

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 75/76 (1920)
Heft: 23

Inhaltsverzeichnis

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 01.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Die Biegungsbeanspruchung von Platten durch Einzelkräfte. — Von den Erweiterungsbauten der Technischen Hochschule München. — Zur Festigkeitslehre. — Miscellanea: Einführung der Kunze-Knorrbremse in Schweden. Eidgenössische Technische Hochschule. Autogene Schweißung im Eisenbetonbau. Eidgenössische

Technische Hochschule. Ein Schweizer als Träger des Nobelpreises für Physik. Elektrische Zugförderung in Kuba. Internat. Institut für Kältetechnik. — Nekrologie: Hans Mathys. — Literatur. — Vereinsnachrichten: Zürcher Ingenieur- und Architektenverein. Gesellschaft ehem. Studierender: Maschineningenieur-Gruppe; Stellenvermittlung.

Band 76.

Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 23.

Die Biegungsbeanspruchung von Platten durch Einzelkräfte.

Von Dr. Ing. A. Nádai, Göttingen.

1. Der Spannungszustand in einer dünnen elastischen Platte, die durch ein System von zu ihrer Ebene senkrechten Kräften nur wenig verbogen ist, hängt in erster Näherung von der Gestalt ab, nach der sie sich verbiegt. Die kleinen Verschiebungen, die ihre Punkte in der Richtung ihrer Ebene erfahren, sowie die Spannungen in ihrem Innern lassen sich auf eine Funktion der Koordinaten, nämlich die transversale Verschiebung der Mittelebene oder ihre Durchbiegung zurückführen. Wenn die Oberflächenkräfte an einzelnen Stellen der beiden Begrenzungsebenen der Platte konzentriert sind, ist der Formänderungszustand in der Umgebung dieser Stellen von komplizierterer Art. Man wird auf einen derartigen Fall von praktischer Bedeutung geführt, wenn die Spannungen der Platte in der Nähe der Angriffstelle einer Last bestimmt werden sollen.¹⁾ In dem kürzlich erschienenen ersten Band von „Drang und Zwang“ haben A. und L. Föppl am Beispiel der kreisförmigen Platte die eigenartigen Verhältnisse auseinandergesetzt, die für die Ermittlung der grössten Inanspruchnahme in einer durch eine Einzelkraft belasteten Platte massgebend sind, und unter anderm darauf hingewiesen, dass bei der Bestimmung der Spannungen im Innern des Gebietes, das durch einen zylindrischen Schnitt begrenzt ist, den man sich entlang der Randkurve der Druckfläche durch die Platte geführt denken kann, das Verhältnis ihrer linearen Abmessungen zur Dicke der Platte eine Rolle spielt. Wenn die Abmessungen der Druckfläche grösser als die Dicke der Platte sind, können die Druckspannungen, mit der sich die äusseren Kräfte auf sie übertragen, mit einer für die Anwendungen hinreichenden Genauigkeit neben den übrigen Spannungen vernachlässigt und die letzteren in der Umgebung der Angriffstelle der Last nach dem Vorgang von Grashof und A. Föppl aus den Formeln der Plattenbiegung bestimmt werden. Die Angabe der Durchbiegung reicht zur Beschreibung des Spannungszustandes in der Nähe der Druckfläche nicht aus bei starker Konzentration der Kraft in einer Platte von beliebiger Dicke. Dieses ist auch der Fall bei weniger stark konzentrierter Belastung, wenn die Dicke der Platte vergleichbar mit ihren übrigen Abmessungen ist. Im Folgenden sollen die Spannungen der Platte in diesen Fällen und bei kreissymmetrischer Gestaltsänderung in der Umgebung der Druckfläche und in dieser selbst angegeben werden.

