Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 63/64 (1914)

Heft: 22

Artikel: Ueber die Schwingungen von Dampfturbinen-Laufrädern

Autor: Stodola, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31472

Ueber die Schwingungen von Dampfturbinen-Laufrädern.

Von Professor Dr. *A. Stodola*, Zürich.

Ein Vergleich der in unserem Aufsatz über obiges Thema [1]) benützten Methoden von *Ritz* und *Rayleigh*, von einem allgemeinen Standpunkt aufgenommen, führt zu folgendem Ergebnis.

Es werde als Ansatz für die Deformation der Mittelfläche der Scheibe die Form

$$w = f(a_1, a_2, a_3 \ldots r, \varphi) \cos \lambda t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

angenommen, in welcher $a_1, a_2, a_3 \ldots$ die willkürlichen Parameter sind, die sich im Falle des von Ritz geführten Beweises auf die linearen Faktoren des Ausdruckes

$$w = (a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots) \cos \lambda t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

reduzieren. Berechnet man mit dem Ausdruck (1) die potentielle Energie der inneren und äusseren Kräfte und die kinetische Energie der Scheibe, so erhält man

$$\Phi_i = F(a_1, a_2 \ldots r, \varphi) \cos^2 \lambda t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\Phi_a = -\lambda^2 G(a_1, a_2 \ldots r, \varphi) \cos^2 \lambda t \quad . \quad . \quad (4)$$

$$K = +\lambda^2 G(a_1, a_2 \ldots r, \varphi) \sin^2 \lambda t \quad . \quad . \quad (5)$$

d. h. es stellt sich heraus, *dass die Funktionsform von Φ_a und K in den $a_1, a_2 \ldots$ und r, φ dieselbe ist*, was eine tiefgehende Verwandtschaft der beiden Methoden bedingt.

Nach *Rayleigh* erhält man nämlich durch Gleichsetzung der Amplituden von Φ_i und K, wenn wir zur Abkürzung F und G anstelle des vollständigen Funktionsausdruckes schreiben

$$F = \lambda^2 G, \quad \text{woraus } \lambda^2 = \frac{F}{G} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Wir haben nun diesen Ausdruck dadurch zum genauern Anschluss an die Wirklichkeit gebracht, dass wir den Konstanten $a_1, a_2 \ldots$ die Werte beilegten, welche λ^2 zu einem Minimum machen. Diese Werte findet man aus dem Gleichungssystem

$$\frac{\partial \lambda^2}{\partial a_1} = 0 \qquad \frac{\partial \lambda^2}{\partial a_2} = 0 \ldots$$

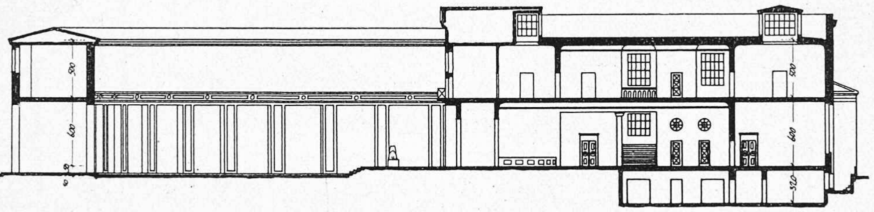
oder nach (6):

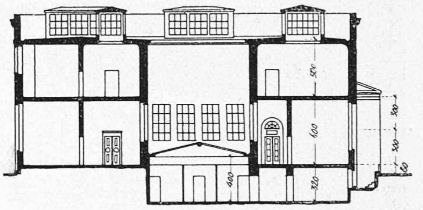
$$\left.\begin{array}{l} G \dfrac{\partial F}{\partial a_1} - F \dfrac{\partial G}{\partial a_1} = 0 \\ G \dfrac{\partial F}{\partial a_2} - F \dfrac{\partial G}{\partial a_2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Im besonderen Falle des linearen Ansatzes (2) werden F und G quadratische Formen der $a_1, a_2 \ldots$ Man kann mit dem Quadrat einer davon, z. B. a_1^2, Zähler und Nenner in (6) dividieren, sodass nur die Verhältnisse $a_2 : a_1$ usw. übrig bleiben. Die Ableitungen sind dann nach diesen Verhältnissen zu nehmen, und Gleich. (7), deren Zahl um 1 geringer ist, liefern ein oder mehrere Wertsysteme derselben.

