Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 83/84 (1924)
Heft: 24

Artikel: Zur Schwingungslehre
Autor: Meissner, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-82919

Band 84. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 24.**

Zur Schwingungslehre.

Von Prof. Dr. E. Meissner, Zürich.

(Schluss von Seite 276.)

Eigenschwingungen mit periodisch veränderlicher Elastizität.

Ueber dieses Thema habe ich in dieser Zeitschrift (Bd. 72, Nr. 11, vom 14. September 1918) einen Aufsatz I[1]) veröffentlicht. Es handelte sich im wesentlichen um Vorgänge, die der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + P(t) \cdot x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

genügen, wobei $P(t)$ eine periodische Funktion der Zeit ist:

$$P(t+T) \equiv P(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Sie treten bei schwingenden Systemen dann auf, wenn die elastische Kraft die die Schwingung verursacht, nicht konstante, sondern periodisch pulsierende Intensität P besitzt. Mein Aufsatz bezweckte, die neuen Begriffe, die den Vorgang kennzeichnen, scharf zu fassen. Insbesondere hatte ich darauf hingewiesen, dass es unendlich viele Zonen für den Wert T der Pulsationsperiode gibt, für die der Schwingungsvorgang instabil ist, indem die Ausschläge ins Unendliche wachsen. Ich hatte eine kurze Andeutung auf die Berechnungsmethoden für die Instabilitätszonen gemacht, wie sie die astronomische Störungstheorie entwickelt hat [2]) und hatte schliesslich ein dem dort im Vordergrund stehenden technischen Problem angepasstes Beispiel konstruiert.

Von den Arbeiten, die an diesen Aufsatz anknüpften, muss ich hier zwei Aufsätze erwähnen, die Herr *L. Dreifus* veröffentlicht hat [3]), und die in der Folge unter II, bezw. III zitiert werden. Sie enthalten ausser einer Näherungstheorie zur Berechnung der Instabilitätszonen auch theoretische Betrachtungen, die angeblich die Theorie vertiefen sollen, während sie nach meiner Ansicht nur geeignet sind, Verwirrung zu stiften. In der spätern Arbeit III sind diese Betrachtungen freilich auf einen einleitenden Abschnitt beschränkt und etwas vorsichtiger gefasst, so dass ich mich hauptsächlich an sie halten werde, um meine Bemerkungen anzubringen. — Verwahren möchte ich mich gegen die Art, wie Herr Dreifus meine Ausführung wiedergibt.

Zunächst stiftet der Verfasser grosse Verwirrung, indem er den Ausdruck „periodisch" in einem unwissenschaftlichen und unzulässigen Sinn verwendet. Er nennt nämlich „periodisch" eine jede Funktion [4]), die „in gleichen Intervallen durch Null geht, gleichgültig nach welchem Gesetz ihre Amplituden anwachsen oder abklingen". Nur so wird verständlich, dass er in II behauptet, ich hätte nachgewiesen, dass die Schwingungen in der Instabilitätszone periodisch seien [5]). Uebrigens ist nicht einmal diese Aussage korrekt. Es gibt im instabilen Falle wohl zwei „periodische" Integrale X_1, X_2 von (16), aber das allgemeine Integral $c_1 X_1 + c_2 X_2$ ist es im allgemeinen nicht, da die Summe zweier im Dreifus'schen Sinne periodischer Funktionen im allgemeinen nicht periodisch ist.

Indessen bekommen gewisse Stellen der Dreifus'schen Ausführungen doch wieder nur dann einen Sinn, wenn man annimmt, er verstehe manchmal unter periodischer Funktion dann doch wieder dasselbe, was andere Leute auch, nämlich eine Funktion, die der Identität (17) genügt, die also in ihrem ganzen Verlauf im allgemeinen durch eine Fourier-Reihe dargestellt werden kann.

