positiven und einer negativen Beitragsstrecke; trägt man die positiven Momente nach unten, die negativen nach oben ab, so verläuft die Momentenlinie für den obern Kernpunkt über derjenigen für den untern.

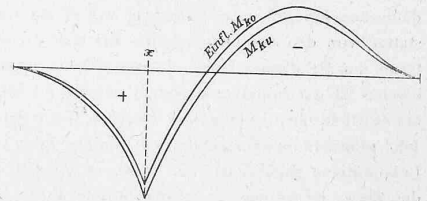


Abb. 7.

Für irgend eine Belastung lässt sich auch die Stützlinie zeichnen. Aus den Einflusslinien, oder aus den unmittelbar gerechneten Summen erhält man  $H, V$  und  $M$ , wovon  $H$  und  $V$  zur Resultierenden  $R$  zusammengesetzt werden

$$R = \sqrt{H^2 + V^2}.$$

Der Abstand  $r$  der Resultierenden vom Punkt  $O$  ergibt sich aus der Gleichung  $R \cdot r = M$  zu  $r = \frac{M}{R}$ .

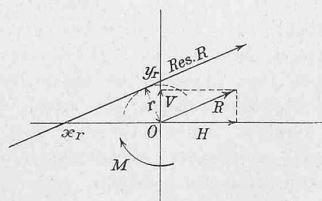


Abb. 8.

nen (Abbildung 8) und zwar ist:

$$\begin{aligned} 0 &= -V x_r + M \text{ woraus } x_r = \frac{M}{V} \\ 0 &= -H \cdot y_r + M \text{ woraus } y_r = \frac{M}{H}. \end{aligned}$$

$R$  ist also Tangente an einem um den Punkt  $o$  mit  $r$  beschriebenen Kreis, wobei das Vorzeichen von  $M$  angibt, ob die Tangente oben oder unten an den Kreis zu legen ist. Es lassen sich auch die Abschnitte von  $R$  auf den Koordinatenachsen berechnen

(Schluss folgt.)