

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 65/66 (1915)
Heft: 22

Artikel: Ueber die Kettenlinie
Autor: Kiefer, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-32323>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Ueber die Kettenlinie.

Von A. Kiefer in Zürich.

Wenn man für irgend einen Punkt B einer gewöhnlichen Kettenlinie AB die tangential wirkende Spannung $b = BP$ (Abb. 1) in zwei Komponenten zerlegt, von denen die eine horizontal und die andere vertikal gerichtet ist, so ist bekanntlich die horizontale Komponente gleich und entgegengesetzt der Spannung a im tiefsten Punkte A , dem Scheitelpunkt der Kettenlinie, und die vertikale Komponente ist gleich und entgegengesetzt dem Gewicht des Bogens $AB = s$ der Kurve, für das man den Bogen selber setzen kann. Das Gewicht des Bogens AB und die beiden Spannungen in A und B müssen sich nämlich das Gleichgewicht halten; die Spannung hat in jedem Punkte B einen bestimmten Wert und ihre Horizontalkomponente ist konstant, gleich und entgegengesetzt der Spannung im Scheitelpunkt.

Man verlängere die Kurventangente PB über B hinaus, mache BF gleich dem Kurvenbogen BA , ziehe durch F die Senkrechte auf FB und schneide sie mit der Vertikalen durch B in dem Punkte Q , so ist $\triangle BFQ \cong \triangle BP_1P$; folglich $FQ = a$, BQ gleich der Spannung $BP = b$ im Punkte B . Denkt man sich das rechtwinklige Dreieck BFQ mit der Kathete BF auf die Kettenlinie aufgewickelt, so behält $FQ = a$ die Länge und der Punkt Q bewegt sich bei einer unendlich kleinen Drehung horizontal; das gilt für jede folgende unendlich kleine Drehung und wenn F im Scheitelpunkt A der Kettenlinie angelangt ist, so befindet sich Q in O , wobei $AO = a$ ist, d. h.:

Wenn man das Dreieck BFQ auf die Kettenlinie wickelt, in der Weise, dass BQ vertikal bleibt, oder was dasselbe ist, wenn man in jedem Punkte B der Kettenlinie die Spannung senkrecht nach unten abträgt $BQ = b$, so beschreibt der Punkt Q eine horizontale Gerade, nämlich die sogenannte Direktrix, deren Abstand vom Scheitelpunkt gleich seiner Spannung ist.

Der Punkt F beschreibt die Evolvente der Kettenlinie, und weil QF konstant gleich a bleibt und F sich in jedem Augenblick in der Richtung von QF bewegt, kann man sagen:

Die Evolvente der Kettenlinie, d. i. der geometrische Ort von F ist die orthogonale Trajektorie des Systems von Kreisen mit konstantem Radius a , deren Mittelpunkte Q die Direktrix erfüllen.

Diese Kurve wird Traktrix genannt. Sie lässt sich auch als Kurve definieren, für die das Stück FQ einer jeden Tangente zwischen dem Berührungspunkt F und einer festen Geraden konstante Länge hat; ferner entsteht die Kurve, wenn der Mittelpunkt eines Kreises von konstantem Radius sich gleichförmig auf einer Geraden verschiebt und ein Punkt F auf dem Kreise sich dreht mit einer Geschwindigkeit, die in jedem Augenblick entgegengesetzt gleich der senkrecht zum Radius genommenen Komponente der Geschwindigkeit des Mittelpunktes ist (die andere Komponente nach dem Radius); ebenso entsteht sie, wenn ein Punkt F sich gleichförmig auf einem Kreise von konstantem Radius bewegt und der Mittelpunkt des Kreises auf einer Geraden läuft mit einer Geschwindigkeit, die jeweils entgegengesetzt gleich der parallel zur Geraden genommenen Komponente der Geschwindigkeit des Punktes ist (die andere Komponente nach dem Radius).

Angenommen auf der Kettenlinie seien zwei Punkte B, C gewählt (Abb. 2) und die Tangentialspannungen in ihnen seien b, c ; man zerlege die Spannung $c = CP^*$ in zwei Komponenten, von denen die eine CP_1^* vertikal und die andere CP_2^* parallel zur Spannung in B sei. Dann muss die vertikale Komponente CP_1^* gleich dem Kurvenbogen CB und die andere Komponente CP_2^* gleich und entgegengesetzt der Spannung b in B sein; denn die Spannungen in B und C müssen im Gleichgewichte sein mit dem Gewicht des Bogens CB , das gleich dem Bogen CB selber gesetzt werden kann.