Diese Zweideutigkeit, gerade an kritischen Stellen, macht es schwer, den genauen Sinn der Behauptungen von Dreifus zu fassen. Ein Beispiel:

Ich hatte betont, dass der Begriff Eigenfrequenz für diese Art von Schwingungen keinen Sinn mehr hat. Herr Dreifus führt eine mittlere Eigenfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ein, die aus

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{T}\int_0^T \sqrt{|P(t)|}\, dt$$

zu berechnen ist. Das ist natürlich erlaubt. Es bleibt indessen völlig dunkel, was es bedeuten soll, wenn er in III, S. 93 inmitten grundlegender Ueberlegung sagt: „Nun liegt aber die Eigenfrequenz des Systems stets in der Nähe von $\frac{1}{T_0}$."

Herr Dreifus ist bestrebt, die Vorgänge vom Standpunkt der bekannten Schwingungslehre aus „verständlich" zu machen. Er will also die Lösungen von (16) an jene von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten anknüpfen. Soweit es sich um Integral-Eigenschaften wie Schwingungsdauer usw. handelt, muss dieser Versuch natürlich missglücken. Er geht von der Gleichung

$$\frac{d^2x}{d\vartheta^2} + \frac{d \lg P}{d\vartheta} \cdot \frac{dx}{d\vartheta} + \omega_0^2 x = 0 \quad \left(P(\vartheta+T) = P(\vartheta)\right) \quad (18)$$

aus, die durch eine bekannte Transformation [1]) aus (16) entsteht. Er deutet sie als Bewegungsgleichung eines gewöhnlichen elastischen Systems mit periodisch veränderlichem Dämpfungsfaktor, übersieht aber jetzt, dass eine solche „Dämpfung", die gelegentlich auch eine „Anfachung" ist, in sehr verwickelter Weise den Vorgang beeinflusst. Bei gewöhnlicher Dämpfung bleibt der Abstand der Nulllagen unveränderlich, hier nicht, ja er ist hier sogar für verschiedene Anfangsbedingungen verschieden.

Alles dies ergibt sich sofort aus der Struktur der Integrale von (16) bezw. (18). Nach I gibt es zwei Lösungen mit den Eigenschaften

$$X_1(\vartheta + T) \equiv \lambda X_1(\vartheta) \qquad X_2(\vartheta + T) \equiv \frac{1}{\lambda} X_2(\vartheta) \quad (19)$$

wo λ eine im instabilen Falle reelle Grösse ist. Setzt man noch $\frac{1}{T} \lg |\lambda| = \alpha$, so kann man diese Lösungen in der Form anschreiben

$$X_1(t) = e^{\alpha\vartheta} \cdot p_1(\vartheta) \qquad X_2(t) = e^{-\alpha\vartheta} p_2(\vartheta)$$

und es sind alsdann p_1 und p_2 periodische Funktionen, die im instabilen Fall die Periode T oder $2T$ besitzen. Bei den gewöhnlichen Schwingungen mit Dämpfung hat man allerdings ähnlich gebaute Lösungen, aber der Exponentialfaktor ist dort bei beiden derselbe. Er hat somit dort auf die Nullstellen der allgemeinen Lösung $c_1 X_1 + c_2 X_2$ gar keinen Einfluss. Ganz anders hier, wo die Nullstellen aus

$$e^{2\alpha\vartheta} = -\frac{c_2}{c_1} \frac{p_2(\vartheta)}{p_1(\vartheta)}$$

bestimmt werden, also weder aequidistant, noch unabhängig von den Anfangsbedingungen ausfallen.

Herr Dreifus geht bei seiner grundlegenden Betrachtung in III, S. 92, anknüpfend an Gleichung (18), von der Energiestreuung während einer Pulsationsperiode aus, die durch

$$E_{0T} = \frac{\omega_0^2}{P(0)} \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2 \cdot \frac{d \lg P}{d\vartheta} \cdot d\vartheta \quad (20)$$

---

1) Die Arbeiten werden im Text unter römischen Ziffern zitiert.