Die elastischen Verzerrungen, die die Punkte eines Rotationskörpers unter der Wirkung eines zu seiner Axe symmetrisch verteilten Systems von Oberflächenkräften erfahren, sind durch die Angabe der kleinen Strecken ϱ und ζ beschrieben, um die sich die Punkte im Innern in radialer und in axialer Richtung verschieben. Die radiale und axiale Verschiebung ϱ und ζ eines Punktes, dessen Abstand von der Axe r und von einer zur letzteren senkrechten festen Ebene z ist und

¹⁾ Ich verdanke einer vor längerer Zeit gemachten gütigen Bemerkung von Herrn Prof. L. Prandtl den Hinweis auf gewisse in der Theorie der Plattenbiegung nicht berücksichtigte Verzerrungen (s. weiter unten Gl. (22a) und den anschliessenden Text), deren Einfluss sich in der Umgebung der Angriffstelle konzentrierter Kräfte stärker bemerkbar macht. Zur Durchführung der Rechnung wurde ich neuerdings durch Besprechungen mit ihm über Fragen der Berührung aneinander gedrückter elastischer Körper angeregt.

die Volumänderung $e = \frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{\varrho}{r} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$ genügen den Gleichungen¹⁾

$$\frac{\partial e}{\partial r} + (1 - 2\nu) \left(\Delta \varrho - \frac{\varrho}{r^2} \right) = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial e}{\partial z} + (1 - 2\nu) \Delta \zeta = 0$$

wo mit ν das Verhältnis der Querverkürzung zur Längsdehnung bezeichnet ist. Ist ferner G die Schubziffer des Materials, so sind die Spannungskomponenten in Zylinderkoordinaten r, z ausgedrückt:

$$\sigma_r = 2G \left(\frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} e \right)$$

$$\sigma_t = 2G \left(\frac{\varrho}{r} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} e \right) \quad \tau = G \left(\frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{\partial \varrho}{\partial z} \right) \quad (2)$$

$$\sigma_z = 2G \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} e \right)$$

2. Die Oberflächenspannungen in einem durch eine Ebene einseitig begrenzten Körper. Das System partikulärer Lösungen der Gleichungen (1)

$$\varrho = \int_0^\infty A [1 - 2\nu - az] e^{-az} J_1(ar) da \quad (z > 0)$$

$$\zeta = - \int_0^\infty A [2(1 - \nu) + az] e^{-az} J_0(ar) da \quad (3)$$

$$e = 2(1 - 2\nu) \int_0^\infty A a e^{-az} J_0(ar) da \quad 2)$$

gibt die Verschiebungskomponenten und die Volumänderung in einem Punkte (r, z) des von der Ebene $z = 0$ begrenzten Körpers wieder, der auf dieser Ebene durch axensymmetrisch verteilte Normalspannungen belastet ist. In den bestimmten Integralen hängt A von a ab, J_0 und J_1 sind die Besselschen Funktionen der Ordnung 0 und 1.³⁾ Zur Bestimmung von A dient die Gleichung für die Spannung σ_z in der Ebene $z = 0$

$$\sigma_z = -p = f(r) = 2G \int_0^\infty A a J_0(ar) da =$$

$$= \int_0^\infty a J_0(ar) da \int_0^\infty f(n) J_0(an) n dn \quad (4)$$

woraus

$$2GA = - \int_0^\infty p n J_0(an) dn \quad (5)$$

Hier und im Folgenden wird vorausgesetzt, dass der äussere Druck p bekannt und eine gegebene integrable Funktion von r ist. Wie schon Boussinesq und H. Hertz bemerkt haben, ist die Volumänderung e in der Ebene $z = 0$

$$e = 2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} = - \frac{1 - 2\nu}{G} p \quad (6)$$

dem äusseren Druck p proportional. Für ein Verteilungsgesetz $\sigma_z = -p = f(r)$ des Normaldruckes lassen sich die Spannungen in der Ebene $z = 0$ leicht angeben. Um dies zu zeigen, braucht ausser e , dessen Wert aus (6) folgt, die Radialverschiebung ϱ aus (3) und (5) für $z = 0$ ausgerechnet zu werden. Sie ist

$$\varrho = (1 - 2\nu) \int_0^\infty A J_1(ar) da = - \frac{1 - 2\nu}{2G} \int_0^\infty J_1(ar) da \int_0^\infty p J_0(an) n dn$$

oder

¹⁾ A. Föppl, Vorlesungen ü. techn. Mechanik Bd. 5. S. 212.

²⁾ Riemann-Weber, Bd. 2. S. 184.

³⁾ Schafheitlin, die Theorie der Besselschen Funktionen (Teubner).