Zerlegt man für einen beliebigen Punkt C der Kettenlinie die Spannung in eine vertikale und in eine andere Komponente von konstanter Richtung, so bleibt diese letztere Komponente von konstanter Grösse, nämlich entgegengesetzt gleich der Spannung in demjenigen Kurvenpunkte B , dessen Tangente zu jener festen Richtung parallel ist, und die vertikale Komponente ist jeweilen gleich dem Bogenabstande des Punktes C von dem festen Punkte B .

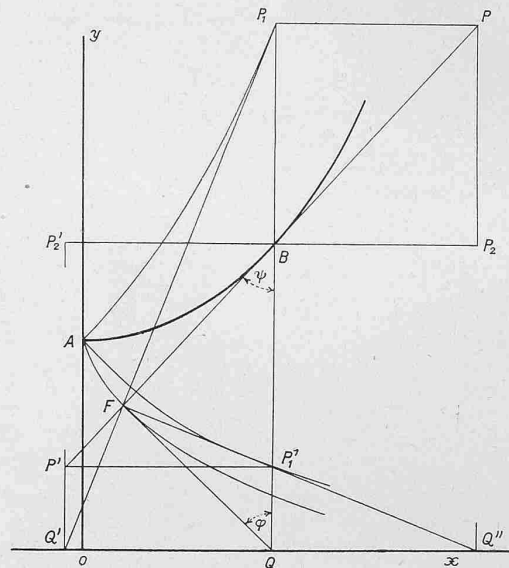


Abbildung 1.

Man verlängere die Kurventangente P^*C über C hinaus, mache CH gleich dem Kurvenbogen CB , ferner $\sphericalangle CHR = P^*P_1^*C$, und schneide HR mit der Vertikalen durch C in R ; dann ist $\triangle CHR \cong \triangle CP_1^*P^*$, folglich $CR = c$, $RH = b$, und wenn noch RG senkrecht CH gefällt wird, $\triangle RGH \cong \triangle QFB$, $RG = a$, $GH = BF =$ Bogen BA . Wickelt man das Dreieck CHR auf die Kettenlinie, in der Weise, dass CR vertikal bleibt, so beschreibt R die Direktrix und H beschreibt die Evolvente der Kettenlinie mit Spitze in B ; die Bewegungsrichtung von H schliesst mit der Strecke RH , deren Länge konstant bleibt, einen Winkel von konstanter Grösse $\sphericalangle CHR - 90^\circ$ ein und es bleibt auch $HG =$ Bogen BA von konstanter Länge, d. h.:

Die Kettenlinie ist die Evolute einer Kurve, welche schiefe Trajektorie eines Systems von Kreisen ist, die konstanten Radius haben, deren Mittelpunkte die Direktrix erfüllen und wobei der konstante Schnittwinkel gegen den Radius die Grösse $\sphericalangle CHR - 90^\circ$ hat. Diese schiefe Trajektorie ist zugleich eine Parallelkurve zur Traktrix in einem Abstand, der gleich dem Bogen der Kettenlinie vom Scheitelpunkt A bis zur Spitze B der Trajektorie ist.

Diese Trajektorie ist zugleich eine Kurve von der Eigenschaft, dass wenn man durch jeden Punkt derselben eine Gerade unter konstantem Winkel gegen seine Tangente zieht, das Stück auf dieser Geraden zwischen dem Kurvenpunkt und einer festen Geraden konstante Länge hat. Ferner entsteht die Trajektorie, wenn der Mittelpunkt eines Kreises von konstantem Radius sich gleichförmig auf einer Geraden verschiebt, während ein Punkt auf dem Kreise sich so bewegt, dass seine jeweilige Geschwindigkeit gleich der Komponente der Mittelpunktschwindigkeit, senkrecht zum Radius genommen, ist und wobei die andere Komponente mit dem Radius einen konstanten Winkel einschliesst.