2) Ausführliche Literaturzitate z. B. in *Poincaré:* Les nouvelles méthodes de la Méchanique céleste (1893) Bd. III. S 250 ff.

3) II. *L. Dreifus:* Eigenschwingungen von Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität. „Archiv für Elektrotechnik", 12. Band, S. 38, (1923). — III. Unter gleichem Titel in „Beiträge zur Technischen Mechanik und Technischen Physik" (Festschrift für August Föppl), Berlin 1924. [Angekündigt in Bd. 65, S. 142, Red.]

4) Nach brieflicher Mitteilung.

5) II. 1. Abschnitt.

1) Die Transformation ist durch Formel (21) gegeben.

gegeben wird. Ein „stets positiver Wert von E" bedeutet nach ihm Dämpfung, ein „durchaus negativer Wert" Energie-Zufuhr von aussen, also Instabilität. „Ist endlich der Integralwert gleich null, so bleibt der durchschnittliche Energie-Inhalt des Systems unverändert; die Schwingung ist dann ungedämpft. Die Bedingung $E_{0T} = 0$ bestimmt somit die Grenzen der Instabilitätszonen."

Was soll das heissen, der Wert von E_{0T} sei „stets" positiv, „durchaus" negativ? Das Integral hat für jede bestimmte Bewegung einen bestimmten Wert, der für die Frage der Stabilität gänzlich bedeutungslos ist. Meint Herr Dreifus hingegen das Integral, genommen für alle nur denkbaren Anfangsbedingungen, so kommt es gar nie vor, dass es immer positiv ausfällt. Meint endlich Herr Dreifus das Integral, nicht zwischen 0 und T, sondern über ein beliebiges Zeitintervall der Länge T erstreckt, so hat das Integral für aufeinander folgende Intervalle nicht denselben Wert, ja auch im allgemeinen nicht dasselbe Vorzeichen. In allen denkbaren Fällen entbehrt also das Kriterium $E_{0T} = 0$ jeder Begründung.

Alles dies ergibt sich sofort, wenn man das allgemeine Integral durch die erwähnten Grundlösungen (19) darstellt in der Form $x = c_1 X_1 + c_2 X_2$

Die Energiestreuung während der n-ten Pulsationsperiode ist

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)\begin{Bmatrix} c_2^2 \lambda^{2n}\left(X'^2_1(0) + P(0)\,X^2_1\right) - c_2^2 \lambda^{-2n} \\ \left(X'^2_2(0) + P(0)\,X^2_2\right) \end{Bmatrix}$$

Die Totalstreuung in den ersten n Perioden

$$\left(1 - \lambda^{2n}\right)\begin{Bmatrix} c_1^{\,2}\left(X'^2_1(0) + P(0)\,X'^2_1(0)\right) - \frac{c_2^{\,2}}{\lambda^{2n}} \\ \left(X'^2_2(0) + P(0)\,X^2_2(0)\right) \end{Bmatrix}$$

Im Falle der Instabilität (λ reell) kann es also ganz wohl vorkommen, dass die Energie des Systems während einer Zeit, die beliebig gross vorgeschrieben werden kann, stets abnimmt, um erst nachher ins Unendliche anzuwachsen. Dies wird immer dann der Fall sein, wenn die Anfangs-Bedingungen derart sind, dass die nach null abklingende Grundlösung anfänglich dominiert, weil sie mit einem grossen Faktor in die allgemeine Lösung eintritt.

Für $\lambda = \pm 1$ ergeben die angeschriebenen Formeln eine Energiestreuung gleich null. In diesem Grenzfall existiert eine periodische bezw. halbperiodische Lösung. Allein es werden dann die Integrale X_1 und X_2 identisch und das zweite unabhängige Integral ist nur ganz ausnahmsweise auch periodisch, sodass im allgemeinen dieser Fall noch zu instabiler Bewegung führt.