Wenn wir nach *Ritz* vorgehen, so ist $\Phi_i + \Phi_a = (F - \lambda^2 G) \cos^2 \lambda t$ zu einem Minimum zu machen, was die Erfüllung der Gleichungen:

[1]) Siehe Seite 251 u. ff. ds. Bandes.



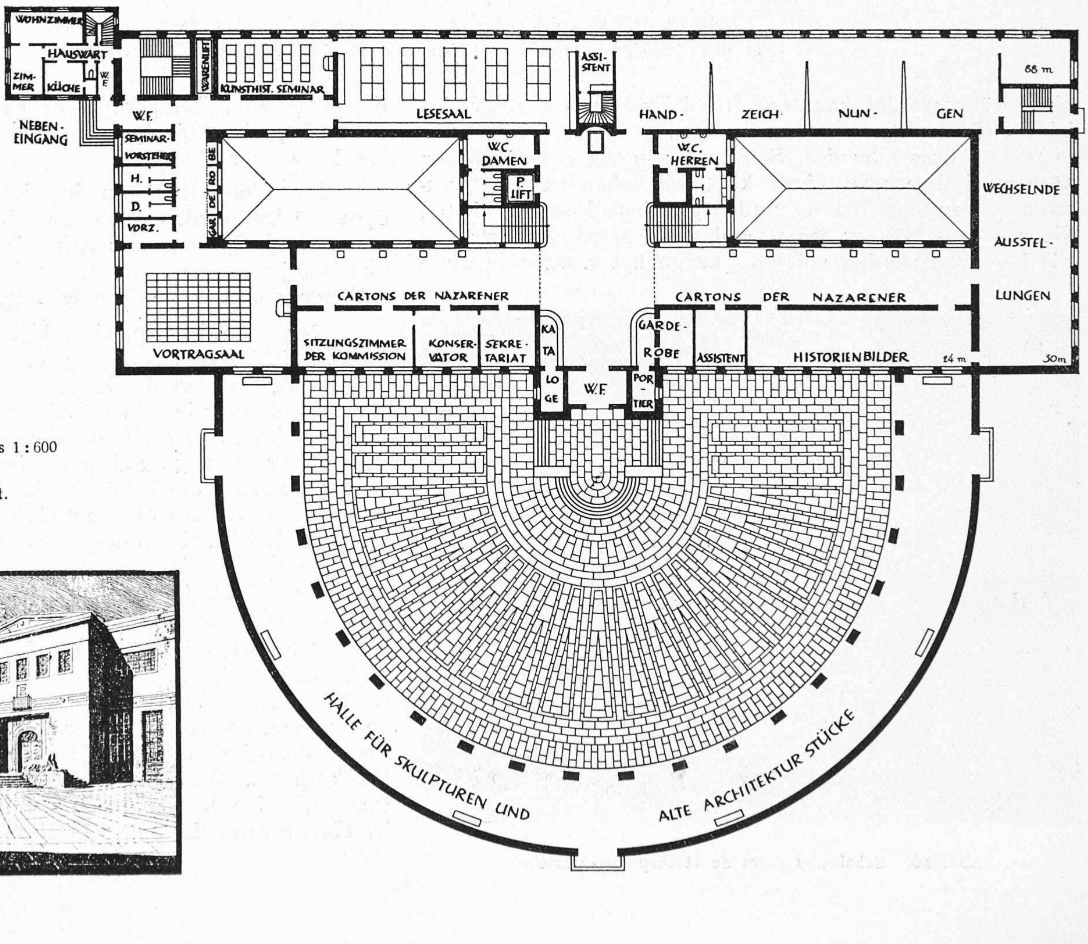


Längsschnitt in der Axe des Haupteingangs. — 1:600. — Querschnitt durch einen Seiten-Hof.

Wettbewerb Kunstmuseum Basel.

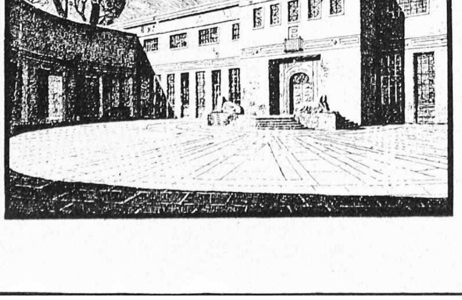
Ein Preis im II. Rang. Motto „Prado".