Die angegebenen Beziehungen können zum Lösen verschiedener Aufgaben benützt werden; z. B. zum Zeichnen einer Kettenlinie: aus dem Scheitelpunkte A und der Horizontalspannung a in demselben; aus dem Scheitelpunkte A , der Länge des Bogens AB und der Projektion B' des Endpunktes B auf die Vertikale durch A ; aus B' , der Länge des Bogens AB und der Direktrix; aus B' , B und der Bogenlänge AB ; aus dem Scheitelpunkt A und dem

Kurvenpunkt B ; aus B und Richtung und Grösse der Spannung in B ; aus zwei Punkten B, C der Kurve und der Länge des zwischen ihnen gelegenen Bogens.

Die Konstruktionen sind natürlich Näherungskonstruktionen. Es ist von Wert, die Lage des Krümmungsmittelpunktes zu kennen. Verschiebt man Q auf der Direktrix um $BQ \cdot \Delta\psi$ (Abbildung 1), so ist $\Delta\psi$ auch der Winkel

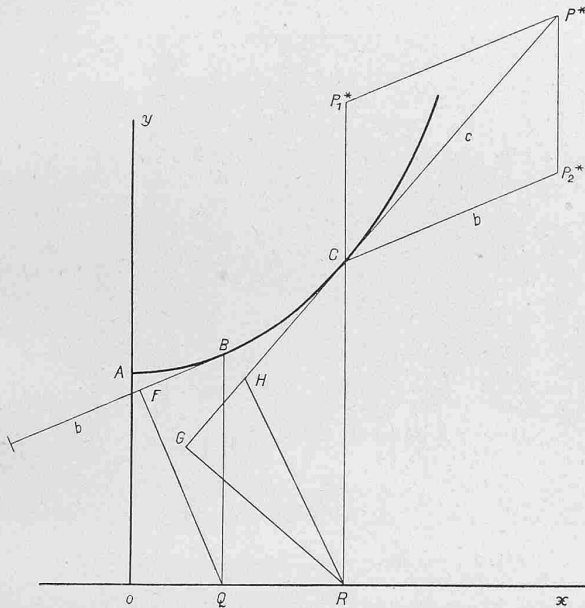


Abbildung 2.

zwischen zwei unendlich benachbarten Normalen, und ist ρ der Krümmungsradius des Punktes B , so hat man

$$\rho \cdot \Delta\psi \cdot \sin\psi = BQ \cdot \Delta\psi$$

$$\rho = \frac{BQ}{\sin\psi}$$

d. h. der Krümmungsradius des Punktes B ist, wie bekannt, gleich dem Stück der Normalen zwischen B und der Direktrix.

Man wähle die Direktrix einer Kettenlinie und die Vertikale durch den Scheitelpunkt als x - und y -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems; sind x, y die Koordinaten eines Kurvenpunktes B , so folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck BFQ , bei dessen Bewegung $QF = a$ konstante Länge behält und dessen veränderliche Winkel φ, ψ heissen mögen:

$$y = \frac{a}{\cos\varphi}$$

Bei einer unendlich kleinen Aenderung des Dreiecks, bei der sich BF auf die Kettenlinie wickelt und das Dreieck sich um den Punkt B dreht, ist die Verschiebung von Q auf der x -Achse

$$\Delta x = y \cdot \Delta\psi = \frac{a}{\cos\varphi} \cdot \Delta\varphi$$

hieraus durch Summation

$$x = a \sum \frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}$$

und mittelst elementarer Reihen

$$x = a \operatorname{Lg} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Somit ist die Kettenlinie durch folgende zwei Gleichungen gegeben

- 1) $y = \frac{a}{\cos\varphi}$
- 2) $x = a \operatorname{Lg} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$

Führt man als unabhängige Variable den Winkel $\psi = 90^\circ - \varphi$ ein, so nehmen die zwei Gleichungen für die Kettenlinie die Form an

- 1) $y = \frac{a}{\sin\psi}$
- 2) $x = a \operatorname{Lg} \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2}$