Nachdem so den Dreifus'schen Ausführungen die Grundlage entzogen ist, kann davon abgesehen werden, seine weitern Ueberlegungen zu analysieren. Was in III, S. 93 steht, sind Luftsprünge, mit denen über Klippen weggesetzt wird. Der Vorgang wird mit Gewalt zur Resonanz-Erscheinung gestempelt durch Schlüsse, die in keiner Weise Stich halten. Wenn dann trotzdem die Instabilitäts-Zonen doch nicht zum Vorschein kommen wollen, so wird ein Phasenwinkel eingeführt zwischen der „Schwingung des Systems" und der elastischen Kraft, der sich mit der Frequenz der Elastizität „*automatisch*" so ändern soll, „dass zwischen der Frequenz der Elastizität und der Systemschwingung dasselbe ganzzahlige Verhältnis erhalten bleibt". „Verändern wir", heisst es zum Schluss, „die Frequenz der Elastizität so stark, *dass diese Anpassung nicht mehr möglich ist,* so trennen sich die Frequenzen der Elastizität und der Eigenschwingung und damit hört sofort die Resonanz auf".

Man sieht, zu welchen Mitteln der Verfasser Zuflucht nehmen muss. Beweiskräftig, erklärend und vertiefend ist das meiner Meinung nach nicht.

Ich lehne seine „Erklärung" deswegen so scharf ab, weil sie schon in die Literatur einzugehen sich anschickt[1]), und weil die Gefahr ihrer Verbreitung beträchtlich ist, da der Ingenieur naturgemäss seine gewohnten Schwingungs-Begriffe nur ungern erweitern wird und sie deshalb auch gern da anzuwenden versuchen wird, wo sie nicht mehr hinpassen. Dass er ein Bedürfnis nach Veranschaulichung der Sache empfindet, ist verständlich und vernünftig. Hier fehlt leider der Raum dazu. Beispiele, wie etwa die kleinen Schwingungen einer Schaukel, auf der ein Mann sich periodisch senkt und hebt, können dazu dienen. Indessen hüte er sich vor der von Dreifus vertretenen Auffassung, wonach die Instabilität eine Resonanzerscheinung sei, die irgend etwas mit der Ganzzahligkeit von Periodenverhältnissen zu tun habe. Das erste, von Dreifus selbst gegebene Beispiel in III, S. 96, widerlegt sie. Wenn in $\lg P(\vartheta)$ nur die Grundwelle auftritt, alle Oberwellen fehlen, so sollte nach ihr nur eine einzige Instabilitätszone erscheinen. Tatsächlich sind es nach wie vor unendlich viele. Herr Dreifus bemerkt diese Unstimmigkeit; er tröstet sich damit, dass für schwache Elastizitätsschwankungen jene Zonen schmal werden, was natürlich die begriffliche Schwierigkeit nicht hebt.

[1]) *J. Döry:* Die Schüttelerscheinungen elektrischer Lokomotiven mit Kurbelantrieb. Sammlung Vieweg. Heft 68, S. 25 und 27.

Das Näherungsverfahren, das Herr Dreifus zur Berechnung der Zonen vorschlägt, besteht in folgendem: Zuerst wird Gleichung (16) durch die bekannte Zeittransformation

$$\vartheta \cong \frac{1}{\omega_0}\int_0^t \sqrt{|P(t)|}\;dt \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

in Gleichung (18) übergeführt. Alsdann wird $\lg P(\vartheta)$ in eine Fourier-Reihe entwickelt

$$\lg\ P(\vartheta) \approx \gamma_0 + \sum \gamma_{2k} \cos\left(\frac{2k\pi}{T}\vartheta + 2\,k\,\varphi_{2k}\right)$$

und für das periodische Integral an der Stabilitätsgrenze ein zweiter Fourier-Ansatz gemacht. Für dessen Koeffizienten erhält man unendlich viele Gleichungen.[1]) Da bei kleinen Schwankungen einer davon überwiegt, werden alle andern gleich null gesetzt, woraus dann für die Pulsationsperiode T^* an der Stabilitätsgrenze folgt:

$$\frac{T^*}{\left(\frac{T_0}{2}\right)} = r\left(1 \pm \frac{\gamma_{2r}}{4}\right) \qquad r = 1, 2, 3 \ldots$$