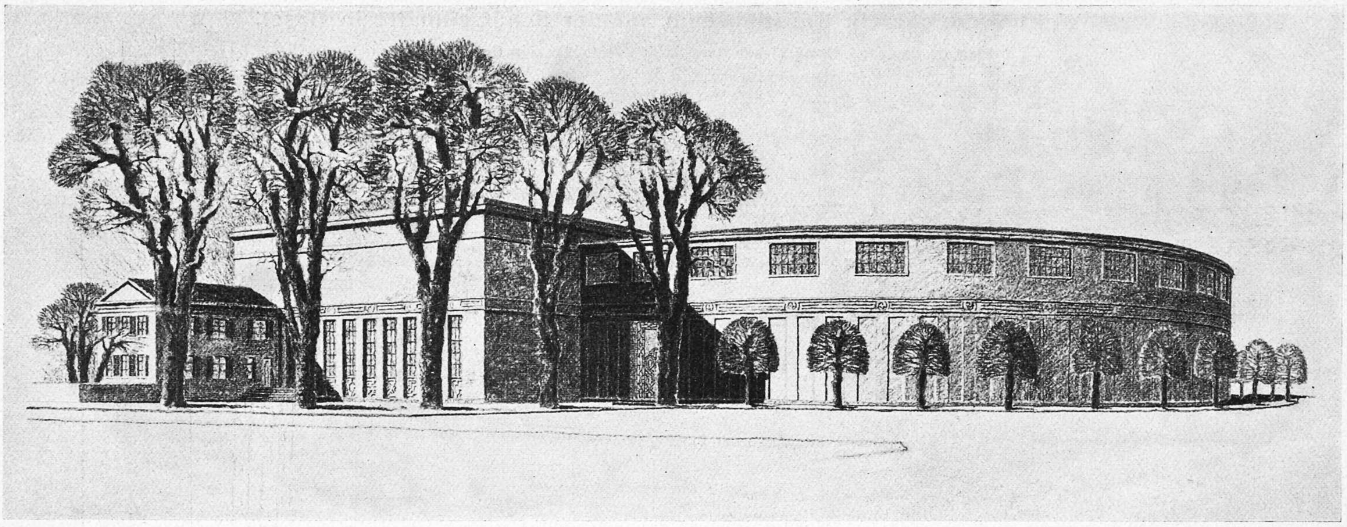
Arch. *Alb. Maurer*, z. Z. in Düsseldorf.



Erdgeschoss-Grundriss 1:600

und Hofansicht.





$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a_1} - \lambda^2 \frac{\partial G}{\partial a_1} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial a_2} - \lambda^2 \frac{\partial G}{\partial a_2} &= 0 \\ \ldots\ldots & \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

erheischt. Aus diesen Bedingungen geht zunächst die Identität des hierin enthaltenen Wertes von λ^2 mit dem Ausdrucke (6) hervor. Wir können nämlich obige Gleichungen der Reihe nach mit $d a_1$, $d a_2 \ldots$ multiplizieren und addieren. Das Resultat

$$\left(\frac{\partial F}{\partial a_1} d a_1 + \frac{\partial F}{\partial a_2} d a_2 + \ldots\right) - \lambda^2 \left(\frac{\partial G}{\partial a_1} d a_1 + \frac{\partial G}{\partial a_2} d a_2 + \ldots\right) = 0$$