Die gewöhnliche Form der Gleichung einer Kettenlinie zwischen den Variablen x, y ergibt sich durch Elimination

von ψ aus den zwei letzten Gleichungen oder von φ aus den zwei vorhergehenden Gleichungen. Schreibt man die zwei letzten Gleichungen in der Form

$$y \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2} = \frac{a}{2} \quad \frac{\cos \frac{\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} = e^{\frac{x}{a}}$$

so folgt durch Multiplikation und Division dieser zwei Gleichungen

$$y \cos^2 \frac{\psi}{2} = \frac{a}{2} e^{\frac{x}{a}} \quad y \sin^2 \frac{\psi}{2} = \frac{a}{2} e^{-\frac{x}{a}}$$

und hieraus durch Addition

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

Zur Aufstellung von zwei Gleichungen für die Kettenlinie kann man auch das bereits benutzte, in Abbildung 2 eingezeichnete Dreieck CHR verwenden; wählt man QB als y -Achse, bezeichnet den konstanten Winkel $GRH = FQB$ mit ε , so ist für den variablen Punkt C

$$y = \frac{b}{\sin\psi} \cos\varepsilon; \quad x = \sum y \cdot \Delta\psi = b \cos\varepsilon \cdot \sum \frac{\Delta\psi}{\sin\psi}$$

Die Gleichungen $y = a : \sin\psi, x = a \operatorname{Lg} \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2}$ eignen sich zu Rechnungszwecken, ebenfalls die sog. Hyperbelfunktionen

$$\sinh \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right), \quad \cosh \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

wodurch die Gleichung der Kettenlinie die einfache Form $y = a \cosh \frac{x}{a}$ annimmt.

Wenn der Punkt B sich auf der Kettenlinie bewegt, so beschreiben auch die Punkte P_1, P_2 usw. gewisse Kurven. Der Ort von F ist die Traktrix, deren Gleichung ohne weiteres angebar ist

$$\xi = x - a \sin\varphi, \quad \eta = a \cos\varphi.$$

Der Ort des Punktes H , der auf GC von G konstanten Abstand hat, ist eine schiefe Trajektorie und eine Parallelkurve zur Traktrix, deren Gleichung entsteht, wenn in den vorigen zwei Gleichungen der Traktrix a ersetzt wird durch $\frac{a}{\cos\varepsilon}$ und φ durch $\varphi - \varepsilon$, wobei ε den konstanten Schnittwinkel gegen den Radius bedeutet $\sphericalangle GRH$.

Um zu erfahren, welchen Ort der Punkt P_1 und auch sein symmetrischer Punkt P_1' in bezug auf B beschreibt, verschiebe man B um unendlich wenig auf FB nach B_1 und trage B_1F vertikal nach oben und unten ab; da die Dreiecke BFP_1, BFP_1' gleichschenkelig sind, so kommt der unendlich benachbarte Punkt von P_1 auf FP_1 und derjenige von P_1' auf FP_1' zu liegen, d. h. FP_1 und FP_1' sind Tangenten für die Orte von P_1 und P_1' . Verlängert man FP_1, FP_1' bis zu den Schnittpunkten Q', Q'' mit der Direktrix, so sind die Dreiecke QFQ', QFQ'' gleichschenkelig, denn ihre Schenkel stehen auf BF und BP_1 senkrecht; folglich ist $QQ' = QQ'' = QF = a$, d. h. die Orte von P_1, P_1' sind Kurven mit konstanter Subtangente, also logarithmische Linien. Dieselben gehen durch A und haben die Direktrix zur Asymptote; ihre Gleichungen ergeben sich, wenn man in den Gleichungen

$$y \cos^2 \frac{\psi}{2} = \frac{a}{2} e^{\frac{x}{a}} \quad y \sin^2 \frac{\psi}{2} = \frac{a}{2} e^{-\frac{x}{a}}$$

setzt:

$$\cos^2 \frac{\psi}{2} = \frac{1 + \cos\psi}{2} \quad \sin^2 \frac{\psi}{2} = \frac{1 - \cos\psi}{2} \quad y \cos\psi = s$$

nämlich

$$y + s = a e^{\frac{x}{a}} \quad \text{und} \quad y - s = a e^{-\frac{x}{a}}$$

wo nun $y + s$ und $y - s$ die Ordinaten von P_1, P_1' sind. Es ist $BP_2 = BP_2' = P_1P = a$; also ist der Ort von P_2 beziehungsweise von P_2' , die parallel zur x -Achse um die Grösse a nach rechts, beziehungsweise nach links verschobene Kettenlinie; der Ort von P ist die parallel zur x -Achse um die Grösse a nach rechts verschobene logarithmische Linie des Punktes P_1 , und der Ort des symmetrischen Punktes P' von P in bezug auf B ist die parallel zur x -Achse um die Grösse a nach links verschobene logarithmische Linie des Punktes P_1' . Die Punkte P_1^*, P^*