Das Verfahren gibt in den Fällen, wo es geprüft werden kann, überraschend gute numerische Resultate, selbst wenn die Schwankungen der Elastizität nicht mehr ganz klein sind. Diese Fälle sind aber leider recht wenig zahlreich. Denn nur ganz ausnahmsweise wird sich die Transformation (21) analytisch durchführen lassen. Man wird sie im allgemeinen nur zeichnerisch vornehmen können.

Aber es gibt recht interessante Fälle, wo die Methode überhaupt nicht anwendbar ist. Herr Dreifus hat immer stillschweigend $P(t) > 0$ vorausgesetzt. Schon für eine intermittierende Kraft versagt (21). Es kann aber vorkommen, dass die elastische Kraft ihren Sinn wechselt, während gewisser Zeiten in eine aus der Gleichgewichtslage hinweg treibende Kraft übergeht. Ein mechanisches Beispiel dafür ist ein Pendel mit einer in seiner Axe auf- und niederschwingenden Masse, dessen Gleichgewichtslage bei hoher Lage der Masse instabil, bei tiefer stabil ist.

Nun zeigt sich die bemerkenswerte Tatsache, dass die ganze Stabilitätstheorie vom Vorzeichen von P gar nicht abhängt. Man muss freilich den ganz extremen Fall, wo die Kraft immer abstossend wirkt ($P(t) \leq 0$ für alle t) ausschliessen. *Dann aber gibt es, wie kurz auch der Zeitraum sei, in dem während einer Pulsation Anziehung herrscht, stets unendlich viele Stabilitätszonen, die von Zonen labiler Bewegung getrennt werden.*

Der Beweis dafür folgt unmittelbar aus den Hilbert'schen Sätzen über polare Integralgleichungen.[2]) Natürlich ist die Wahrscheinlichkeit stabiler Bewegungen um so kleiner, je mehr die Abstossung die Anziehung während einer Pulsation überwiegt. Folgendes Beispiel diene zur Erläuterung:

[1]) Ueber ihre Behandlung vergl. *Rayleigh:* On maintained vibrations. Phil. Mag. XV (1883), XXIV (1887) oder Papers, I., II. und III. sowie *Poincaré* loc. cit.

[2]) *D. Hilbert.* Grundzüge der Theorie der Integralgleichungen; 5. Mitteilung. Gött. Nachr. 1906, S. 473. Die Bedingungen für ein periodisches Integral ist in der bei Hilbert als „Randbedingung IV" bezeichneten Forderung enthalten.

Während der Zeit T_1 herrsche die normale elastische Kraft $-\sigma_1^2 x$. Alsdann springe sie über in eine Abstossung konstanter Intensität $+\sigma_2^2 \cdot x$, die während der Zeit T_2 bis zum Schluss der Pulsationsperiode andauert, sodass $T = T_1 + T_2$. Die Rechnung ergibt für die Zonengrenzen:

$$\cos(\sigma_1 T_1)\,\mathrm{ch}(\sigma_2 T_2) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)\sin(\sigma_1 T_1)\,\mathrm{sh}(\sigma_2 T_2) = \pm 1 \qquad (22)$$

Setzt man noch speziell $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, so wächst die linke Seite von (22) von 1 aus an, oder nimmt von 1 aus ab, wenn T von null aus ansteigt, je nachdem $T_2 > T_1$ oder $T_2 \leq T_1$ ausfällt. Je nachdem also Abstossungszeit oder Anziehungszeit überwiegt, gehören zu sehr raschen Pulsationen labile oder stabile Bewegungen. Dies war zu erwarten.