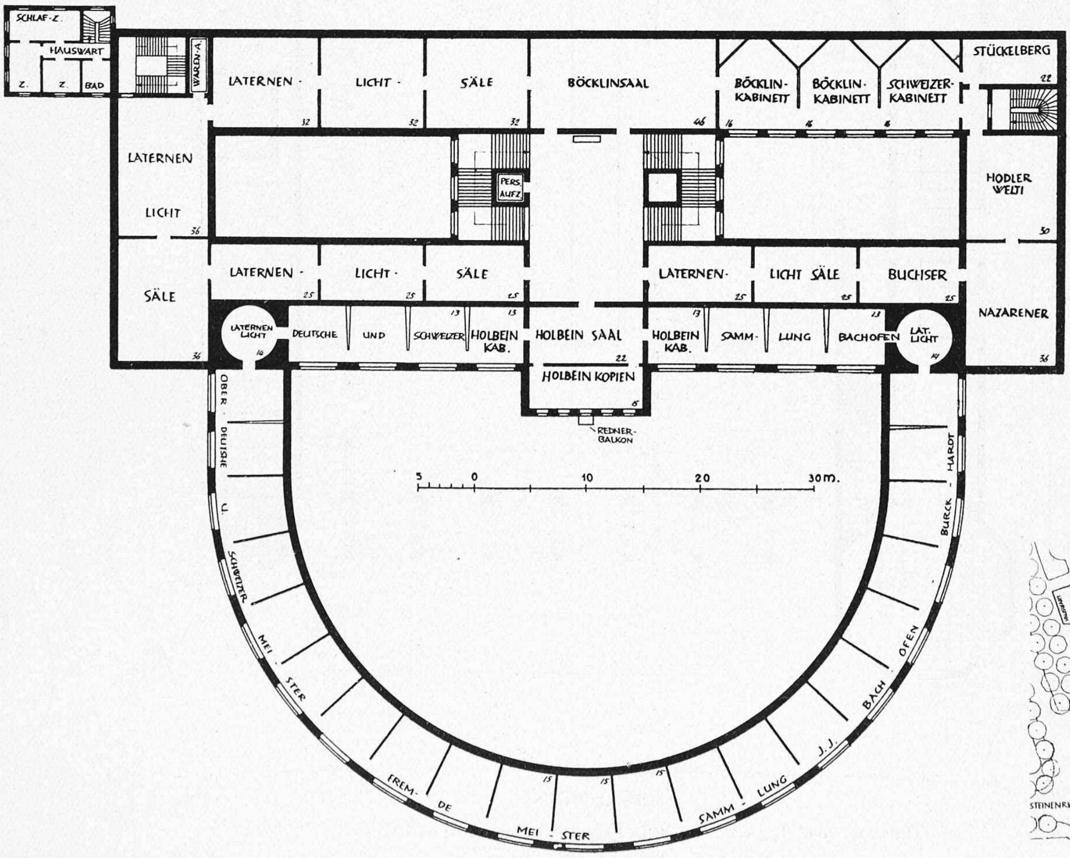
zeigt, dass wir es mit den vollständigen Differentialen von F und G zu tun haben, die wir vom Werte $F = 0$, $G = 0$ (der eben gestreckten Mittelfläche der Scheibe entsprechend) integrieren können und

$$F - \lambda^2 G = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda^2 = \frac{F}{G}$$

erhalten, was zu beweisen war. Indem wir diesen Wert in (8) einführen, erhalten wir ein mit (7) identisches Gleichungssystem zur Bestimmung der a_1, $a_2 \ldots$

Im Falle des linearen Ansatzes (2) sind auch hier nur die Verhältnisse $a_2 : a_1 \ldots$ bestimmbar, und die Auflösung erfolgt einfacher und rascher, indem man in bekannter Weise die Determinante der Koeffizienten der Gleichungen (8) gleich null setzt und daraus λ^2 berechnet. Die gleiche Ueberlegung ist übrigens auch bei der Methode von Rayleigh anwendbar und empfehlenswert.

Ritz hat sein Theorem nur für den linearen Ansatz (2) bewiesen. Aus dem Prinzip des Minimums der gesamten potentiellen Energie folgt aber, dass seine Methode für beliebige Ansatzformen gilt. Unsere Darlegungen beweisen, dass die verallgemeinerte Methode von Rayleigh mit der Methode von Ritz identisch ist. Die Rechenarbeit ist also in beiden Fällen dieselbe; zu entscheiden ist nur noch, welche Ansatzformen die beste Annäherung bieten. Ueber diese Frage hoffe ich in Bälde weitere Beiträge veröffentlichen zu können.



Wettbewerb Kunstmuseum Basel.

Ein Preis im II. Rang.
Motto „Prado".

Arch. *Alb. Maurer*, z. Z. in Düsseldorf.

Grundriss vom Obergeschoss 1 : 600

und Lageplan 1 : 3000.

Oben: Gesamtbild aus Osten.