beschreiben logarithmische Linien und der Ort von P_2^* ist eine Kettenlinie. Wie schon gesehen, ist für einen Punkt B der Kettenlinie der Krümmungsradius $\rho = \frac{y^2}{a} = \frac{a}{\cos^2 \varphi} = \frac{a}{\sin^2 \psi}$ sodass ohne weiteres auch für den Ort des Krümmungsmittelpunktes die Gleichung angegeben werden kann $\xi = x - \rho \cos \psi, \eta = 2y$.

Explosion eines Dampfgefässes und eines Dampfkessels. Betrachtung über Schweissungen

von Oberingenieur *E. Höhn*, Zürich.

Am 16. Juli 1915, nachmittags, explodierte in einer chemischen Fabrik in Basel ein Dampfgefäss. Dieses in Abbildung 1 dargestellte Gefäss enthielt im Beschickungsraum etwa $2,5 m^3$, besass eine mit Wassergas (oder im Koksfeuer?) überlappt geschweisste Längsnaht, desgleichen zwei überlappt angeschweisste Böden und einen über den halben Umfang sich erstreckenden genieteten Dampfmantel. Es wurde im Jahre 1913 von einer Firma des Grossherzogtums Baden geliefert, war für 10 at Innendruck und 6 at Dampfdruck bestimmt, und wurde im gleichen Jahr von einem Ingenieur der Badischen Gesellschaft zur Ueberwachung von Dampfkesseln auf 15 bezw. 11 at, der Beschickungsraum im Jahr 1914 ausserdem von einem Inspektor des Schweizerischen Vereins von Dampfkesselbesitzern auf 16 at geprüft, ohne Anstände oder Bemerkungen.

Das Gefäss wurde am Unglückstage zum *ersten Mal* zur Herstellung von Azobenzol verwendet und die Ingredienzien angeblich auf 90° erwärmt. In diesem Augenblick erfolgte die Explosion mit schrecklicher Gewalt. Der eine Boden riss in der Schweissnaht ringsum ab und flog nach der einen Seite, eine 60 cm dicke Quadermauer durchschlagend, das Gefäss nach der andern Seite, durch die rückwärtige Gebäudemauer hindurch, 20 m weit auf den Hof, ein wüstes Durcheinander hinter sich lassend. Der Boden und seine Lage ist aus Abbildung 2 ersichtlich, das explodierte Gefäss aus Abbildung 3; die Einbeulungen rühren vom Aufschlagen auf den Grund her. Drei Menschenleben fielen der Explosion zum Opfer, einige weitere wurden verwundet. Von den Armaturen war nichts mehr auffindbar; es entzieht sich unserer Untersuchung gänzlich, bei welchem Druck die Explosion stattfinden mochte. In dieser Beziehung sind wir auf die Angaben der Fabrik angewiesen, die auch nur zu sagen vermag, dass die Reaktion des Fabrikates beim Laboratoriumsversuch bei geringerem Druck eingetreten sei, als der erlaubte Innendruck betrug, und dass bei der Fabrikation die Reaktion vermutlich stürmisch, *unter übermässiger Druckäusserung* erfolgt sei.

Die Untersuchung der geplatzten Rundnaht zeigte eine unter aller Kritik *schlechte Schweissung*. Beidseitig waren nur die äussersten Kanten der Bleche zusammen gepappt, sowie aus Abb. 1, unten, ersichtlich; der Kern hatte nirgends richtig geschweisst, dagegen zeigte die Naht fast durchwegs ein gutes Aussehen, nur an wenigen Stellen liessen Riefen von Eisenfeilspänen Zweifel aufkommen. Die sogenannte Ueberlappung war auch äusserst kurz ausgefallen, die Bleche stiessen fast stumpf aneinander. Ein weiterer und zwar ein technischer Fehler lag darin, dass die *Schweissnaht innerhalb der Krempe* lag. Es wird kaum ein Zufall sein, dass die so angeordnete Schweissnaht *b-b* (Abbildung 1), platzte, währenddem die am zylindrischen Teil vollzogene Schweissnaht *a-a* des andern Bodens hielt. Als ungünstiger Faktor mag auch die ungleiche Erwärmung (der Dampfmantel umfasst nur die untere Kesselhälfte) eine Rolle gespielt haben.