Im Grenzfall $T_1 = T_2 = T/2$ wird mit $x = \frac{\sigma}{2} T$ aus (22)

$$\cos(x) \cdot \mathrm{ch}(x) = \pm 1$$

Dies stimmt aber überein mit der Frequenzen-Gleichung eines elastischen Stabes, der Biegungsschwingungen ausführt und dessen Enden entweder frei oder eingeklemmt sind. Ihre ersten Wurzeln lauten nach Rayleigh [1]) in aufsteigender Reihe geordnet:

1,875104	7,854758	14,137168
4,694737	10,995541	17,278759
4,7300408	10,9956078	17,2787596
7,8532046	14,1371655	

Man sieht, wie schon hier die Stabilitätszonen ganz ausserordentlich schmal werden mit Ausnahme der ersten. Praktisch kommt Stabilität also nur für sehr rasche Pulsationen in Betracht. Umso merkwürdiger erscheint die Existenz unendlich vieler solcher Zonen. Wenn es noch eines Beweises bedürfte, dass die theoretischen Betrachtungen von Dreifus den Kern der Sache nicht treffen, so sollte er durch dieses Beispiel geliefert sein.

Indessen ist es angezeigt, die gute numerische Uebereinstimmung der Dreifus'schen Näherung für den Fall nicht sehr starker Schwankungen der elastischen Kraft hier zu bestätigen.

Zunächst soll das an dem von mir in I, S. 97 behandelten Beispiel geschehen. Die Zonengrenzen sind dort zu bestimmen aus

$$\cos(x_1) \cdot \cos(x_1) - \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right)\sin(x_1) \cdot \sin(x_1) = \pm 1 \qquad (23)$$

Ich habe dort für verschiedene Werte der Elastizitäts-Schwankung die Zonengebiete skizziert.[2]) Sie können folgendermassen einfach konstruiert werden: Mit $x_1 + x_2 = 2 z_1$, $x_1 - x_2 = 2 z_2$ zerfällt (23) in

$$z_1 \cdot \sin(z_1) = \pm z_2 \cdot \sin(z_2) \qquad \pm z_1 \cdot \cos(z_1) = z_2 \cdot \cos(z_2)$$

Man zeichne die Spirale mit der Polargleichung $r = \varphi$. Schneidet man sie mit irgend einer Parallelen oder Normalen zur Polaraxe, so geben die Radienvektoren irgend zweier Schnittpunkte zwei zusammengehörige Werte von z_1 und z_2. Die auf diese Weise erhaltene genaue Zeichnung ist mit den Ergebnissen der Näherungstheorie graphisch verglichen worden. Jene gibt für die Zonengrenzen T^*

$$\frac{T^*}{\left(\frac{T_0}{2}\right)} = r\left[1 \pm \frac{1}{2\pi r}\lg\frac{v_1}{v_2} \cdot [1 - (-1)^r]\right]$$

wobei $-v_1^2 x$ und $-v_2^2 x$ die elastische Kraft in der ersten und in der zweiten Hälfte der Pulsationsperiode bedeuten. Es ergab sich, dass die Näherungsformeln erst dann stark von den genauen Resultaten abweichen, wenn $v_1 : v_2$ sehr klein ausfällt. Für eine intermittierende elastische Kraft dürfen sie also nicht mehr verwendet werden.

Ein letztes Beispiel liefert die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(1 + \omega\frac{2\pi}{T}t\right) \cdot x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (24)$$

Hier ergibt sich nach der Näherungsrechnung für die Zonengrenzen:

$$\frac{T^*}{\left(\frac{T_0}{2}\right)} = r\left[1 \pm \frac{1}{2\pi r} Si(2\pi r)\right] \qquad r = 1, 2, 3 \; . \; . \; . \qquad (25)$$

Es ist dabei Si (x) der sog. Integralsinus, eine durch

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dx$$

definierte Funktion, die sich mit wachsendem x rasch dem Wert $\frac{\pi}{2}$ nähert, ihn schon für $x = 2\pi$ auf einige Prozente genau erreicht hat.

Anderseits lassen sich nach Rayleigh die Zonengrenzen berechnen aus folgenden Gleichungen:

$$T^* = \pi \cdot \sqrt{\sigma}$$

wobei σ aus einer der vier Gleichungen

$$\psi_1(\sigma) = 0 \qquad \psi_1(\sigma) - \frac{\sigma}{2} = 0 \qquad \psi_2(\sigma) = 0 \qquad \psi_2(\sigma) + \sigma = 0$$

zu ermitteln ist und ψ_1, ψ_2 durch die Kettenbruch-Entwicklungen

$$\psi_1(\sigma) = \sigma - 2^2 - \cfrac{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2}{\sigma - 4^2 - \cfrac{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2}{\sigma - 6^2 - \cfrac{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2}{\sigma - 8^2 - \ldots}}}$$

und

$$\psi_2(\sigma) = \frac{\sigma}{2} - 1 - \cfrac{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2}{\sigma - 3^2 - \cfrac{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2}{\sigma - 5^2 - \cfrac{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2}{\sigma - 7^2 - \ldots}}}$$

gegeben werden. Die Rechnung [1]) ergab:

$\sigma =$	0,66	1,78	3,72	6,08	9,26	12,85
$T^* : \pi =$	0,81	1,33	1,93	2,47	3,04	3,58
$\frac{1}{\pi} \cdot$ Zonenmitte $=$	1,07		2,20		3,31	
(Nach Dreifus)	(1,11)		(2,22)		(3,33)	
$\frac{1}{\pi} \cdot$ Zonenbreite $=$	0,52		0,54		0,54	
$\sigma =$	17,26	22,07	27,74	33,81	40,96	47,90
$T^* : \pi =$	4,15	4,70	5,27	5,81	6,38	6,92
$\frac{1}{\pi} \cdot$ Zonenmitte $=$	4,425		5,54		6,65	
(Nach Dreifus)	(4,44)		(5,555)		(6,664)	
$\frac{1}{\pi} \cdot$ Zonenbreite $=$	0,55		0,54		0,55	

Für $r = 1,2$ ergibt die Formel (25), wobei eine Tafel für Si (x) oder beträchtliche Rechnungen erforderlich sind,

$T^* : \pi =$	0,857	1,364	1,956	2,487

Der Vergleich zeigt, dass auch in diesem Beispiel die Näherung recht gut ist, insbesondere die Zonenbreite fast konstant ist, wie (25) erfordert.

Auf Grund dieser Ergebnisse wird man allgemeiner behaupten dürfen, dass die Dreifus'schen Näherungsformeln, soweit sie überhaupt anwendbar sind, genügende Genauigkeit geben, wenn die elastische Kraft nicht über den Wert null hinaus schwankt und diesen Wert nie längere Zeit annimmt.

Begründen wird man das Verfahren damit, dass im Grenzfall verschwindender Elastizitäts-Schwankungen die ganzperiodischen, bezw. halbperiodischen Lösungen übereinstimmen mit

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{T}t + \varepsilon\right) \text{ bezw. } \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{T}t + \varepsilon\right) \quad k = 1, 2, 3 \; . \; . \; .$$

sodass also alle Fourierkoeffizienten in ihrer Entwicklung mit Ausnahme von einem null werden.

[1]) *Rayleigh:* Theory of sound I. Art. 174/5.

[2]) Die Skizze ist insofern etwas ungenau, als die den vollperiodischen Instabilitätsgebieten entsprechenden Zonen in der 45^0 Linie spitz zulaufen und dort zusammenfallende Tangenten haben. Natürlich ist das für den Zweck der Skizze ganz nebensächlich.

[1]) Ausgeführt von meinem Assistenten, Herrn Gassmann.