Als Ursachen der Explosion müssen angesehen werden: 1. Mangelhafte Schweissung; 2. Schweissung an unrichtiger Stelle; 3. Ueberschreitung des Maximaldruckes (was nicht nachgewiesen werden kann).

Nachträglich sind auf Veranlassung der gerichtlichen Untersuchung Materialproben durch die Eidgenössische Materialprüfungsanstalt in Zürich vorgenommen worden, mit nebenstehenden Ergebnissen (die Versuchsstäbe des Bodens sind mit *B*, diejenigen des Mantels mit *M* bezeichnet, ohne Kenntnis der Walzrichtung).

Aus diesen Tabellen geht hervor, dass das geprüfte Blechmaterial ein hartes war, von mittelmässiger Qualität, wobei namentlich die ZerreiBproben den „Würzburger Normen“ nicht genügen. Die Kerbschlagproben bestätigen dieses Urteil durch die geringen

Biegungswinkel, wobei eine Probe ohne Arbeitsleistung brach. Sämtliche Kerbschlagproben wiesen grobes, glänzendes Gefüge auf und nahezu oder gänzlich Fehlen der Kontraktionserscheinungen.¹⁾

Aetzprobe.

Zur Ermittlung der Makrostruktur und etwaiger gröberer Materialfehler wurde ein Stück des Bodens blank poliert und mit Jodkaliumlösung geätzt. Das Gefüge zeigte das normale Bild eines



Abb. 2. Vom abgesprengten Deckel durchschlagene Mauer.

homogenen Flusseisens mit dunkeln Saigerungsstreifen in der Kernzone. An einigen Stellen kamen, von Auge sichtbar, grobe, glänzende Kristalle zum Vorschein, offenbar von überhitztem Material herührend. Die Schweissfuge wies im Kern ungenügende Schweissung auf; namentlich hafteten Riefen von aufgeschweissten Eisenfeilspänen auf der einen Seite. Somit war der Beweis erbracht, dass das Blech aus gewöhnlicher Handelsware bestand, schlecht geschweisst und nach der Schweissung nicht der richtigen thermischen Behandlung unterzogen worden war.

Zurückkommend auf die Anordnung der geplatzten Schweissnaht in der Krempe muss gesagt werden, dass solche fehlerhafte Anwendungen heute öfter angetroffen werden, als man glauben möchte, und zwar in kleineren Kesselschmieden. Der Verfasser hat sich genauer darüber ausgesprochen in seiner Arbeit über „Versuche mit autogen geschweissten Kesselblechen“, Seite 42 des

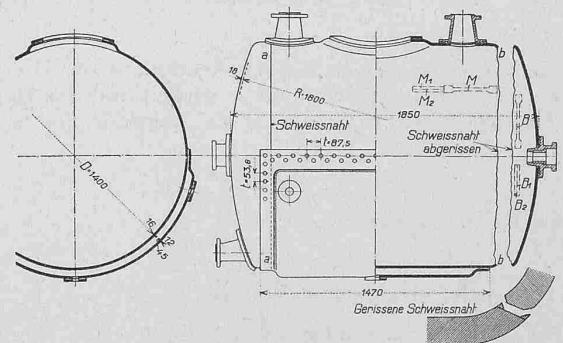


Abb. 1. Explodiertes Dampfgefäss. — Masstab 1 : 40. Mit Angabe der Materialproben-Entnahmestellen.

ZerreiBproben.

| Stab | Zugfestigkeit <i>t/cm²</i> | Dehnung °/o | Kontraktion °/o | Qualitätskoeffizient $c = \frac{\beta \lambda}{100}$ | Bruchfläche |
|------|-------------------------------|----------------|--------------------|---|-------------------------------------|
| B | 3,46 | 24,4 | 59 | 0,84 | feinsehnig, Spur verwalzter Blasen. |
| M | 3,38 | 26,2 | 64 | 0,89 | feinsehnig, verwalzte Blasen. |

¹⁾ Siehe Seite 15 und 33 der Broschüre des Einsenders: „Versuche mit autogen geschweissten Kesselblechen“, oder 46. Jahresbericht 1914 des Schweiz. Vereins von Dampfkesselbesitzern, Anhang.